1. Espaces vectoriels normés

1 Mines-Ponts 2024

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Comparer les normes N et $\|\cdot\|_\infty$.

Solution de 1 : Mines-Ponts 2024

1. Norme associée au produit scalaire $\langle P, Q\rangle = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\|\cdot\|_\infty \leqslant 2N$ avec $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et Cauchy-Schwarz.

   Par contre, N n'est pas dominée par $\|\cdot\|_\infty$ avec $f : x \mapsto \sin(n\pi x)$.

2 Mines-Ponts 2022 (Greg) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Montrer que
$$N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|$$
est une norme.
2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $(F_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ et deux normes telles que F_n converge vers P pour l'une et Q pour l'autre.

Solution de 2 : Mines-Ponts 2022 (Greg)

1. Classique
2. On pose

$$\begin{aligned} f : [0,3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} P(x) & \text{si } x \leqslant 1 \\ P(1) + (x-1)(Q(2)-Q(1)) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ Q(x) & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases} \end{aligned}$$

   f est continue sur $[0,1]$ et $[2,3]$ et par continuité de P et Q, f est continue en 1 et en 2.

   f est donc continue sur le segment $[0,3]$ et par théorème de Weierstrass, on a (F_n) tel que $F_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur $[0,3]$. Donc
$$\forall x \in [0,1],\ |F_n(x) - f(x)| \leqslant \|F_n - f\|_\infty \to 0$$
   et $F_n \xrightarrow{N_1} P$ avec
$$N_1 : P \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$$
   De même pour Q sur $[2,3]$.

3 Mines-Ponts 2024

Soit f une forme linéaire continue non nulle sur un espace normé E. Soit x_0 tel que $f(x_0)\neq 0$.

1. Montrer que $|||f||| = \dfrac{|f(x_0)|}{\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} f)}$
2. Montrer que $\exists a \in E\setminus\{0\},\ |||f||| = \dfrac{\left|f(a)\right|}{\|a\|} \iff \exists b \in \operatorname{Ker} f,\ \|x_0 - b\| = \mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} f)$

Solution de 3 : Mines-Ponts 2024

1. $E = \operatorname{Ker} f \oplus \mathbb{K}x_0$, donc, si $x \neq 0_E$, $x = x_K + \lambda x_0$ et, si $\lambda \neq 0$, $\dfrac{\left|f(x)\right|}{\|x\|} = \dfrac{\left|f(x_0)\right|}{\left\|x_0 + \frac{1}{\lambda}x_K\right\|}$ ce qui permet de conclure facilement.
2. Pour le sens réciproque, si $\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} f) = \|x_0 - b\|$, alors $|||f||| = \dfrac{\left|f(x_0)\right|}{\|x_0 - b\|} = \dfrac{\left|f(x_0 - b)\right|}{\|x_0 - b\|}$ et il suffit de poser $a = (x_0 - b)$.
   Pour le sens direct, si $|||f||| = \dfrac{\left|f(a)\right|}{\|a\|}$, et $\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} f) = \dfrac{\left|f(x_0)\right|}{|||f|||} = \dfrac{\left|f(x_0)\right|}{f(a)}\|a\|$.
   Or $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Vect} x_0$ sont supplémentaires, donc on peut écrire $a = a_K + \lambda x_0$ avec $a_K \in \operatorname{Ker} f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, donc $f(a) = \lambda f(x_0)$.
   Donc $\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} f) = \left|\dfrac{1}{\lambda}\right| \|a_K + \lambda x_0\| = \|x_0 - b\|$ avec $b = -\dfrac{1}{\lambda}a_K \in \operatorname{Ker} f$.

4 Mines-Ponts 2024

1. Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Existe-t-il une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout couple (A, B) de matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $N(AB) = N(BA)$?

Solution de 4 : Mines-Ponts 2024

1. Classique
2. Si A est inversible, AB et BA sont semblables.
   On en déduit que $N\left(AB^2A\right) = N\left(BA^2B\right)$.
   Par densité et continuité de la norme, c'est encore vrai pour A quelconque.
   On obtient une contradiction avec $A^2 = 0_2$ et $AB^2A \neq 0_2$.
   Il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = I + A^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en dimension 2 et de compléter avec des 0 en dimension quelconque.

5 Mines-Ponts 2024

Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Solution de 5 : Mines-Ponts 2024

Un tel sous groupe ne contient pas de z de module > 1 car borné ni de z de module < 1 car fermé et ne contient pas 0.

Il s'agit donc d'un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Or, l'exponentielle imaginaire pure est un morphisme continu

$$f : \left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{U}, \times) \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \end{array}\right.$$

Donc, si K est un tel sous-groupe, $f^{-1}(K)$ est soit dense dans $(\mathbb{R}, +)$, soit discret (à savoir redémontrer).

