# 1. Espaces vectoriels normés

## 1 Mines-Ponts 2024

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

1. Montrer que $N$ est une norme sur $E$.
2. Comparer les normes $N$ et $\|\cdot\|_\infty$.

## 2 Mines-Ponts 2022 (Greg) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Montrer que
$$N : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|$$
est une norme.
2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $(F_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ et deux normes telles que $F_n$ converge vers $P$ pour l'une et $Q$ pour l'autre.

## 3 Mines-Ponts 2024

Soit $f$ une forme linéaire continue non nulle sur un espace normé $E$. Soit $x_0$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

1. Montrer que $|||f||| = \dfrac{|f(x_0)|}{\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} f)}$
2. Montrer que $\exists a \in E \setminus \{0\},\ |||f||| = \dfrac{|f(a)|}{\|a\|} \iff \exists b \in \operatorname{Ker} f,\ \|x_0 - b\| = \mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} f)$

## 4 Mines-Ponts 2024

1. Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Existe-t-il une norme $N$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout couple $(A,B)$ de matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $N(AB) = N(BA)$ ?

## 5 Mines-Ponts 2024

Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

## 6 X 2024

1. Soit $E$ un espace vectoriel normé. Que dire d'une partie $A$ de $E$ à la fois ouverte et fermée ?
2. Trouver une partie $A$ de $\mathbb{R}$ telle que $A$, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$ soient toutes distinctes.

## 2. Suites et séries numériques

### 7 Mines-Ponts 2024

Soit $(u_n)$ une suite de réels non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Étudier la nature de $\sum u_n$.

### 8 Mines-Ponts 2024

1. Soit $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{t \in [n,n+1]} \left| f'(t) \right|.$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$ ?

### 9 Mines-Ponts 2023

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est divergente.
2. Donner un équivalent de $u_n$ quand $n \to +\infty$.

## 3. Suites et séries de fonctions

### 10 Mines-Ponts 2024

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f$ n'est pas dérivable en $0$.

### 11 Mines-Ponts On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

1. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de $S$.
2. Donner un équivalent de $S$ en $0$ et en $1^-$.

### 12 X–ENS

1. Quelle est la limite simple de $(f_n)$ où $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

$$1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{n}$$

3. En déduire que $(f_n)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

# 4. Algèbre linéaire, Réduction

## 13 Mines-Ponts 2022 (Théo) avec 15 minutes de préparation

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Montrer que $f$ est nilpotente.
2. On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $e$ de $E$ telle que $\operatorname{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

## 14 Mines-Ponts 2021 (Maximilien)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie de dimension $n$ et $\mathscr{F} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de formes linéaires.
Montrer que $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \ \exists x_0 \in E, \ \big(f_1(x_0), \dots, f_p(x_0)\big) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p).$$

## 15 Mines-Ponts 2017

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A$, $B$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose que le polynôme caractéristique de $A$ est scindé à racines simples.

1. Montrer que si $A = B^2$, alors $B$ est diagonalisable.
2. Montrer que si $AB = BA$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $B = P(A)$.

## 16 Mines-Ponts 2024

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $J$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser ses éléments propres.
2. Déterminer les éléments propres de $A$.

## 17 Centrale 2024

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A$.

1. Donner et démontrer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

   En déduire que $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} A$, $\dfrac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \operatorname{tr}\big((xI_n - A)^{-1}\big)$.

2. Pour tous $j \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose $B_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} a_i A^{j-i}$ puis $Q(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x^{n-j} B_{j-1}$.

   Montrer que $Q(x)(xI_n - A) = \chi_A(x) I_n$ et $\operatorname{tr} Q(x) = \chi_A'(x)$.

3. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $S_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k$. Montrer que $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} a_i S_{j-i} = (n-j) a_j$.

## 18 ENS Saclay - Rennes 2024 – Autour du Pfaffien

Pour toute $A \in \mathscr{A}_4(\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{Pf}\,A = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.

