

1

Une grille $\{1, 2, 3\} \times \llbracket 1, n \rrbracket$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2, n)$. À chaque instant, si elle se trouve au milieu (ie en un point $(2, k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace à droite (respectivement à gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à l'instant t .
2. Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

Solution de 1 :

Source : RMS 2024 386

1. On remarque que dans tous les cas, la goutte descend avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Soit D_i la variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ permettant de savoir si, à l'étape i , la goutte est descendue.

Alors l'ordonnée de la goutte à l'instant t est $X = n - \sum_{k=1}^t D_k$.

L'événement A_t « La goutte sort à l'instant $t \geq n$ » est donc l'événement

$$A_t = \left(\sum_{k=1}^t D_k = n, \sum_{k=1}^{t-1} D_k = n-1 \right) = \left(D_t = 1, \sum_{k=1}^{t-1} D_k = n-1 \right).$$

Comme les D_k sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^{t-1} D_k \sim \mathcal{B}\left(t-1, \frac{1}{2}\right)$.

Avec l'indépendance des D_k et le lemme des coalitions, on obtient

$$\mathbb{P}(A_t) = \mathbb{P}(D_t = 1) \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{t-1} D_k = n-1\right) = \frac{1}{2} \times \binom{t-1}{n-1} \frac{1}{2^{t-1}} = \boxed{\binom{t-1}{n-1} \frac{1}{2^t}}$$

(qui est nul si $t < n$, donc l'expression reste valable dans tous les cas.)

2. Notons $Y = \min\left\{t \geq n, \sum_{k=1}^t D_k = n\right\}$ la variable aléatoire du temps d'attente de la sortie de la goutte dont on veut calculer l'espérance. Sa fonction génératrice est

$$G_Y(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=n}^{+\infty} (k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

En dérivant $n-1$ fois la série géométrique (de rayon de convergence 1), on obtient

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{k=n-1}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+2)x^{k-n+1} = \sum_{k=n}^{+\infty} (k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$$

D'où on tire

$$G_Y(x) = \left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)^n = \left(\frac{x}{2-x}\right)^n = \left(\frac{2}{2-x} - 1\right)^n$$

dérivable en 1, donc $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1) = 2n$.

2

Soient $n \geq 2$ et $\mathcal{J}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists \lambda \in \text{Sp } A, \text{Im } A \subset E_\lambda A\}$, où $E_\lambda A$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ .

1. Montrer que $\mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ est stable par similitude.
2. Soient $A, B \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\text{rg } A = \text{rg } B$ et $\text{tr } A = \text{tr } B$.
3. On note $\mathcal{J}_n^*(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists \lambda \in \text{Sp } A, \text{Im } A = E_\lambda A\}$. Étudier la connexité par arcs de $\mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{J}_n^*(\mathbb{R})$.
4. Déterminer les classes de similitude incluses dans $\mathcal{J}_2(\mathbb{R})$.

Solution de 2 :

Source : RMS 2024 94

1. L'appartenance d'une matrice A à $\mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ signifie qu'il existe une valeur propre λ de A telle que $(A - \lambda I_n)A = 0$, i.e. $A^2 = \lambda A$. Cette condition est évidemment invariante par similitude.
2. Soit $A \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \text{Sp } A$ tel que $A^2 = \lambda A$.
 - Si $\lambda = 0$, la matrice A est nilpotente, d'indice ≤ 2 . Dans ce cas on a $\text{tr } A = 0$.
 - Si $\lambda \neq 0$, A est diagonalisable et $\text{Sp } A = \{\lambda\}$ ou $\{\lambda, 0\}$; dans ce cas A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r = \text{rg } A > 0$ (car λ doit être une valeur propre de A). On a dans ce cas $\text{tr } A = \lambda \text{rg } A \neq 0$.

Soit maintenant $A, B \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ de même rang et de même trace.

Si leur trace est non nulle, alors elles sont toutes deux diagonalisables, avec une unique valeur propre non nulle λ qui est la même pour A et B , à savoir

$$\lambda = \frac{\text{tr } A}{\text{rg } A} = \frac{\text{tr } B}{\text{rg } B}$$

comme elles ont le même rang, A et B sont semblables à la même matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda I_r, 0)$.

Si $\text{tr } A = \text{tr } B = 0$, alors on a $A^2 = B^2 = 0$. Soit $r = \text{rg } A = \text{rg } B$, alors A et B sont semblables à $N_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C'est une propriété classique des matrices nilpotentes d'indice ≤ 2 . On se donne une base $(e_1, \dots, e_r)$ d'un supplémentaire F de $\text{Ker } A$, alors $(Ae_1, \dots, Ae_r)$ est une base de $\text{Im } A$; comme $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$, on peut compléter en une base $(Ae_1, \dots, Ae_r, f_1, \dots, f_p)$ de $\text{Ker } A$, alors la famille $(Ae_1, \dots, Ae_r, f_1, \dots, f_p, e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n = \text{Ker } A \oplus F$ et la matrice dans cette base de l'endomorphisme canoniquement associé à A est bien N_r . Dans tous les cas, les matrices A et B sont semblables. La réciproque est évidente.

3. L'ensemble $\mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ est étoilé par rapport à 0, donc connexe par arcs.

Montrons que $\mathcal{J}_n^*(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Cet ensemble contient les matrices I_n et $E_{11} = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}_n^*(\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = E_{11}$. Considérons

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1], \gamma(t) \text{ est une homothétie}\}$$

L'ensemble des homothéties est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\gamma(t_0)$ est une homothétie $\lambda_0 I_n$.

On a $t_0 < 1$ car E_{11} n'est pas une homothétie, et $\lambda_0 \neq 0$ car la matrice nulle n'est pas dans $\mathcal{J}_n^*(\mathbb{R})$.

On a alors $\det(\gamma(t_0)) \neq 0$, et par continuité de $\det \circ \gamma$, $\gamma(t)$ est inversible pour tout t proche de t_0 . Or $\mathcal{J}_n^*(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des homothéties non nulles, donc il existe $t > t_0$ tel que $\gamma(t)$ soit une homothétie. Ceci contredit la définition de t_0 .

4. D'après les raisonnements effectués à la question 2, toute matrice de $\mathcal{J}_2(\mathbb{R})$ est semblable à l'une des matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda I_2 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Ces matrices appartiennent bien à $\mathcal{J}_2(\mathbb{R})$, donc les classes de similitudes incluses dans $\mathcal{J}_2(\mathbb{R})$ sont précisément les classes de ces matrices.