

254. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour A partie de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $M(A)$ la matrice carrée de taille n à coefficients dans $\{0, 1\}$ caractérisée par $\forall (i, j), M(A)_{i,j} = 1 \iff (i, j) \in A$. On considère l'ensemble P des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ de cardinal n et une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur P . Quelle est la probabilité que $M(X)$ soit inversible ?

255. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$. Déterminer $\mathbb{E}(M_n^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Ind. Distinguer selon la parité de k .

256. * Soient, pour $\lambda > 0$, $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda$ quatre variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

a) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda \text{ n'a que des racines réelles})$.

b) Même question pour $A_\lambda X^3 + B_\lambda X^2 + C_\lambda X + D_\lambda$.

257. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble S_n des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour $\sigma \in S_n$, on note $P_k(\sigma) = \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k, i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ et } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots < \sigma(i_k)\}$ l'ensemble des sous-suites croissantes de longueur k de la permutation σ . Déterminer l'espérance de $\text{Card}(P_k)$.

258. Soient $\lambda \in [0, 1]$, $(X_{k,n})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ n \geq 1}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, où $X_{k,n}$ suit la loi $\mathcal{B}(\lambda/n)$. On pose $X_n = X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\exp(tX_n))$.

259. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi telles que $X \sim X_{1,n} + \dots + X_{n,n}$.

a) Donner des exemples de variables aléatoires indéfiniment divisibles.

b) Soit X une variable aléatoire infiniment divisible non nulle telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $A > 0$, $\mathbb{P}(X > A) > 0$.

260. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(P(M_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) P(x) dx$.

261. On note $D(X)$ le nombre de diviseurs premiers de X , où X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(D(X))$.

b) On admet que $\sum_{\substack{p \text{ premier, } p \leq n}} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln n)$. Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{D(X)}{\ln(\ln n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

262. Soient $C \in \text{GL}_q(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ nilpotente. Soit $p \in]0, 1[$. On définit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $B_0 = I_n$ et $B_{n+1} = A_n B_n$, où $\mathbb{P}(A_n = C) = p$ et $\mathbb{P}(A_n = N) = 1 - p$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n \neq O)$.

263. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

Soient $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $p \in]0, 1[$. On note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit (u_n) une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ avec $u_0 = (1, 0)^T$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(u_{n+1} = R(\theta)u_n) = p$ et $\mathbb{P}(u_{n+1} = Mu_n) = 1 - p$. Déterminer la limite de $(\mathbb{E}(\|u_n\|))$ pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$ puis pour θ quelconque.

264. Soit $\theta \in [0; 2\pi]$. Soit $p \in]0; 1[$. On pose $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les variables aléatoires $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et vérifient $\mathbb{P}(A_n = R) = p$ et $\mathbb{P}(A_n = Q) = 1 - p$. On note $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A_n U_{n-1}$.

On note $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ les instants n successifs où $A_n = Q$.

a) Trouver la loi de $\|U_{t_1}\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique.

b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, donner une approximation du nombre d'indices i tels que $t_i \leq N$.

Dans toute la suite, on suppose que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

c) Calculer $\mathbb{E}(\ln \|U_{t_1}\|)$.

d) Déterminer la loi de $\|U_{t_2}\|$.

e) Déterminer la loi de $\|U_{t_k}\|$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

f) Déterminer $\mathbb{E}(\ln \|U_{t_k}\|)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

École Polytechnique - MP - MPI

Algèbre

265. ** Pour toute partie finie non vide X de $\mathbb{R}$ dont on note $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les éléments, on pose : $a^+(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i + 1)$ et $a^-(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i - 1)$. L'objectif est d'établir que : $\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = a^+(A)$ pour n'importe quelle partie finie non vide A de $\mathbb{R}$.

On se donne donc $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie finie non vide de $\mathbb{R}$, avec $a_1 < \dots < a_n$.

a) On suppose le résultat acquis. Trouver une expression de : $\alpha(A) = \sum_{\substack{B \subset A \\ a_n \in B}} a^-(B)$.

b) Établir le résultat cherché.

c) On suppose $A = \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer : $\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset \\ B \cap (B+1) = \emptyset}} a^-(B)$.

266. a) Soit n un entier supérieur à 1 et premier avec 10. Montrer que n possède un multiple dont l'écriture en base 10 n'a que des 9.

b) On remarque que $\frac{1}{7} = 0, \underline{142857} \, \underline{142857} \dots \underline{142857} \dots$ avec $142 + 857 = 999$.
 $\frac{2}{7} = 0, \underline{285714} \, \underline{285714} \dots \underline{285714} \dots$ $285 + 714 = 999$
 $\frac{1}{13} = 0, \underline{076923} \, \underline{076923} \dots \underline{076923} \dots$ $076 + 923 = 999$

Expliquer.

267. Pour r un rationnel non nul s'écrivant $r = 2^k a/b$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et a, b deux entiers impairs, on définit la valuation dyadique de r par $v_2(r) = k$.

On admet que : $\forall x, y \in \mathbb{Q}^*, v_2(xy) = v_2(x) + v_2(y)$ et si $x + y \neq 0$, $v_2(x + y) \geq \min(v_2(x), v_2(y))$, avec égalité si $v_2(x) \neq v_2(y)$.

On note enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Montrer que pour tout $n > 1$, $H_n \notin \mathbb{Z}$.

b) Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \leq n - 2$, on a $v_2(H_n - H_m) < 0$.

c) Montrer les propriétés admises plus haut.

d) La question **b)** peut-elle s'adapter à la valuation 3-adique ?

268. * Quels sont les m de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe m éléments consécutifs de $\mathbb{N}^*$ divisibles par des cubes d'éléments de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$?

269. Montrer que tout $n \in \mathbb{Z}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^N \varepsilon_k (-2)^k$ avec $N \geq 0$ et les ε_k dans $\{0, 1\}$.

270. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des entiers naturels qui ne sont pas divisibles par le carré d'un entier supérieur ou égal à 2, et $q(n) = |\mathcal{F} \cap [1, n]|$.

On note $\mathcal{E}(n, k) = \mathbb{R}^{+*} \cap \left\{ \sum_{i=1}^k \sqrt{a_i} - \sum_{i=1}^k \sqrt{b_i}, (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k) \in [0, n]^{2k} \right\}$ et

$\Delta(n, k) = \min \mathcal{E}(n, k)$.

a) On admet que $(\sqrt{n})_{n \in \mathcal{F}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Montrer que $\Delta(n, k) \leq \frac{k(\sqrt{n} - 1)}{\binom{q(n) + k - 1}{k} - 1}$.

b) On démontre dans cette question le résultat admis dans la précédente.

i) Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{R}$, et x un élément de $\mathbb{K} \cap \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{K}[\sqrt{x}] = \mathbb{K} + \mathbb{K}\sqrt{x}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et que si $\sqrt{x} \notin \mathbb{K}$ alors il existe un unique automorphisme σ de l'anneau $\mathbb{K}[\sqrt{x}]$ différent de l'identité et fixant tous les éléments de $\mathbb{K}$.