- Dans le premier cas, comme $f^{-1}(K)$ est fermé, on en déduit que $f^{-1}(K)=\mathbb{R}$, et donc que $\boxed{K=\mathbb{U}.}$
- Dans le deuxième cas, on a $a\in\mathbb{R}^+$ tel que $f^{-1}(K)=a\mathbb{Z}$.
  Alors $K=\langle e^{ia}\rangle$. Ce groupe est fini si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $e^{ika}=1$ si et seulement si $a\in 2\pi\mathbb{Q}$.
  - Dans ce cas, classiquement, $\boxed{K=\mathbb{U}_n}$ où $n=|K|$ car $\forall z\in K,\ \ z^n=1$ et $|K|=|\mathbb{U}_n|$.
  - Supposons maintenant que $a\notin 2\pi\mathbb{Q}$. On a alors $f^{-1}(K)=a\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}\neq a\mathbb{Z}$.
    En effet, sinon, on aurait un entier p, nécessairement différent de 1, tel que $a+2\pi=ap$, donc
    $$a=\frac{2\pi}{p-1}\in 2\pi\mathbb{Q},$$
    ce qui est contradictoire.
    Ce cas ne se présente donc pas.

La synthèse était immédiate, $\boxed{\text{les sous-groupes compacts de } (\mathbb{C}^*,\times) \text{ donc les } \mathbb{U}_n \text{ et } \mathbb{U}.}$

---

6 X 2024

1. Soit E un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie A de E à la fois ouverte et fermée ?
2. Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$ soient toutes distinctes.

Solution de 6 : X 2024

1. On montre que $\mathbb{1}_A$ est continue car si $x\in A$ ouvert, au voisinage de x, $\mathbb{1}_A$ est nulle, et si $x\in\overline{A}$ ouvert, au voisinage de x, $\mathbb{1}_A$ est constante 1.
   Donc $\mathbb{1}_A(E)$ est connexe par arcs, donc $\mathbb{1}_A$ est constante sur E donc $\boxed{A\in\{\varnothing,E\}}$: E est connexe.
2. $\boxed{A=]0,1[\cup\big(\mathbb{Q}\cap]1,2[\big)}$ convient.

---

2. Suites et séries numériques

7 Mines-Ponts 2024

Soit (u_n) une suite de réels non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Étudier la nature de $\sum u_n$.

Solution de 7 : Mines-Ponts 2024

Raabe Duhamel : poser $v_n = \ln\left(n^{\lambda u_n}\right)$ et vérifier que la suite (v_n) converge en passant par la série télescopique.

On trouve $u_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^K}{n^\lambda}$ ce qui permet de conclure.

---

8 Mines-Ponts 2024

1. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{t\in[n,n+1]} \left|f'(t)\right|.$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$?

Solution de 8 : Mines-Ponts 2024

1. ITL entre n et $n+1$ à l'ordre 2 appliquée à $F(x) = \displaystyle\int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On en déduit que $\dfrac{\sin(\ln n)}{n} = \cos(\ln(n+1)) - \cos(\ln(n)) + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$: la série diverge car $(\cos(\ln n))_n$ diverge (raisonner par l'absurde et faire de la trigonométrie, par exemple en considérant $\cos(\ln(2n))$)...)

---

9 Mines-Ponts 2023

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.
2. Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Solution de 9 : Mines-Ponts 2023

1. On pressent que $u_n \to +\infty$. On va donc essayer de minorer u_n en utilisant l'inégalité de convexité $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ valable pour $x \in \mathbb{R}$. Or, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\mathrm{e}^{k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left(1 + k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = H_n + n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

2. La majoration précédente laisse présager l'éventualité que $u_n \sim H_n \sim \ln n$. Considérons

$$0 \leqslant H_n - u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\int_0^{\frac{1}{n}} k(1-x)^{k-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{1}{n}} 1\,\mathrm{d}x = 1.$$

On en déduit que $H_n - u_n = \mathrm{o}(H_n)$ donc $\boxed{u_n \sim H_n \sim \ln n.}$

---

3. Suites et séries de fonctions

10 Mines-Ponts 2024

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Solution de 10 : Mines-Ponts 2024

1. Pas de difficulté.
2. Première solution : montrer que $\frac{f(2^{-p})}{2^{-p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.

   Comme $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$, elle y admet une borne inférieure notée α.

   Alors $\frac{f(2^{-p})}{2^{-p}} = \sum_{n=0}^{p} \frac{\sin(2^{n-p}x)}{2^{n-p}} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n-p}x)}{2^{n-p}} \geqslant (p+1)\alpha - \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-p}} = (p+1)\alpha - 1 \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.

   Deuxième solution : remarquer que $\frac{f(2x)}{2} = f(x) - \sin x$ et en déduire que s'il y a dérivabilité en 0, $f'(0) = f'(0) - 1$.

---

11 Mines-Ponts On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

1. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de S.
2. Donner un équivalent de S en 0 et en 1^-.

Solution de 11 : Mines-Ponts

Source : dDmaths

1. Pour $|x| \geqslant 1$, la série est grossièrement divergente.

   Pour $|x| < 1$,

   $$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

   et la série est absolument convergente.

   $\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie sur }]-1,1[.}$

   Posons $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$. Appliquons le théorème de continuité des séries de fonctions.

   H1 La série $\sum u_n$ converge simplement.

   H2 Les fonctions u_n sont continues.

   H3 Pour tout $a \in [0,1[$, $\|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant a^n$, ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n$ sur tout segment de $]-1,1[$.

   Par théorème, $\boxed{\text{la fonction } S \text{ est continue.}}$

2. On a déjà $\boxed{S(x) \underset{x\to 0}{\sim} S(0) = \frac{1}{2}.}$

   Pour $x \in [0,1[$,

   $$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)} \right).$$

Puisque $\sum_{p\geqslant 0}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes en vertu du théorème de Fubini et affirmer

$$S(x)=\frac{1}{2}+\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

On a alors

$$(1-x)S(x)=\frac{1-x}{2}+\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p u_p(x)$$

avec

$$u_p(x)=x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$$

pour $x\in[0,1[$.

La fonction u_p est continue sur $[0,1[$ et se prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1)=\dfrac{1}{p+1}$.

Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum(-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left|\sum_{k=p+1}^{\infty}(-1)^k u_k(x)\right|\leqslant u_{p+1}(x)$$

Une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x)\leqslant\dfrac{1}{p+2}$.

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et donc sa somme est continue en 1.

Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x)\xrightarrow[x\to1^-]{}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p+1}=\ln(2)$$

et, finalement,

$$\boxed{S(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{\ln(2)}{1-x}.}$$

12 X–ENS

1. Quelle est la limite simple de (f_n) où $f_n : z\in\mathbb{C}\mapsto\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$?
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1,n]\!]$. Montrer que

$$1-\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{n}$$

3. En déduire que (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Solution de 12 : X–ENS

FGN 5 2.35

1. Théorème de la double limite appliqué à $g_k : x\mapsto\dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)z^k}{k!x^k}\mathbb{1}_{[k,+\infty[}(x)$: convergence simple vers $\exp$.
2. Récurrence sur k.
3. Séparer dans $\left|f_n(z)-\exp z\right|$ les termes d'indices $\leqslant n$ et $>n$ et utiliser la question précédente.

4. Algèbre linéaire, Réduction

13 Mines-Ponts 2022 (Théo) avec 15 minutes de préparation

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que f est nilpotente.
2. On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E telle que $\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

Solution de 13 : Mines-Ponts 2022 (Théo) avec 15 minutes de préparation

1. On montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \dfrac{1}{k}\left(f^k \circ g - g \circ f^k\right)$ puis valeurs propres de $\varphi : u \mapsto u \circ g - g \circ u$.

14 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de dimension n et $\mathscr{F} = \left(f_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de formes linéaires. Montrer que $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \ \exists x_0 \in E, \ \left(f_1(x_0), \ldots, f_p(x_0)\right) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

Solution de 14 : Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

L'application $u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \left(f_1(x), \ldots, f_p(x)\right) \end{array} \right.$ est représentée matriciellement par une matrice de format $p \times n$ dont les lignes représentent chacune des f_i.

Alors u est surjective. si et seulement si ces lignes sont libres si et seulement si $\mathrm{rg}\, u = p$ si et seulement si u est surjective.

15 Mines-Ponts 2017

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples.

1. Montrer que si $A = B^2$, alors B est diagonalisable.
2. Montrer que si $AB = BA$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Solution de 15 : Mines-Ponts 2017

1. $\chi_A\left(X^2\right)$ est un polynôme annulateur simplement scindé de B.
2. On a diagonalise $A = QDQ^{-1}$ et on pose $B' = Q^{-1}BQ$.
   Alors $DB' = B'D$ et comme les cœfficients de D sont deux à deux distincts, B' est diagonale.
   Or $B = P(A)$ si et seulement si $B' = P(D)$. On conclut par interpolation de Lagrange.

16 Mines-Ponts 2024

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses éléments propres.
2. Déterminer les éléments propres de A.

Solution de 16 : Mines-Ponts 2024

1. Matrice circulante, cas particulier de matrice compagne ultra classique : $\chi_J = X^n - 1$. Si $\omega \in \mathbb{U}_n$, $E_\omega(J) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$.
2. $A = \dfrac{J + J^\intercal}{2}$ est (ortho-)diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car symétrique réelle.
   Mais pour la diagonaliser, il vaut mieux remarquer que $A = \dfrac{J + J^{n-1}}{2}$ car J et J^{n-1} commutent donc sont codiagonalisables.
   Les valeurs propres sont les $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2ik(n-1)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\frac{2ik\pi}{n}} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}$ (qui est bien réel) pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, et les sous-espaces propres sont les mêmes que pour J.

17 Centrale 2024

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Donner et démontrer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
   En déduire que $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\, A$, $\dfrac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \mathrm{tr}\big((xI_n - A)^{-1}\big)$.
2. Pour tous $j \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose $B_j = \sum_{i=0}^{j} a_i A^{j-i}$ puis $Q(x) = \sum_{j=1}^{n} x^{n-j} B_{j-1}$.
   Montrer que $Q(x)(xI_n - A) = \chi_A(x) I_n$ et $\mathrm{tr}\, Q(x) = \chi_A'(x)$.
3. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $S_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k$. Montrer que $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\sum_{i=0}^{j} a_i S_{j-i} = (n-j) a_j$.

Solution de 17 : Centrale 2024

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Pas de difficulté en trigonalisant $xI_n - A$.
2. Remplacer dans le membre de gauche et faire apparaître un télescopage après inversion des Σ.
3. Trigonaliser et utiliser la question précédente.

18 ENS Saclay - Rennes 2024 – Autour du Pfaffien

Pour toute $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{Pf}\, A = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.