Dans la suite, on fixe un entier $n \geq 1$ on suppose acquise, pour tout ensemble fini A constitué de n nombres premiers, la liberté de la famille des $\sqrt{m}$, où m parcourt l'ensemble des élé-

ments de $\mathcal{F}$ ayant tous leurs diviseurs premiers dans A . Soit A un ensemble formé de $n + 1$ nombres premiers $p_1, \dots, p_{n+1}$.

ii) On construit par récurrence une suite $(\mathbb{K}_0, \dots, \mathbb{K}_n)$ de corps : $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}[\sqrt{p_i}]$ pour tout $i \in [1, n]$. Montrer que $\mathbb{K}_n$ est de dimension 2^n comme $\mathbb{K}_0$ -espace vectoriel, et en préciser une base. Montrer qu'il existe un automorphisme σ du corps $\mathbb{K}_n$ qui fixe $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}}$ et envoie $\sqrt{p_n}$ sur $-\sqrt{p_n}$. Dans la suite, on raisonne par l'absurde en supposant que $\sqrt{p_{n+1}} \in \mathbb{K}_n$.

iii) Montrer que $\sqrt{p_{n+1}} = \alpha + \beta\sqrt{p_n}$ pour un $\alpha \in \mathbb{K}_{n-1}$ et un $\beta \in \mathbb{K}_{n-1}$, puis montrer qu'en fait $\sqrt{p_{n+1}} = \beta\sqrt{p_n}$.

iv) Montrer que $\sqrt{p_{n+1}} = \lambda \prod_{k=1}^n \sqrt{p_k}$ pour un $\lambda \in \mathbb{Q}$, et conclure à une contradiction.

v) Conclure.

271. Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. On note L l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_p^*$.

a) Montrer que $|L| = \frac{p-1}{2}$.

b) Montrer que si $x \in L$, alors $-x \notin L$.

c) On fixe $x \in \mathbb{F}_p^*$ et l'on pose $A = \{(\ell_1, \ell_2) \in L^2; x = \ell_1 - \ell_2\}$. Calculer $\text{card } A$.

272. * Soit p un nombre premier impair.

a) Dénombrer les $(x, y) \in (\mathbb{F}_p)^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.

b) Soit $z \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Dénombrer $\{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2, x^2 + y^2 = z\}$.

273. Soit p un nombre premier impair. On pose $q = 2p + 1$ et l'on suppose q premier. On considère l'équation : $(E) : x^p + y^p + z^p = 0$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ une solution de (E) telle que p ne divise aucun des entiers x, y et z et telle que x, y, z soient premiers entre eux deux à deux.

a) Montrer que q divise x, y ou z .

b) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que : $y + z = a^p, x + y = b^p, x + z = c^p$.

Ind. Factoriser $y^p + z^p$.

c) Conclure à une contradiction.

274. * Soient p un nombre premier congru à 1 modulo 4 et S l'ensemble $S = \{x, y, z\} \in \mathbb{N}^3; p = x^2 + 4yz\}$. Pour $(x, y, z) \in S$ on pose :

- si $x < y - z$, $f(x, y, z) = (x + 2z, z, -x + y - z)$;

- si $y - z < x < 2y$, $f(x, y, z) = (2y - x, y, x - y + z)$;

- si $x > 2y$, $f(x, y, z) = (x - 2y, x - y + z, y)$.

Montrer que f définit une involution de S . En déduire que p s'écrit $u^2 + v^2$ avec $(u, v) \in \mathbb{N}^2$.

275. Soit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On considère l'équation $(*) : x^2 - dy^2 = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Traiter les cas $d < 0$ et $d = k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

b) Dans la suite, on suppose $d > 0$ et $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(\pm 1, 0)\}$ solution de $(*)$. On pose $z = x_0 + \sqrt{d}y_0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $z^{n+1} = x_n + \sqrt{d}y_n$.

c) En déduire que, si l'ensemble des solutions de (*) est non trivial, i.e. n'est pas réduit à $\{(\pm 1, 0)\}$, il en existe une infinité.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|p - qx| < \frac{1}{n}$.

e) Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $|p - qx| < \frac{1}{q}$.

f) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe une infinité de couples d'entiers (p, q) tels que $|p^2 - dq^2| < K$.

g) Conclure que (*) possède des solutions non triviales.

276. a) Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. On admet que le groupe multiplicatif $\mathbb{F}^\times$ est cyclique.

Soient $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{F}$. On note $\widehat{\mathbb{F}^\times}$ l'ensemble des morphismes de $\mathbb{F}^\times$ dans $\mathbb{C}^*$ prolongés par 0 en 0. On note $N(X^n = u)$ le nombre de zéros du polynôme $X^n - u$ dans $\mathbb{F}$. On note $\widehat{\mathbb{F}^\times}[n]$ l'ensemble des $\chi \in \widehat{\mathbb{F}^\times}$ tels que $\chi^n = 1$. Montrer que $N(X^n = u) = 1 + \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[n], \chi \neq 1} \chi(u)$.

b) On suppose $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \equiv 1 \pmod{3}$ et p impair.

Montrer que $N(X^3 + Y^3 = 1) = p + \sum_{\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[3] \setminus \{1\}} J(\chi_1, \chi_2) = p - 2 + 2\Re J(\omega, \omega)$ si $\omega \in \widehat{\mathbb{F}^\times}[3] \setminus \{1\}$, où $J(\chi_1, \chi_2) = \sum_{a+b=1} \chi_1(a)\chi_2(b)$.

c) On admet que $|J(\omega, \omega)| = \sqrt{p}$ et $pJ(\omega, \omega) = g_\omega^3$ où $g_\omega = \sum_{x \in \mathbb{F}} \omega(x)\zeta_p^x$ avec $\zeta_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

Montrer que $N(X^3 + Y^3 = 1) = p - 2 - a_p$ avec $a_p^2 + 27b_p^2 = 4p$ où $b_p \in \mathbb{Z}$.

277. Pour p premier impair, on note $\chi : \mathbb{F}_p \rightarrow \{1, -1, 0\}$ la fonction définie par $\chi(0) = 0$, $\chi(x) = 1$ pour tout élément x de $\mathbb{F}_p^\times$ qui est un carré, et $\chi(x) = -1$ dans toute autre situation.

Pour $x \in \mathbb{F}_p$, on note $e^{\frac{2i\pi x}{p}}$ la quantité $e^{\frac{2i\pi k}{p}}$, où $k \in \mathbb{Z}$ est un représentant quelconque de x . Pour $t \in \mathbb{N}$, on pose $g_p(t) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(tx)e^{\frac{2i\pi x}{p}}$.

a) Soit p un nombre premier impair, et des entiers a et b tels que $0 < a < b < p$. Montrer que $g_p(1) \sum_{n=a}^{b-1} \chi(n) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(x) \sum_{t=a}^{b-1} e^{\frac{2i\pi tx}{p}}$. On admettra dans la suite que $|g_p(1)| = \sqrt{p}$.

b) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, quels que soient p premier impair, et a, b entiers tels que $0 \leq a < b < p$, on ait $\text{card}\{k \in \llbracket a, b-1 \rrbracket, k \text{ est un carré modulo } p\} = \frac{b-a}{2} + u_{p,a,b}$ où $|u_{p,a,b}| \leq M\sqrt{p} \ln p$.

278. ★★ Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ où n est impair.

a) Montrer que G possède un élément d'ordre 2.

b) Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre n .

Ind. Considérer l'application Φ qui à $g \in G$ associe $\Phi(g) : G \rightarrow G$ telle que, pour tout $x \in G$, $\Phi(g)(x) = gx$.

c) Trouver un contre-exemple si n est pair.

279. Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe G est un p -groupe si, pour tout $g \in G$, l'ordre de g est une puissance de p . Si $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que G est k -divisible si, pour tout $g \in G$, il existe $x \in G$ tel que $x^k = g$.

a) Montrer qu'un p -groupe non trivial et p -divisible est infini.

b) Donner un exemple de tel groupe.

c) Montrer que G est alors k -divisible pour tout k .

280. Soit G un groupe d'ordre $n \geq 1$. Pour $g_1, \dots, g_k \in G$, on note $E(g_1, \dots, g_k) = \{g_{i_1} \cdots g_{i_s} ; s \in \mathbb{N}, 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k\}$ (avec la convention que l'élément neutre est le produit vide donc appartient à cet ensemble).

a) Soient $g_1, \dots, g_k \in G$ tel que $G = E(g_1, \dots, g_k)$. Montrer que $k \geq \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

b) Soit $A \subset G$. Montrer que $\sum_{x \in G} |A \cap Ax| = |A|^2$.

c) Montrer qu'il existe $g_1, \dots, g_k \in G$ tels que $G = E(g_1, \dots, g_k)$ avec $k \leq \lfloor \log_2(2n \ln n) \rfloor$.

281. On note $S(\mathbb{C})$ le groupe des permutations de $\mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe cyclique de $S(\mathbb{C})$ d'ordre 2^n , où $n \geq 2$, contenant la conjugaison complexe.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, il existe $\tau \in G$ tel que $\tau(z) \neq \pm z$.

b) Soit H un sous-groupe de G d'ordre 2^{n-1} . Montrer que H contient au moins deux applications $\mathbb{R}$ -linéaires.

c) Montrer que G contient exactement deux applications $\mathbb{R}$ -linéaires.

282. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$ -algèbre. On suppose que $\mathcal{A}$ est munie d'une norme N vérifiant : $\forall a, b \in \mathcal{A}, N(ab) = N(a)N(b)$.

a) Soit $x \in \mathcal{A}$. En posant $z = z \cdot 1_{\mathcal{A}}$, on identifie $\mathbb{C}$ à une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, N(x - z_0) \leq N(x - z)$. On pose $a = x - z_0$.

b) On suppose que $N(a) = 2$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{U}_n, N(a - z) \geq 2$. Montrer ensuite que $N(a - 1) = 2$ puis $N(a - 5) = 2$.

c) Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, i.e. $\dim \mathcal{A} = 1$.

283. a) Soit f l'application qui à $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$ associe le point d'intersection de $\mathbb{R}$ et de la droite passant par z et i . Montrer que $f(z) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Q}(i)$.

b) Montrer qu'il existe une infinité de triplets non proportionnels $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

284. ★ On appelle nombre de coefficients positifs du polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ le cardinal de l'ensemble $\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i \geq 0\}$.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que P^2 a au moins trois coefficients positifs.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que P^2 ait exactement trois coefficients positifs.

285. ★ Soient $n \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré majoré par n , Δ le pgcd de $P(0), P(1), \dots, P(n)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}, \Delta$ divise $P(k)$.

- 286.** Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$ dont on note $z_0, \dots, z_{n-1}$ les racines. On note $t_1, \dots, t_{n-1}$ les racines complexes de P' et l'on suppose que : $\forall k \in [0, n-1], |z_k| \leq 1$.
- a) Montrer que : $\forall k \in [1, n-1], |t_k| \leq 1$.
- b) On suppose que z_0 est racine simple de P . Calculer $\frac{P''(z_0)}{P'(z_0)}$ de deux façons :
- (i) en fonction de z_0 et des t_k ; (ii) en fonction de z_0 et des z_k .
- c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tel que $|z| \leq 1$. Montrer que $\Re\left(\frac{1}{1+z}\right) \geq \frac{1}{2}$.
- d) On suppose que $z_0 = 1$ et que z_0 est racine simple. Montrer qu'il existe $k \in [1, n-1]$ tel que $|1 - t_k| \leq 1$.
- e) On suppose que $|z_0| = 1$. Montrer qu'il existe $i \in [1, n-1]$ tel que $|z_0 - t_i| \leq 1$.
- f) Soient $Q \in \mathbb{R}[X]$ non constant et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose $P = Q^2 + \alpha^2$. Montrer qu'il existe une racine z de P et une racine t de P' telles que $|z - t| \leq |z|$.

287. ★★ Pour $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \left(\sum_{i=0}^n |a_i|^2\right)^{1/2}$.

- a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\|(X - z)P\| = \|(1 - \bar{z}X)P\|$.
- b) On suppose P unitaire et on note M_P le produit des modules des racines de P de module supérieur ou égal à 1. Montrer que $M_P \leq \|P\|$.
- c) Montrer, pour $1 \leq k \leq n-1$, que $|a_k| \leq \binom{n-1}{k} M_P + \binom{n-1}{k-1}$.

- 288. a)** Soient $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $r = \min\{|z|; z \in \mathbb{C}, P(z) = 0\}$ et on suppose $r > 0$. Si $a_k \neq 0$, montrer que $r^k \leq \binom{n}{k} \frac{|a_0|}{|a_k|}$.
- b) Soit $A_n = \{P \in \mathbb{C}[X]; \deg(P) = n, P(-1) = P(1) = 0\}$. Montrer que $\sup_{P \in A_n} \{\min\{|z|; z \in \mathbb{C}, P'(z) = 0\}\} < +\infty$.

289. Soient $\omega, q \in \mathbb{C}^*$ tels que ω^2 n'est pas une puissance entière de q . On considère l'équation $(*) : \omega f(z) g(qz) = \omega^{-1} f(qz) g(z) + P(z)$, d'inconnue $(P, f, g) \in \mathbb{C}[X]^3$ avec g, P unitaires.

- a) Si (P, f, g) vérifie $(*)$, trouver une relation entre les degrés de P, f et g .
- b) On fixe P . Montrer l'existence de (f, g) tel que (P, f, g) vérifie $(*)$.
- c) On fixe (P, f) . Y a-t-il unicité de g tel que (P, f, g) vérifie $(*)$?

290. Soit $\theta \in \mathbb{C}$ un nombre algébrique, i.e. pour lequel il existe $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(\theta) = 0$.

- a) Montrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de θ est l'ensemble des multiples d'un certain polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, déterminé de manière unique. On écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n = 1$, et on suppose P à coefficients entiers, θ irrationnel et $a_0 \geq 0$.

b) Montrer que $n \geq 2$, $a_0 > 0$, et θ est racine simple de P .

c) On pose $Q = X^n P(1/X)$ et $f : z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que si θ^{-1} est un pôle de f alors $a_0 = 1$ et n est pair.

d) Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ et une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers telle que, pour tout $z \in D_o(0, r)$, on ait f définie en z et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

291. ★ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Si M est inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre non-inversible?
- b) Si M n'est pas inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre inversible?

292. Soient V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, et $a, b \in \mathcal{L}(V)$. Pour $u, v \in \mathcal{L}(V)$, on pose $[u, v] = uv - vu$. On suppose que a est nilpotent et que $[a, [a, b]] = 0$. Montrer que $[a, b]$ et ab sont nilpotents.