1. Montrer que pour toute $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $(\mathrm{Pf}\, A)^2 = \det A$.
2. On admet que $\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})$ (matrices de déterminant > 0) est connexe par arcs.
   Montrer que pour toute $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ et toute $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$,
   $$\mathrm{Pf}(BAB^\intercal) = \det B\, \mathrm{Pf}\, A.$$
   Indication : Pour le cas $\det B < 0$, considérer la matrice $D = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
3. Soit $R \in \mathcal{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^\intercal$. Montrer l'équivalence entre
   (i) R n'a pas de valeur propre réelle ;
   (ii) $\mathrm{Pf}\, A \neq 0$;

(iii) A est inversible.

4. Soit $R_1, R_2 \in \mathscr{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^\intercal - R_1$ et $A_2 = R_2^\intercal - R_2$. On suppose que $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\operatorname{Pf} A_1 = \operatorname{Pf} A_2 \neq 0$.
Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = P R_2 P^\intercal$.

Solution de 18 : ENS Saclay - Rennes 2024 – Autour du Pfaffien

Source : RMS 2024 37

1. Raisonner par blocs 2×2 et séparer les cas $a_{1,2}$ nul ou non.
2. Séparer les cas où A et B sont toutes les deux inversibles ou non.
Montrer que $\varphi : B \mapsto \operatorname{Pf}(BAB^\intercal)(\det B \operatorname{Pf} A)^{-1}$ est constante sur $\mathscr{GL}_4^+(\mathbb{R})$ puis sur $D\mathscr{GL}_4^+(\mathbb{R})$ et enfin sur $\mathscr{GL}_4(\mathbb{R})$ en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.
3. L'équivalence entre les conditions (ii) et (iii) découle immédiatement de la question 1.
Ensuite
$$A = R - R^T = R - R^{-1} = \left(R^2 - I_n\right) R^{-1} = (R - I_n)(R + I_n) R^{-1}$$
donc $\det(A) = \det(R - I_n)\det(R + I_n)$.
Ainsi A est non inversible si et seulement si R possède une valeur propre dans $\{1, -1\}$.
D'après le cours, puisque R est orthogonale ses seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1 .
Ainsi, non (i) est équivalente à non (iii), si bien que (i) est équivalente à (iii).
On conclut que les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.
4. Utiliser le théorème de réduction des isométries.

19 ENS Lyon 2024

Déterminer les matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M est semblable à $2M$.

Solution de 19 : ENS Lyon 2024

Source : RMS 2024 49

Montrons que ce sont exactement les matrices nilpotentes.

- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M soit semblable à $2M$.
Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de M, alors 2λ est valeur propre de M puis, par récurrence, $2^k\lambda$ est valeur propre de M pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si λ était non nul, M aurait une infinité de valeurs propres ce qui est contradictoire. Donc $\lambda = 0$ et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, M est nilpotente.
- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
  - Montrons d'abord qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = AM - MA$.
  Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit T_A l'application linéaire définie par $T_A : X \mapsto AX - XA$. On veut donc montrer que $M \in \operatorname{Im} T_M$. L'adjointe de T_A est donnée par l'égalité $T_A^*(X) = A^T X - XA^T$. En effet,
  $$\begin{aligned}\langle X, T_A(Y)\rangle &= \operatorname{tr} X^T AY - \operatorname{tr} X^T YA = \operatorname{tr} X^T AY - \operatorname{tr} AX^T Y \\ &= \operatorname{tr}\left(X^T A - AX^T\right) Y = \operatorname{tr}\left(A^T X - XA^T\right)^T Y = \left\langle A^T X - XA^T, Y\right\rangle\end{aligned}$$
  Comme $\operatorname{Im} T_M = \left(\operatorname{Ker} T_M^*\right)^\perp$, montrons donc que $M \in \left(\operatorname{Ker} T_M^*\right)^\perp$. Si $X \in \operatorname{Ker} T_M^*$, alors X commute avec M^T, et donc $M^T X$ est une matrice nilpotente (car M^T l'est). Par suite, $\operatorname{tr} M^T X = 0$. Cela permet de conclure.
  - Soit A telle que $M = AM - MA$, ce qui entraîne que, pour tout $\alpha, \alpha M = \alpha AM - \alpha MA$ puis que
  $$\alpha AM = M(\alpha I_n + \alpha A).$$
  On en déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
  $$(\alpha A)^k M = M(\alpha A + \alpha I_n)^k$$
  puis, pour tout polynôme P, que
  $$P(\alpha A)M = MP(\alpha A + \alpha I_n).$$
  En appliquant ceci aux sommes partielles de l'exponentielle et en passant à la limite, on obtient que
  $$e^{\alpha A} M = e^{\alpha} M e^{\alpha A}$$
  En prenant $\alpha = \ln 2$, on obtient la matrice inversible $Q = e^{\alpha A}$ telle que $QMQ^{-1} = 2M$.

Remarque : une solution alternative consiste à utiliser la décomposition de Jordan (hors programme... Voir X-ENS Maths A 2025 !)

5. Probabilités

20 Mines-Ponts 2022 (Théo) sans préparation

On choisit au hasard $A, B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer

$$\mathbb{P}(A \subset B \text{ ou } B \subset A).$$

Solution de 20 : Mines-Ponts 2022 (Théo) sans préparation

$\mathbb{P}(A \subset B \text{ ou } B \subset A) = 2\mathbb{P}(A \subset B) - \mathbb{P}(A = B)$, avec $\mathbb{P}(A = B) = \dfrac{1}{2^n}$ et

$$\mathbb{P}(A \subset B) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(B \in \mathscr{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)\big)\mathbb{P}\big(A \in \mathscr{P}(B)\big) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

On peut aussi remarquer que pour chaque entier entre 1 et n, il y a exactement 3 possibilités : il est soit dans A, soit dans $B \setminus A$, soit hors de B, ce qui donne 3^n possibilité pour un couples (A, B) tel que $A \subset B$.

21 Mines-Ponts 2023

On tire au hasard un élément A de $\mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Calculer la probabilité que $|A|$ soit un entier pair.

Solution de 21 : Mines-Ponts 2023

$\dfrac{1}{2}$: il suffit d'exhiber une bijection entre l'ensemble des parties de cardinal pair et celui des parties de cardinal impair :

$$A \mapsto \begin{cases} A \cup \{1\} & \text{si } 1 \notin A \\ A \setminus \{1\} & \text{si } 1 \in A \end{cases}$$

22 Mines-Ponts 2023 (posé aussi à CCINP...)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & \dots & X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^{\intercal} U$.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires $\operatorname{tr} M$ et $\operatorname{rg} M$.
2. Calculer la probabilité que M soit une matrice de projection.

23 Un résultat classique : Théorème de Beppo Levi (ou de convergence monotone)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes réelles positives et X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles positives, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

1. En considérant $Y = \lceil X \rceil$, montrer que $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
2. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))$ tend vers 0 en décroissant et $\mathbb{E}(X_0) < +\infty$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$
3. On suppose maintenant que pour tout $\omega \in \Omega$, la série $\sum X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

Solution de 23 : Un résultat classique : Théorème de Beppo Levi (ou de convergence monotone)

1.
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > k) = \mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}(X).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$: on fixe N tel que $\sum_{k=N}^{+\infty} \mathbb{P}(X_0 > k) \leqslant \varepsilon$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant \mathbb{E}(X_n) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X_n > k) + \sum_{k=N}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n > k).$$

   La première somme tend vers 0 par continuité décroissante, N étant fixé.

   La deuxième est majorée par $\sum_{k=N}^{+\infty} \mathbb{P}(X_0 > k) \leqslant \varepsilon$.

3. La suite $(X - X_0 - \cdots - X_n)$ relève de la question précédente.

24 **ENS L 2024** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1, \dots, v_n \in E$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|v_i\| \leqslant 1$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [-1, 1]$ et $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v - w\| \leqslant \sqrt{n}$.

Indication : non, non, cet exercice est bien au bon endroit.

Solution de 24 : ENS L 2024

On pose $X_1, \dots, X_n$ des vaiid de loi de Rademacher avec $\mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{\alpha_i + 1}{2}$, et $V = \sum_{i=1}^{n} X_i v_i$.

On calcule $\mathbb{E}\left(\|V - w\|^2\right) = n - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leqslant n$.

La variable aléatoire $\|V - w\|^2$ ne peut prendre uniquement des valeurs $> n$, sans quoi son espérance serait $> n$. D'où le résultat.

25 **X 2024** Une grille $\{1, 2, 3\} \times [\![1, n]\!]$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2, n)$. À chaque instant, si elle se trouve au milieu (ie en un point $(2, k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ ou se déplace à droite (respectivement à gauche) avec probabilité $\dfrac{1}{4}$. Si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\dfrac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à l'instant t.
2. Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

Solution de 25 : X 2024

1. On remarque que dans tous les cas, la goutte descend avec probabilité $\dfrac{1}{2}$.

   Soit D_i la variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ permettant de savoir si, à l'étape i, la goutte est descendue.

   Alors l'ordonnée de la goutte à l'instant t et $X = n - \sum_{k=1}^{t} B_k$.

   L'événement A_t « La goutte sort à l'instant $t \geqslant n$ » est donc l'événement

$$A_t = \left(\sum_{k=1}^{t} B_k = n, \sum_{k=1}^{t-1} B_k = n - 1\right) = \left(B_t = 1, \sum_{k=1}^{t-1} B_k = n - 1\right).$$

   Comme les B_k sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, $\sum_{k=1}^{t-1} B_k \sim \mathscr{B}\left(t - 1, \dfrac{1}{2}\right)$.

   Avec l'indépendance des B_k et le lemme des coalitions, on obtient

$$\mathbb{P}(A_t) = \mathbb{P}(B_t = 1)\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{t-1} B_k = n - 1\right) = \frac{1}{2} \times \binom{t-1}{n-1} \frac{1}{2^{t-1}} = \boxed{\binom{t-1}{n-1} \frac{1}{2^t}}$$

   (qui est nul si $t < n$, donc l'expression reste valable dans tous les cas.)

2. Notons $Y=\min\left\{t\geqslant n,\ \sum_{k=1}^{t}B_k=n\right\}$ la variable aléatoire du temps d'attente de la sortie de la goutte dont on veut calculer l'espérance. Sa fonction génératrice est

$$G_Y(x)=\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n}^{+\infty}(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

En dérivant $n-1$ fois la série géométrique (de rayon de convergence 1), on obtient

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}=\sum_{k=n-1}^{+\infty}k(k-1)\cdots(k-n+2)x^{k-n+1}=\sum_{k=n}^{+\infty}(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n}$$

D'où on tire

$$G_Y(x)=\left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)^n=\left(\frac{x}{2-x}\right)^n=\left(\frac{2}{2-x}-1\right)^n$$

dérivable en 1 , donc $\boxed{\mathbb{E}(Y)=G_Y'(1)=2n.}$

26 ENS PLSR 2024

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
Si N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $X_{N+n}(\omega)=X_{N(\omega)+n}(\omega)$.