293. Soit $V_0, \dots, V_n$ des espaces vectoriels, $(v_0^+, \dots, v_{n-1}^+) \in \mathcal{L}(V_0, V_1) \times \dots \times \mathcal{L}(V_{n-1}, V_n)$ et $(v_1^-, \dots, v_n^-) \in \mathcal{L}(V_1, V_0) \times \dots \times \mathcal{L}(V_n, V_{n-1})$. On suppose que $v_{i-1}^+ \circ v_i^- = -v_{i+1}^- \circ v_i^+$ pour tout $i \in [1, n-1]$, et que $v_{n-1}^+ \circ v_n^- = 0$. Montrer que l'endomorphisme $v_1^- \circ v_0^+$ de V_0 est nilpotent. Déterminer l'indice de nilpotence maximal possible de $v_1^- \circ v_0^+$.

294. Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation associée et, pour tout k , $n_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

- a) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Calculer, pour tout k , $\text{tr}(P_\sigma^k)$ en fonction des $n_r(\sigma)$.
- b) En déduire que deux permutations $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

295. Soient $V = \mathbb{C}^n$ et $T = (\mathbb{C}^*)^n$. Pour tout $v \in V$ et toute partie $H \subset V$, on note $H \cdot v = \{(h_1 v_1, \dots, h_n v_n), h \in H\}$.

- a) Soit $v \in V$. Déterminer la nature topologique de $T \cdot v$. Préciser notamment son adhérence.
- b) Quels sont les sous-espaces $W \subset V$ tels que, pour tout $v \in T$, $W \cdot v = W$?
- c) Dénombrer les familles $(W_i)_{i \in [0, n]}$ de sous-espaces vectoriels satisfaisant la condition de la question précédente et les inclusions strictes $W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \dots \subsetneq W_n$.

296. [MPI] Soient V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et φ un morphisme de groupes de $\mathbb{U}$ dans $\text{GL}(V)$ tel que $\{0\}$ et V soient les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les $\varphi(g)$ pour $g \in \mathbb{U}$.

- a) Montrer que $\dim V = 1$.
- b) On suppose $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(e^{i\theta})$ dérivable en 0. Déterminer φ .

297. ★★ Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que (V, A, B) est une réalisation de M si :

- V est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension d ,
- $A = (a_1, \dots, a_n)$ est une famille libre de formes linéaires sur V ,
- $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une famille libre de vecteurs de V ,
- pour tous i, j , $a_i(b_j) = m_{i,j}$.

On dit que d est la dimension de la réalisation.

a) Montrer que si M est réalisée par un espace de dimension d , elle l'est aussi par un espace de dimension $d' > d$.

b) Trouver une réalisation de la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Trouver la dimension minimale d'une réalisation de M_0 .

298. [MPI] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant à $AB = BA$. Calculer $\exp(A + B)$.

299. Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \chi_B$ et $AM = MB$.

a) Montrer que, pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}((A - MX)^r) = \text{tr}((B - XM)^r)$.

b) En déduire que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A - MX) = \det(B - XM)$.

300. ★ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

301. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $ab - ba = f \circ v$ avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

a) Calculer $\det(ab - ba)$.

b) Montrer que a et b sont cotrigonalisables.

302. [MPI] Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par crochet de Lie : pour $M, N \in \mathcal{A}$, $[M, N] = MN - NM \in \mathcal{A}$.

a) On suppose que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $N \mapsto [M, N]$ induit un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{A}$. Montrer que $\forall M, N \in \mathcal{A}$, $[M, N] = 0$.

b) On suppose que $\dim \mathcal{A} \leq 3$ et que, pour tout $M \in \mathcal{A}$, $N \mapsto [M, N]$ induit un endomorphisme nilpotent de $\mathcal{A}$. On pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ et, pour $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_{j+1} = \{[M, N], (M, N) \in \mathcal{A}_j^2\}$. Montrer que $\mathcal{A}_3 = \{0\}$.

303. Soit E un espace vectoriel de dimension n . Un drapeau de E est une famille de sous-espaces $(F_i)_{i \in [0, n]}$ telle que $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n$.

a) Soit $(F_i)_{i \in [0, n]}$ un drapeau de E . Déterminer $\dim F_k$ pour tout $k \in [0, n]$.

On considère dorénavant deux drapeaux $(F_i)_{i \in [0, n]}$ et $(G_i)_{i \in [0, n]}$.

b) Soient $i \in [1, n]$, $j_0 \in [0, n]$ tels que $F_{i-1} + G_{j_0} = F_i + G_{j_0}$. Montrer que, pour tout $j \geq j_0$, $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$.

c) Soit $i \in [1, n]$. Montrer qu'il existe $j \in [1, n]$ tel que $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$.

d) Montrer que l'application σ qui à i associe $\min\{j \in [1, n], F_{i-1} + G_j = F_i + G_j\}$ est une permutation de $[1, n]$.

e) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\forall i \in [1, n]$, $e_i \in F_i \cap G_{\sigma(i)}$.

f) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique permutation $\tau \in \mathcal{S}_n$ pour laquelle il existe deux matrices U et V triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A = U P_\tau V$

où $P_\tau = (\delta_{i, \tau(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$, et montrer qu'on peut en outre imposer que 1 soit la seule valeur propre de U .

304. On considère un groupe fini G et un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie. Soit ρ un morphisme injectif de G dans $\text{GL}(V)$.

a) Calculer $\text{tr}(\rho(e))$ où e est le neutre de G .

b) Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.

c) Montrer que, si $\text{tr}(\rho(g)) = \text{tr}(\rho(e))$, alors $\rho(g) = \rho(e)$.

d) Soit $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $a_m = \sum_{g \in G} f(g) (\text{tr}(\rho(g)))^m$. Démontrer qu'il

existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m \neq 0$ lorsque $f(e) \neq 0$.

e) Montrer que $\Phi : z \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$ est une fonction rationnelle.

f) On prend $G = \mathfrak{S}_3$ et $\rho : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \text{GL}(V)$.

Montrer qu'il existe une décomposition de V sous la forme $\bigoplus_i E_i$ telle que :

(i) $\forall i, \forall g \in G$, E_i est stable par $\rho(g)$, (ii) $\forall i$, $\dim E_i \in \{1, 2\}$.

305. ★ Soit $d \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $\delta_1, \delta_2 > 0$ avec $\delta_1 \neq \delta_2$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $\forall i \neq j$, $\|x_i - x_j\| \in \{\delta_1, \delta_2\}$.

Montrer que $n \leq \frac{(d+1)(d+5)}{2}$.

Ind. Montrer que les $f_i : y \mapsto (\|y - x_i\|^2 - \delta_1^2)(\|y - x_i\|^2 - \delta_2^2)$ sont linéairement indépendantes.

306. ★ ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) ; M^T M = nI_n\}$.

a) Déterminer H_1, H_2 et H_3 .

b) Soit $n \geq 4$ tel que $H_n \neq \emptyset$. Montrer que 4 divise n .

c) À l'aide de $A \in H_n$, construire une matrice $B \in H_{2n}$.

d) Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod{4}$. Montrer que H_{p+1} n'est pas vide.

307. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire.

Soient $\sigma_u : x \mapsto x - 2\langle x, u \rangle u$ et $\Omega_u = \{x \in \mathbb{R}^3 ; \langle x, u \rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, \sigma_u(x) \rangle \leq 0\}$.

a) Décrire et représenter Ω_u .

b) Montrer que Ω_u est auto-dual, c'est-à-dire que $\Omega_u = \{y \in \mathbb{R}^3 ; \forall x \in \Omega_u, \langle x, y \rangle \geq 0\}$.

c) On dit que $x \in \Omega_u$ est extrémal si : $\forall x_1, x_2 \in \Omega_u, x = x_1 + x_2 \Rightarrow x, x_1, x_2$ colinéaires. Quels sont les points extrémaux de Ω_u ?

d) Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on dit que f est extrémal si $f(\Omega_u) \subset \Omega_u$ et, pour tous $g, h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $f = g + h$, $g(\Omega_u) \subset \Omega_u, h(\Omega_u) \subset \Omega_u$, on a f, g, h colinéaires.

Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang 1.

308. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $r = \text{rg}(v_1, \dots, v_n)$. On cherche à quelle condition il existe une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et un projecteur orthogonal p tels que : $\forall i \in [1, n]$, $p(f_i) = v_i$.

a) Traiter le cas $r = n$.

b) On suppose dans cette question que $n = 2$ et $r = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante dans ce cas.

309. [MPI] Combien y a-t-il de matrices orthogonales de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$?

310. Un produit scalaire hermitien Φ sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E est une application $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que : $\forall y \in E; x \mapsto \Phi(x, y)$ est linéaire ; $\forall (x, y) \in E^2, \Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$; $\forall x \in E \setminus \{0\}, \Phi(x, x) > 0$. On note alors $\|x\| = \sqrt{\Phi(x, x)}$ pour $x \in E$.

a) On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire hermitien tel que $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\{\langle Tx, x \rangle ; x \in \mathbb{C}^2, \|x\|^2 = 1\}$.

b) On munit l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ de carré sommable du produit scalaire défini par : $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$. Soit T l'endomorphisme de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui à $(u_n)_{n \geq 0}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n \geq 0}$. Déterminer $\{\langle Tu, u \rangle ; u \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|u\|^2 = 1\}$.

311. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$ des nombres réels, A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$ et $\chi_B = \prod_{k=1}^n (X - b_k)$. Montrer que $\text{tr}(AB) \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

312. [MPI] On munit l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que $\forall i \in [1, n], \langle u(e_i), e_i \rangle = \lambda_i$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u .

Analyse

313. [MPI] Soit E un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée?

314. [MPI] Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que $A, \overset{\circ}{A}, \overline{A}, \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overline{\overset{\circ}{A}}$ soient toutes distinctes.

315. [MPI] Soit N une norme sur $\mathbb{R}^d$ (où $d \geq 1$).

a) Montrer que la boule unité fermée pour N est fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0.

b) Soit C une partie non vide de E , fermée, bornée, d'intérieur non vide, convexe et symétrique par rapport à 0. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}^d$ dont C est la boule unité fermée.

316. [MPI] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Montrer que si f est continue alors le graphe de f noté Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. La réciproque est-elle vraie?

b) Montrer que si Γ_f est compact alors f est continue.

317. Soient E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes non nuls de E .

a) Trouver des propriétés de base sur A (stabilité ou symétrie).

b) Montrer que, pour tout $a \in A, |a| < 2$.

c) Montrer que $\overline{A} = [-2, -1/2] \cup \{0\} \cup [1/2, 2]$.

318. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

a) Soit $h_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_1(f) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ p \wedge q = 1}} f\left(\frac{p}{q}\right) \frac{1}{q^3}$. Montrer que h_1 est bien

définie et continue.

b) Soient $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et $h_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_2(f) = \sup_{t \in [0, 1]} g(f(t))$.

Déterminer les points de continuité de h_2 .

319. Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$?

320. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer la norme subordonnée de A relative à la norme infinie, puis à la norme 1.

b) Montrer que si $\|A\|_{\text{op}, \infty} \leq 1$ et $\|A\|_{\text{op}, 1} \leq 1$, alors $\|A\|_{\text{op}, 2} \leq 1$.

c) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\inf_{B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})} \|B - A\|_{\text{op}, 2} = \sqrt{\lambda_1}$, où λ_1 est la plus petite valeur propre de AA^T .

321. [MPI] ★★ Soit (u_n) une suite réelle majorée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

Montrer que la suite (u_n) est constante.

322. ★★ On définit la suite (z_n) par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right)$.

a) Lorsque $z_0 \in \mathbb{R}^*$, étudier l'existence de la suite (z_n) et sa convergence.

b) Même question lorsque $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

323. a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ que l'on note a_n .

b) Montrer que $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite ℓ à déterminer. Donner un équivalent de $a_n - \ell$.

324. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante à termes dans $]0, 1[$. Soient $\alpha > 0$ et (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(u_n^\alpha + a_n)$. Montrer qu'il existe un unique $u_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que la suite (u_n) converge vers un réel strictement positif. Déterminer alors cette limite.

325. a) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer l'existence de $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $n = au + bv$.

b) Soit $(s_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que l'ensemble $S = \{s_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est stable par produit.

Montrer que $\frac{s_{n+1}}{s_n} \rightarrow 1$ si et seulement si il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln(s_p)}{\ln(s_q)} \notin \mathbb{Q}$.

326. * Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique.

On définit : $\forall S \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, M_n(f, S) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(S_k)$.

a) Montrer que la suite $(M_n(f, S))$ converge pour toute suite S si et seulement si f est constante.

b) On dit qu'une suite réelle (u_n) est équirépartie modulo 1 lorsque

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ 1-périodique, } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

Montrer que la suite $(\sqrt{n})$ est équirépartie modulo 1.

327. Calculer la somme de la série de terme général $n^2 2^{-(n+1)}$.

328. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ injective. Nature de $\sum \frac{\varphi(n)}{n^2}$?

329. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

330. [MPI] Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$ diverge.

331. a) Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$. On suppose que $\frac{S_n}{nu_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a > 0$. Déterminer la nature de (S_n) . Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n} \sum_{k=0}^n k u_k$.

b) Soient $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $T_n = v_0 + \dots + v_n$. On suppose que $\frac{S_n}{nu_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\frac{T_n}{nv_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner un équivalent de $\frac{1}{u_n v_n} \sum_{k=0}^n u_k v_k$.

332. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(x + yf(x)).$$

333. Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(mn) = f(m) + f(n)$ pour tous $m, n \geq 1$.

a) On suppose f croissante. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = c \ln n$.

b) On suppose que $f(n+1) - f(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = c \ln n$.

334. Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

Si $f \in E$, on pose $\Delta(f) : x \mapsto f(x+1) - f(x)$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme de E . Est-ce un automorphisme ?

b) Soient $f \in E, x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe $x_n \in]x, x+n[$ tel que $\Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x_n)$.

Ind. Étudier $y \mapsto f(x+y)$ et $y \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{y(y-1)\dots(y-k+1)}{k!} \Delta^k(f)(x)$.

335. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) = 2(f(x/2) + f(1-x/2))$.

336. Soient N et d deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On pose $D = [-N, N]^d$ et on note $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

On note $\partial D = \left\{ \sum_{i=1}^d x_i e_i ; (x_1, \dots, x_n) \in D, \exists i \in [1, d], |x_i| = N \right\}$ et $\overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D$.

Pour $i \in [1, d]$ et $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $\forall x \in \overset{\circ}{D}, \Delta_i u(x) = 2u(x) - u(x + e_i) - u(x - e_i)$.

On pose, pour $x \in \overset{\circ}{D}, Mu(x) = \prod_{i=1}^d \Delta_i u(x)$.

a) Construire une fonction $u : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ concave, i.e. vérifiant $\forall i \in [1, d], \Delta_i u \geq 0$, telle que $\forall x \in \overset{\circ}{D}, Mu(x) > 0$ et $u|_{\partial D} = 0$.