1. Existe-t-il N tel que $\mathbb{P}(X_N=1)=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_{N+n}=1)=\dfrac{1}{2}$?
2. Existe-t-il N tel que $\mathbb{P}(X_N=1)=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{P}(X_{N+n}=1)=\dfrac{1}{2}$?

Solution de 26 : ENS PLSR 2024

Source : RMS

1. Un temps d'arrêt géométrique convient : on pose $N=\min\{k\geqslant 1, X_k=1\}$, en décidant que $N=0$ dans le cas (de probabilité nulle) où l'ensemble est vide. Alors, pour tout k et $n>0$, l'événement

$$\{X_{k+n}=1\}\text{ est indépendant de }\{N=k\}=\{X_1=\cdots=X_{k-1}=-1,X_k=1\}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{N+n}=1)&=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X_{k+n}=1,\ N=k)\mathbb{P}(N=k)\\&=\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X_{k+n}=1)\mathbb{P}(N=k)=\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(N=k)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. La réponse est positive. Notons (M_n) la marche aléatoire telle que $M_0=X_0$ et $M_n=X_n+M_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
Soit $T=\min\{n\in\mathbb{N}^*,\ M_n=0\}$.
Il est classique que $T<\infty$ presque sûrement.
Sur l'intervalle $[\![1;T-1]\!]$, M_n reste strictement d'un côté de l'origine. Soit $Y_n=X_{T-n}$.
Montrons que c'est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme.
Pour tout $t\in\mathbb{N}^*$, notons E_t l'ensemble des $(\alpha_0,\dots,\alpha_t)\in\{-1,1\}^{t+1}$ tels que

$$t=\min\{s\geqslant 1,\ \alpha_0+\cdots+\alpha_s=0\}$$

Pour tout $I\subset\mathbb{Z}$ fini, notons $I_t=I\cap[\![0;t]\!]$ et $I_t'=I\backslash I_t$. Pour toute fonction $\varepsilon:I\to\{-1,1\}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i=\varepsilon_i)\right)=\frac{1}{2^{|I_t'|}}\sum_{t\in\mathbb{N}^*}2^{-(t+1)}\left|\{(\alpha_0,\dots,\alpha_t)\in E_t,\ \forall i\in I_t,\ \alpha_i=\varepsilon_i\}\right|$$

Comme $(\alpha_0,\dots,\alpha_t)\mapsto(\alpha_t,\dots,\alpha_0)$ est une bijection de E_t sur lui-même, on en déduit que

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i=\varepsilon_i)\right)=\frac{1}{2^{|I_t'|}}\sum_{t\in\mathbb{N}^*}2^{-(t+1)}\left|\{(\alpha_0,\dots,\alpha_t)\in E_t,\ \forall i\in\sigma_t(I_t)\ \alpha_i=\varepsilon_{t-i}\}\right|$$

où σ_t est la fonction $i \mapsto t-i$. Le membre de droite est égal à $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(Y_i=\varepsilon_i)\right)$, par conséquent on a bien

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}(Y_i=\varepsilon_i)\right)=2^{-|I|}$$

Posons maintenant $N=T$ si $X_0=-1$ (ce qui est équivalent à $Y_0=1$) et $N=0$ si $X_0=1$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, on a $X_{N+n}=X_n$ si $X_0=1$ et $X_{N+n}=Y_{-n}$ si $Y_0=1$. On a

$$\mathbb{P}(X_{N+n}=1)=\mathbb{P}((X_0=1)\cap(X_n=1))+\mathbb{P}((Y_0=1)\cap(Y_{-n}=1))=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

car X_0 et X_n (resp. Y_0 et Y_{-n}) sont indépendantes.

6. Algèbre bilinéaire

27 Centrale

Soient $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique défini positif de $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. On pose

$$\langle x,y\rangle_u=\left\langle u^{-1}(x),y\right\rangle \quad \text{pour tous } x,y\in E.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_u$ est un produit scalaire.

Soit v un endomorphisme autoadjoint de $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

2. Montrer que $u\circ v$ est diagonalisable.

Si w est un endomorphisme diagonalisable de E, on note $\lambda_{\min}(w)$ (resp. $\lambda_{\max}(w)$) sa plus petite (resp. grande) valeur propre.

3. Montrer que l'image de $E\backslash\{0\}$ par
$$x\mapsto\frac{\langle v(x),x\rangle}{\langle u^{-1}(x),x\rangle}$$
n'est autre que le segment d'extrémités $\lambda_{\min}(u\circ v)$ et $\lambda_{\max}(u\circ v)$.
4. Montrer que
$$\lambda_{\min}(u)\lambda_{\min}(v)\leqslant\lambda_{\min}(u\circ v)\leqslant\lambda_{\max}(u\circ v)\leqslant\lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

Solution de 27 : Centrale

Source : dDmaths

1. $u\in\mathscr{S}_n^{+*}(E)$ donc $u^{-1}\in\mathscr{S}_n^{+*}(E)$ et par suite $\langle\cdot,\cdot\rangle_u$ est un produit scalaire sur E.
2. On a
$$\langle x,u(v(y))\rangle_u=\left\langle u^{-1}x,u(v(y))\right\rangle=\langle x,v(y)\rangle=\langle v(x),y\rangle=\langle u(v(x)),y\rangle_u$$
L'endomorphisme $u\circ v$ est autoadjoint dans $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_u)$ donc diagonalisable.
3. On a
$$\frac{\langle v(x),x\rangle}{\langle u^{-1}(x),x\rangle}=\frac{\langle u(v(x)),x\rangle_u}{\|x\|_u^2}$$
En introduisant une base orthonormée $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle_u)$ formée de vecteurs propres de $u\circ v$, on peut écrire pour $x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$,
$$\frac{\langle u\circ v(x),x\rangle_u}{\|x\|_u^2}=\frac{\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2}{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$
en notant $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de $u\circ v$. Il est clair que cette quantité est comprise entre $\lambda_{\min}(u\circ v)$ et $\lambda_{\max}(u\circ v)$. De plus, ces deux valeurs propres sont valeurs prise par
$$\frac{\langle u\circ v(x),x\rangle_u}{\|x\|_u^2}$$

en x vecteur propre associé. Enfin, $E\backslash\{0_E\}$ est connexe par arcs et l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs. On peut donc conclure que les valeurs prises par

$$x \mapsto \frac{\langle v(x), x\rangle}{\langle u^{-1}(x), x\rangle}$$

sur $E\backslash\{0\}$ constituent le segment

$$[\lambda_{\min}(u\circ v); \lambda_{\max}(u\circ v)]$$

4. On a $\langle v(x), x\rangle \leqslant \lambda_{\max}(v)\|x\|^2$ et $\left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle \geqslant \lambda_{\min}\left(u^{-1}\right)\|x\|^2$ donc

$$\frac{\langle v(x), x\rangle}{\langle u^{-1}(x), x\rangle} \leqslant \frac{\lambda_{\max}(v)}{\lambda_{\min}(u^{-1})}$$

Or

$$\lambda_{\min}\left(u^{-1}\right) = \frac{1}{\lambda_{\max}(u)}$$

donc

$$\frac{\langle v(x), x\rangle}{\langle u^{-1}(x), x\rangle} \leqslant \lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

et la conclusion est dès lors facile.

28 Mines-Ponts

Soient $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence de $C \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A^{-1}$.
2. On pose $D = CBC$. Montrer que

$$(\det(\mathrm{I}_n + D))^{1/n} \geqslant 1 + (\det(D))^{1/n}$$

3. Montrer que

$$(\det(A+B))^{1/n} \geqslant (\det(A))^{1/n} + (\det(B))^{1/n}$$

Solution de 28 : Mines-Ponts

Source : dDmaths

1. Par le théorème spectral, la matrice symétrique réelle A est orthogonalement diagonalisable. De plus, étant définie positive, ses valeurs propres sont strictement positive. On peut donc écrire

$$A = P^\top D P \text{ avec } P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ et } \lambda_i > 0$$

La matrice $C = P^\top \Delta P$ avec $\Delta = \operatorname{diag}\left(1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n}\right)$ convient.

2. On vérifie $D^\top = D$ et $X^\top D X = (CX)^\top B(CX) \geqslant 0$ donc $D \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. On peut alors écrire

$$D = Q^\top D' Q \text{ avec } Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad D' = \operatorname{diag}\left(\mu_1, \dots, \mu_n\right) \quad \text{et} \quad \mu_i \geqslant 0$$

Par similitude, l'inégalité voulue revient à

$$\prod_{i=1}^n (1+\mu_i)^{1/n} \geqslant 1 + \prod_{i=1}^n \mu_i^{1/n}$$

Si l'un des μ_i est nul, l'inégalité est entendue. Supposons désormais les μ_i tous non nuls. Pour l'obtenir l'inégalité, on introduit la fonction $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$. Celle-ci est convexe car de dérivée seconde positive. Par l'inégalité de Jensen

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+\mathrm{e}^{a_i})$$

En choisissant $a_i = \ln\left(\mu_i\right)$, on obtient

$$\ln\left(1 + \prod_{i=1}^n \mu_i^{1/n}\right) \leqslant \ln\left(\prod_{i=1}^n (1+\mu_i)^{1/n}\right)$$

puis l'inégalité voulue.

3. On a
$$(\det(C))^2\det(A+B)=\det(CAC+CBC)=\det(\mathrm{I}_n+D)$$
avec
$$\det(A)=1/(\det(C))^2 \text{ et } \det(B)=\det(D)/(\det(C))^2$$
La comparaison
$$(\det(\mathrm{I}_n+D))^{1/n}\geqslant 1+(\det(D))^{1/n}$$
fournit alors l'inégalité proposée.