Pour $f : \overset{\circ}{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fixée, on note A l'ensemble des $h : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ concaves, nulles sur ∂D et telles que $Mh \geq f$. Soit $u : x \mapsto \inf_{h \in A} h(x)$.

b) Montrer que A est non vide.

c) Montrer que $u \in A$ et que $Mu = f$.

337. Si f est une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on note $V(f)$ la borne supérieure, dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble $\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)| ; n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq 1 \right\}$. On note VB l'ensemble des fonctions f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $V(f) < +\infty$.

a) Montrer que VB est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ contenant les fonctions monotones et les fonctions lipschitziennes.

b) Donner un exemple de fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ n'appartenant pas à VB .

c) Montrer qu'une fonction f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est dans VB si et seulement si elle est différence de deux fonctions croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

d) Soit $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall g \in [0, 1]^{[0,1]}, V(g) < +\infty \implies V(f \circ g) < +\infty$;

(ii) f est lipschitzienne.

338. * * **a)** Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- i) Montrer qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$; déterminer les valeurs possibles de ℓ .
- ii) Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$ et déterminer les limites possibles.
- b) i) Soient f, g convexes et continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\max(f, g) \geq 0$. Montrer qu'il existe α, β positifs et non tous nuls tels que $\alpha f + \beta g \geq 0$.
- ii) Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convexes et continues vérifiant $\max(f_1, \dots, f_n) \geq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ positifs et non tous nuls vérifiant $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \geq 0$.

339. Soient $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer l'équivalence entre :

- (i) f n'est pas polynomiale,
 (ii) Vect $(\{x \mapsto f(\alpha x + \beta) ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\})$ est dense dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

340. Soient F un fermé de $\mathbb{R}$, $O = \mathbb{R} \setminus F$.

- a) Montrer que O est réunion dénombrable d'intervalles ouverts bornés.
 b) Montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

341. On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Pour $f \in E$, soit $T(f) : t \in [0, 1] \mapsto \sup_{[0, t]}(f) - f(t)$. Soit $f \in E$.

- a) Montrer que $T(f)$ est continue, que $T(f) \geq 0$ et que $T(f)(0) = 0$.
 b) Montrer que la suite $(\|T^n(f)\|)_{n \geq 0}$ est décroissante.
 c) Si f est K -lipschitzienne, montrer que $T(f)$ est lipschitzienne.
 d) Soit $f \in E$ lipschitzienne. Montrer que $(T^n f)$ converge uniformément vers la fonction nulle.

342. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [-a, b]$ continue, où a et b sont dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq ab$.

343. Pour $r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $D_n(r) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n \cos(rx) dx$.

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n et Q_n des polynômes à coefficients entiers de degré au plus n tels que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $D_n(r) = \frac{n!}{r^{2n+1}} (P_n(r) \cos(r) + Q_n(r) \sin(r))$.
 b) En déduire que π est irrationnel.

344. ★ Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 bornées par 1. Déterminer $\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f \varphi' ; \varphi \in E \right\}$.

345. Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x} |\sin x|} dx$?

346. ★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et lipschitzienne. Peut-il exister un réel x non nul tel que la série de terme général $f(nx)$ diverge ?

347. [MPI] a) Soit (f_n) une suite de $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction f sur $[0, 1]$. On suppose que, pour toute fonction $g \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $\int_0^1 f'_n g \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Que dire de f ?

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

348. [MPI] Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - (1 - e^{-n})^x) \sim \ln(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

349. Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Soit $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$. Soit m, M deux réels vérifiant : $0 < m < M$ et $m \leq |a| \leq M$. On suppose également que $m > 2$ ou $M < \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ continue et bornée vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) = 1 + \frac{F(qt)}{a(t)}$.

350. [MPI] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence appartient à $]0, +\infty[$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^{n^2}$.

351. Soit $x > 0$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} < e^{-x} < \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} < \arctan x < \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2} < \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2}$.

352. Montrer que, pour tous $r \in]0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\ln |1 - r e^{i\theta}| = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(n\theta)$.

353. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) \geq 0$.

a) On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \leq 0, f(x) = 0$.

b) On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) \leq \frac{x}{n} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?

c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

354. Soit $(L_n)_{n \geq 0}$ définie par $L_0 = L_1 = 1$ et, si $n \geq 1$, $L_{n+1} = (n+1)L_n - \binom{n}{2}L_{n-2}$,

avec $L_{-1} = 0$. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n}{n!} x^n$.

a) Montrer que le rayon de convergence de f est strictement positif.

b) Montrer que $\frac{L_n}{n!} \rightarrow 0$.

c) Déterminer f . Ind. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .

d) En déduire un équivalent de $\frac{L_n}{n!}$.

355. ★★ Une série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est dite primitive lorsqu'elle est à termes entiers et il n'existe pas d'entier $d > 1$ divisant tous les a_n .

a) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries primitives. Montrer que leur produit de Cauchy est une série primitive.

b) Soit $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$, où $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n , telle qu'il existe P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ avec

$P \wedge Q = 1$ et $Q(0) = 1$, tels que, pour z voisin de 0, on ait $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que $(P, Q) \in \mathbb{Q}[X]^2$.

356. ★★ Soit $n \geq 2$. On pose $g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{4k}} \binom{2k}{k}^2$. Soit K_n l'élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} K_n(x) + o(x^n).$$

a) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = g_n$.

b) Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, de somme $f(z)$. On suppose que, pour $|z| < 1$, $|f(z)| \leq 1$. Montrer que $\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq g_n$.

357. [MPI] Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$.

358. [MPI] Soit $r \in]0, \pi[$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_{-r}^r \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt$.

359. Déterminer un équivalent en 1^- de $x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}} dt$.

360. [MPI] Calculer $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt$.

361. Soit $t > 0$. Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose $F_c(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos(px^2) dx$,

$$F_s(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin(px^2) dx \text{ et } Z = F_c + iF_s.$$

a) Montrer que Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer une équation différentielle du premier ordre satisfaite par F .

c) En déduire F_c et F_s .

362. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{xf'(x)}{f(x)} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

a) Soit $m \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $x \mapsto \frac{f(mx)}{f(x)}$ admet une limite en $+\infty$; la calculer.

$$\text{Soit } I : t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx.$$

b) Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Montrer que I admet une limite finie en $+\infty$.

d) Supposons $a < -1$. Déterminer la limite de I en 0^+ .

363. [MPI] a) Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer l'existence et l'égalité des deux quantités $\int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx$ et $\int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy$.

b) Pour $\alpha \in]0, 1[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, on note $\|f\|_\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{1+2\alpha}} dy \right) dx$. Montrer que $\|\cdot\|_\alpha$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), (f, f') \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2\}$.

364. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des éléments de $\mathbb{R}^{+*}$, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f'_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} f_j$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

365. a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2 \leq \frac{\pi^2}{8} \int_0^\pi (f')^2$.

b) Soit $f, q \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $q(x) < \frac{8}{\pi^2}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y \in \mathcal{C}^2([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $y'' + qy = f$, $y(0) = a$, $y(\pi) = b$.

366. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $H(f) : x \mapsto x^2 f(x) - f''(x)$, $A_-(f) : x \mapsto -f'(x) + xf(x)$ et $A_+(f) : x \mapsto f'(x) + xf(x)$.

a) Déterminer $A_- \circ A_+$ et $A_+ \circ A_-$.

b) Montrer qu'il existe une unique $\phi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de carré intégrable, telle que $H(\phi_0) = \phi_0$ et $\phi_0(0) = 1$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi_n = A_n^-(\phi_0)$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(\phi_n) = (2n+1)\phi_n$.

d) Montrer que ϕ_n s'écrit sous la forme $P_n \times \phi_0$ avec P_n polynomiale.

367. a) Soit f une fonction croissante de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f possède un point fixe.

b) On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) x'(t) = \cos(x(t)) + \cos(t)$. On admet que, pour tout $a \in [0, \pi]$, il existe une unique solution ϕ_a définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi_a(0) = a$, et de plus que s'il existe t tel que $\phi_a(t) = \phi_b(t)$ alors $a = b$.

Montrer qu'il existe une unique solution ϕ_a de (E) qui est 2π -périodique.

Ind. Montrer que toute solution ϕ_a est à valeurs dans $[0, \pi]$.

368. ★★ a) Soit x de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $+\infty$. On suppose qu'il existe $\tau > 0$ et $\lambda > 0$ tels qu'on ait $x'(t) + \lambda x(t - \tau) \leq 0$ et $x(t) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que $x(t - \tau) \leq \frac{4}{(\lambda\tau)^2} x(t)$ au voisinage de $+\infty$.

b) Soient x de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, m et n dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ des réels, $\tau_1, \dots, \tau_n$, des réels strictement positifs, $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ des réels positifs.

On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x'(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x'(t - \tau_i) + \sum_{i=1}^m \mu_i x(t - \sigma_i) = 0$.

Démontrer qu'il existe c et K réels tels que, pour t au voisinage de $+\infty$, $|x'(t)| \leq Ke^{ct}$.

369. a) Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et K un réel strictement positif. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq g(t) + K \int_0^t f(u) du$.

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq g(t) + K \int_0^t e^{K(t-u)} g(u) du$.

b) Soient $A, B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des fonctions continues, et $M, N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $M'(t) = A(t)M(t)$, $N'(t) = B(t)N(t)$ et que $M(0) = N(0) = I_n$.

On suppose de plus que $\|A(t)\| \leq K$ et $\|A(t) - B(t)\| \leq \eta$ pour tout $t \in [0, T]$, où K, η, T sont des réels strictement positifs, et $\|\cdot\|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, $\|M(t) - N(t)\| \leq e^{Kt} (e^{\eta t} - 1)$.

370. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique. Soit $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale à valeurs positives.

a) La fonction polynomiale P atteint-elle nécessairement un minimum?

b) On suppose que $P(x, y) \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$. La fonction polynomiale P atteint-elle nécessairement un minimum?

c) On garde l'hypothèse précédente. On note $S(0, 1)$ le cercle unité.

Montrer que : $\forall (x, y) \in S(0, 1), \exists C(x, y) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(tx, ty)}{t^2} = C(x, y)$.

d) Montrer que C est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ ou qu'il n'existe qu'un nombre fini de couples (x, y) tels que $C(x, y) < +\infty$.

371. [MPI] Soient $u_0, u_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$, avec $u(t=0, \cdot) = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t=0, \cdot) = u_1$.

Ind. On utilisera la fonction $U = f \circ u$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convenable.

372. ★★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0, n]$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace de dimension r et $p \in \mathcal{P}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{P}$ en p .

Géométrie

373. Soit P un polynôme réel de degré 6. Une droite D est tangente à la courbe C_P en trois points A, B, C d'abscisses $a < b < c$.

a) On suppose que $AB = BC$. Montrer que les aires délimitées par $[BC]$ et C_P d'une part, et par $[AB]$ et C_P d'autre part, sont égales.

b) On pose : $q = \frac{BC}{AB}$ et $Q = \frac{A_1}{A_2}$ avec A_1 et A_2 les aires susmentionnées. Montrer que : $\frac{2}{7}q^5 \leq Q \leq \frac{7}{2}q^5$.

374. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soient $e_0 = (1, 0)$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-1, 0)$, $e_3 = (0, -1)$ et, pour $k \geq 4$, $e_k = e_{k \bmod 4}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On écrit $P = c_0 X^n - c_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n c_n$. On pose $M_{-1}(P) = (0, 0)$, et pour $k \in [0, n]$, $M_k(P) = M_{k-1}(P) + c_k e_k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit D_k la droite passant par $M_k(P)$ dirigée par e_k . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\Delta_1(\lambda)$ la droite passant par $(0, 0)$ de pente λ , $\Delta_0(\lambda)$ la perpendiculaire à $\Delta_1(\lambda)$ et passant par $(0, 0)$ et, pour $k \geq 2$, $\Delta_k(\lambda) = \Delta_{(k \bmod 2)}(\lambda)$.

On pose $\mu_0 = (0, 0)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, μ_k est l'intersection de D_k et de la parallèle à $\Delta_k(\lambda)$ passant par μ_{k-1} .

a) On suppose dans cette question que $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

i) Déterminer les racines de P .

ii) Pour chaque racine λ de P , construire M_3 et μ_3 .

iii) Que peut-on conjecturer?

b) En notant δ_k la distance algébrique selon e_k de M_k à μ_k , montrer que $M_n = \mu_n$ si et seulement si $P(\lambda) = 0$.

Probabilités

375. Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\| \leq \sqrt{n}$.

376. [MPI] Soit E un ensemble fini. Dénombrer les triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \subset B \subset C$.

377. [MPI] Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de façon d'apparier les entiers de 1 à $2r$?

378. [MPI] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \dots + n_r$ où $r \geq 1$ est arbitraire, et $n_1, \dots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

b) On fixe $r \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les décompositions $n = n_1 + \dots + n_r$ où $n_1, \dots, n_r$ sont des entiers naturels non nuls.

379. [MPI] a) Dénombrer les triplets (A, B, C) de parties deux à deux disjointes de $[1, n]$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les fonctions $f : [0, 2N] \rightarrow [0, 2N]$ telles que $f(0) = f(2N) = 0$ et $\forall k \in [0, 2N - 1], |f(k+1) - f(k)| = 1$.

380. [MPI] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N : \omega \mapsto \text{card}\{n \in \mathbb{N}^*, S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(N) = +\infty$.

b) Exprimer $\mathbf{P}(N \geq 2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N \geq 1)$.

c) Montrer que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$.

381. [MPI] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation de $[1, n]$.

382. On munit S_n de la loi uniforme et on considère X_n la variable aléatoire qui associe à une permutation le nombre d'orbites de cette permutation.

a) Calculer $\mathbf{P}(X_n = 1)$ et $\mathbf{P}(X_n = n)$.

b) Déterminer la fonction génératrice de X_n .

c) En déduire des équivalents de $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

d) Comment peut-on déterminer la loi de X_n ?

383. a) Déterminer le nombre de listes de k entiers non consécutifs dans l'intervalle d'entiers $[1, n]$.

b) On place aléatoirement des couples (A_i, B_i) , où $i \in \{1, \dots, n\}$, autour d'une table ronde à $2n$ places, de sorte qu'aucun des A_i ne soit assis à côté d'un autre A_j . On cherche la probabilité p_n que A_i et B_i ne soient pas à côté. Montrer que, si la configuration des A_i est fixée, la probabilité que A_i et B_i ne soient pas à côté est inchangée. En déduire une expression sommatoire de p_n .

384. Soit s un réel > 1 . On munit $\mathbb{N}^*$ de la probabilité $\mathbf{P}_s$ définie par $\mathbf{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{n^s \zeta(s)}$ pour tout $n \geq 1$. On note par ailleurs $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $p \in \mathcal{P}$ on note X_p la variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $X_p(n) = 1$ si p divise n , et 0 sinon.

a) Montrer que les variables aléatoires X_p sont mutuellement indépendantes.

b) En déduire que $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{(1 - p^{-s})}$.

c) Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ la plus grande puissance de p qui divise n . Déterminer la loi de v_p et étudier l'indépendance mutuelle des variables aléatoires v_p .

385. [MPI] On joue à pile ou face avec probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir pile. On découpe la succession des lancers en séquences maximales de résultats identiques. Déterminer l'espérance de la longueur de la deuxième séquence.

386. [MPI] * Une grille $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2, n)$. À chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point $(2, k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace à droite (resp. gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$; si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à un instant t .

b) Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

387. * a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur les entiers pairs entre 2 et $2n$. Déterminer $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$ et $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2)$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et identiquement distribuées. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_m(n) = |\{(i, j) \in [1, n]^2; |X_i - X_j| \leq m\}|.$$

Montrer que $\mathbf{E}(S_m(n)) = n + n(n-1)\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \leq m)$.

c) Soit $(x_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose : $s_m(n) = |\{(i, j) \in [1, n]^2; |x_i - x_j| \leq m\}|$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_2(n) \leq 3s_1(n)$.

d) En déduire que, si X, Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi, alors $\mathbf{P}(|X - Y| \leq 2) \leq 3\mathbf{P}(|X - Y| \leq 1)$.

388. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1, n]$. On pose : $A_n = (\sqrt{X_n} \text{ admet 1 pour 1er chiffre après la virgule})$ et

$B_n = (\sqrt{X_n} \text{ admet 1 pour 1er chiffre}), C_n = (2^{X_n} \text{ admet 1 pour 1er chiffre}).$

a) Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(A_n))$.

b) Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(B_n))$.

c) Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(\mathbf{P}(C_n))$.

389. On dit qu'une variable aléatoire Y est k -divisible lorsqu'elle a la même loi que la somme de k variables indépendantes et identiquement distribuées.

a) On suppose que $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Pour quels entiers $k > 0$ la variable Y est-elle k -divisible?

b) Construire une variable aléatoire Y non constante infiniment divisible.

c) Soit Y une variable aléatoire bornée infiniment divisible. Montrer que Y est constante presque sûrement.

390. ** Soient $\alpha > 0$ et $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbf{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(B_i = 0) = \frac{1}{i^\alpha}$. Soit $S = \{n \in \mathbb{N}^*, B_n = 1\}$.

a) Donner une condition sur α pour que S soit infini presque sûrement, puis pour que S soit fini presque sûrement.

- b) On suppose $\alpha < 1$. On pose $\beta > 0$ et $N = \max\{n \in \mathbb{N}^*, S \cap [n, n + n^\beta] = \emptyset\}$. Donner des conditions sur β pour que $P(N = +\infty) = 1$ et pour que $P(N = +\infty) = 0$.
- c) Montrer que, presque sûrement, il existe un rationnel γ tel que $\lfloor \gamma^{2^n} \rfloor \notin S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

391. ★★ Soient $N \geq 1$, μ une distribution de probabilité sur $[1, N]$ telle que $\mu(1) > 0$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi μ . On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soit $E = \{S_m, m \in \mathbb{N}\}$.

- a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(n \in E) = \sum_{k=1}^N \mu(k) P(n - k \in E)$.

On pose $F : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n \in E) z^n$ et $G : z \mapsto \sum_{k=1}^N \mu(k) z^k$.

- b) On pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{D}, F(z) = \frac{1}{1 - G(z)}$.

c) Montrer que 1 est un pôle simple de F et tous les autres pôles de F ont un module strictement supérieur à 1.

- d) Montrer que $P(n \in E) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{E(X_1)}$.

École Polytechnique – PSI

Algèbre

- 392.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_0 = 1$ et, pour $1 \leq k \leq n$, $P_k = \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$. Montrer qu'il existe $(s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $X^n = \sum_{k=0}^n s_k P_k$.

393. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.

- a) Quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec tous les projecteurs ?
- b) Quels sont les éléments de $GL(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $GL(E)$?

394. Soient $A_1, \dots, A_m$ des matrices distinctes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, commutant entre elles et telles que : $\forall i \in [1, m], A_i^2 = I_n$. Montrer que $m \leq 2^n$.

395. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune si et seulement s'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AC = CB$.

Analyse

- 396.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq c \prod_{i=1}^n \|v_i\|_\infty$.

- 397.** Déterminer les $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt$.

398. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; \forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, x \mapsto x^k \varphi^{(j)}(x) \text{ est bornée}\}$.

- a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, x \mapsto x^k \varphi^{(j)}(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- b) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que φ possède une primitive appartenant à $\mathcal{S}$.

399. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient U et W deux sous-espaces vectoriels de même dimension m . On suppose qu'il existe un vecteur $u \in U$ tel que $u \in W^\perp$, $u \neq 0$. Montrer qu'il existe $v \neq 0 \in W$ tel que $v \in U^\perp$.

- 400.** Soit $f \in C^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = (n+1) \int_0^{\pi/2} x f(x) \cos(x)^n dx$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n \geq 0}$.

Ind. Utiliser $J_n = (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x)^n dx$.

- 401.** Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{it^2 x} dt$. Montrer que F est définie et qu'elle tend vers 0 en $+\infty$. Ind. Traiter le cas où f est C^1 , le cas où f est nulle sur $\mathbb{R}$ privé de $[-a, a]$.

- 402.** Soit $(E) : y'' + \frac{t}{1+t^3} y = 0$. Montrer que (E) admet une solution non bornée.

403. On considère l'équation différentielle $(E) : y''(t) + \varphi(t)y(t) = 0$, avec φ continue 2π -périodique et on note Sol l'ensemble des solutions de (E) de classe C^2 à valeurs complexes.

a) Montrer qu'il existe $y_1 \in Sol$ telle que $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$, et $y_2 \in Sol$ telle que $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$.

Montrer que toute solution de (E) est combinaison linéaire de y_1 et y_2 .

- b) Pour $y \in Sol$, on note $\Psi(y)$ la fonction $t \mapsto y(t+2\pi)$. Montrer que $\Psi(y) \in Sol$. Déterminer la nature de l'application Ψ .

c) Montrer que, si $z \in Sol$ avec $z \neq 0$ est telle que $\forall t \in \mathbb{R}, z(t+2\pi) = \lambda z(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λ est racine du polynôme $X^2 - (y_1(2\pi) + y_2'(2\pi))X - y_1'(2\pi)y_2(2\pi) + y_1(2\pi)y_2'(2\pi)$. Étudier la réciproque.

- d) Montrer que λ ne peut être nul puis que $\det(\phi) = 1$.

404. Soient $E_{n,d} = \{(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d, i_1 + \dots + i_d = n\}$ et $V_{n,d} = \{f : (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mapsto x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}, (i_1, \dots, i_d) \in E_{n,d}\}$.

- a) Montrer que $V_{n,d}$ forme une famille libre et déterminer son cardinal.

- b) Soit $\Delta : f \in \text{Vect}(V_{n,d}) \mapsto \Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}$. Déterminer $\text{Ker } \Delta$.

Géométrie