29 ENS L 2024

Soit $p\geqslant 1$ et A,B dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\operatorname{tr}\left(I_p-A^{-1}B\right)\leqslant \ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right).$$
2. Soit $n\geqslant 1$, $u_1,\dots,u_n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $\lambda>0$. Pour $1\leqslant m\leqslant n$, on pose $A_m=\sum_{k=1}^{m}u_ku_k^{\intercal}$ et $B_m=\lambda I_p+A_m$.
Montrer que, pour $1\leqslant m\leqslant n$, B_m est symétrique définie positive.
3. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n. Montrer que
$$\sum_{m=1}^{n}\left\langle u_m,B_m^{-1}u_m\right\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{p}\ln\left(1+\frac{\lambda_i}{\lambda}\right).$$

Solution de 29 : ENS L 2024

Source : RMS

1. L'inégalité provient du fait classique que $A^{-1}B$ est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Démontrons-le. Puisque A est symétrique la forme $\varphi:(X,Y)\in(\mathbb{R}^p)^2\mapsto X^TAY$ est bilinéaire symétrique, et puisque A est définie positive cette forme est définie positive. C'est donc un produit scalaire.
Or $u:X\in\mathbb{R}^p\mapsto A^{-1}BX$ est autoadjoint pour ce produit scalaire car la forme bilinéaire
$$(X,Y)\mapsto\varphi(X,u(Y))=X^TA\left(A^{-1}B\right)Y=X^TBY$$
est symétrique (B étant symétrique). Enfin $\forall X\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\},\varphi(X,u(X))=X^TBX>0$ puisque B est définie positive. Ainsi le théorème spectral montre ainsi que u est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{R}_+^*$. C'est le résultat voulu.
Notons ensuite $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de $A^{-1}B$. Comme cette matrice est diagonalisable, d'une part $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=\operatorname{tr}\left(A^{-1}B\right)$, d'autre part
$$\prod_{k=1}^{p}\lambda_k=\det\left(A^{-1}B\right)=\frac{\det B}{\det A},\quad\text{donc}\quad\ln\left(\frac{\det B}{\det A}\right)=\sum_{k=1}^{p}\ln(\lambda_k)$$
Par concavité de $\ln$, il vient
$$\ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right)=-\sum_{k=1}^{p}\ln(\lambda_k)\geqslant\sum_{k=1}^{p}(1-\lambda_k)=p-\operatorname{tr}\left(A^{-1}B\right)=\operatorname{tr}\left(I_p-A^{-1}B\right)$$
2. Soit $m\in[\![1,n]\!]$. Alors par linéarité de la transposition
$$A_m^{\intercal}=\sum_{k=1}^{m}\left(u_ku_k^{\intercal}\right)^{\intercal}=\sum_{k=1}^{m}u_ku_k^{\intercal}=A_m$$
Ainsi $B_m^T=\lambda I_p+A_m^{\intercal}=\lambda I_p+A_m=B_m$, donc B_m est symétrique. Ensuite
$$\forall X\in\mathbb{R}^p\backslash\{0\},X^{\intercal}B_mX=\lambda\|X\|^2+\sum_{k=1}^{m}X^{\intercal}u_ku_k^{\intercal}X=\underbrace{\lambda\|X\|^2}_{>0}+\sum_{k=1}^{m}\underbrace{\langle u_k,X\rangle^2}_{\geqslant 0}>0$$
Ainsi $B_m\in\mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

3. On pose $A_0 := 0$ et $B_0 := \lambda I_p + B_0 = \lambda I_p$. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. On note que

$$\begin{aligned}\langle u_m, B_m^{-1} u_m \rangle &= u_m^{\intercal} B_m^{-1} u_m = \operatorname{tr}\left(u_m^{\intercal} B_m^{-1} u_m\right) = \operatorname{tr}\left(B_m^{-1} u_m u_m^{\intercal}\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(B_m^{-1}(A_m - A_{m-1})\right)\end{aligned}$$

En outre, $A_m - A_{m-1} = \left(B_m - \lambda I_p\right) - \left(B_{m-1} - \lambda I_p\right) = B_m - B_{m-1}$, donc le calcul précédent donne

$$\langle u_m, B_m^{-1} u_m \rangle = \operatorname{tr}\left(B_m^{-1}(B_m - B_{m-1})\right) = \operatorname{tr}\left(I_p - B_m^{-1} B_{m-1}\right)$$

4. Vu le résultat de la question ***b***) (qui s'applique évidemment aussi à $B_0 = \lambda I_p$), on déduit du résultat de a) que $\operatorname{tr}\left(I_p - B_m^{-1} B_{m-1}\right) \leqslant \ln(\det B_m) - \ln(\det B_{m-1})$. Ainsí, par sommation télescopique,

$$\sum_{m=1}^{n} \langle u_m, B_m^{-1} u_m \rangle \leqslant \sum_{m=1}^{n} (\ln(\det B_m) - \ln(\det B_{m-1})) = \ln(\det B_n) - \ln(\det B_0)$$

Enfin, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ telle que $A_n = P \operatorname{Diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_p\right) P^{-1}$, puis $B_n = P \operatorname{Diag}\left(\lambda + \lambda_1, \ldots, \lambda + \lambda_p\right) P^{-1}$ et ainsi $\det(B_n) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda + \lambda_k)$. Finalement

$$\sum_{m=1}^{n} \langle u_m, B_m^{-1} u_m \rangle \leqslant \sum_{k=1}^{p} \ln(\lambda + \lambda_k) - \ln(\lambda^p) = \sum_{k=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)$$