1. Montrer que pour toute $A \in \mathscr{A}_4(\mathbb{R})$, $(\mathrm{Pf}\,A)^2 = \det A$.
2. On admet que $\mathscr{GL}_n^+(\mathbb{R})$ (matrices de déterminant $>0$) est connexe par arcs.
   Montrer que pour toute $A \in \mathscr{A}_4(\mathbb{R})$ et toute $B \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$,
   $$\mathrm{Pf}(BAB^\intercal) = \det B\,\mathrm{Pf}\,A.$$
   *Indication : Pour le cas* $\det B < 0$, *considérer la matrice* $D = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$.
3. Soit $R \in \mathscr{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^\intercal$. Montrer l'équivalence entre
   (i) $R$ n'a pas de valeur propre réelle ;
   (ii) $\mathrm{Pf}\,A \neq 0$ ;
   (iii) $A$ est inversible.
4. Soit $R_1, R_2 \in \mathscr{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^\intercal - R_1$ et $A_2 = R_2^\intercal - R_2$. On suppose que $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\mathrm{Pf}\,A_1 = \mathrm{Pf}\,A_2 \neq 0$.
   Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^\intercal$.

## 19 ENS Lyon 2024

Déterminer les matrices $M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M$ est semblable à $2M$.

# 5. Probabilités

## 20 Mines-Ponts 2022 (Théo) sans préparation

On choisit au hasard $A, B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer

$$\mathbb{P}(A \subset B \text{ ou } B \subset A).$$

## 21 Mines-Ponts 2023

On tire au hasard un élément $A$ de $\mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Calculer la probabilité que $|A|$ soit un entier pair.

## 22 Mines-Ponts 2023 (posé aussi à CCINP...)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p$. On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & \ldots & X_n \end{pmatrix}$ et $M = U^{\intercal} U$.

1. Déterminer la loi des variables aléatoires $\operatorname{tr} M$ et $\operatorname{rg} M$.
2. Calculer la probabilité que $M$ soit une matrice de projection.

## 23 Un résultat classique : Théorème de Beppo Levi (ou de convergence monotone)

Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles positives et $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs réelles positives, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$.

1. En considérant $Y = \lfloor X \rfloor$, montrer que $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
2. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))$ tend vers $0$ en décroissant et $\mathbb{E}(X_0) < +\infty$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$
3. On suppose maintenant que pour tout $\omega \in \Omega$, la série $\sum X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

## 24 ENS L 2024

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1, \ldots, v_n \in E$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|v_i\| \leqslant 1$.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [-1, 1]$ et $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v - w\| \leqslant \sqrt{n}$.

*Indication : non, non, cet exercice est bien au bon endroit.*

## 25 X 2024

Une grille $\{1, 2, 3\} \times \llbracket 1, n \rrbracket$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2, n)$. À chaque instant, si elle se trouve au milieu (ie en un point $(2, k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou se déplace à droite (respectivement à gauche) avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à l'instant $t$.
2. Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

## 26 ENS PLSR 2024

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
Si $N$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $X_{N+n}(\omega) = X_{N(\omega)+n}(\omega)$.

1. Existe-t-il $N$ tel que $\mathbb{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_{N+n} = 1) = \frac{1}{2}$ ?
2. Existe-t-il $N$ tel que $\mathbb{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbb{P}(X_{N+n} = 1) = \frac{1}{2}$ ?

# 6. Algèbre bilinéaire

## 27 Centrale

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $u$ un endomorphisme symétrique défini positif de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On pose

$$\langle x, y\rangle_u = \left\langle u^{-1}(x), y\right\rangle \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_u$ est un produit scalaire.

Soit $v$ un endomorphisme autoadjoint de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

2. Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable.

Si $w$ est un endomorphisme diagonalisable de $E$, on note $\lambda_{\min}(w)$ (resp. $\lambda_{\max}(w)$ ) sa plus petite (resp. grande) valeur propre.

3. Montrer que l'image de $E\backslash\{0\}$ par
$$x \longmapsto \frac{\langle v(x), x\rangle}{\langle u^{-1}(x), x\rangle}$$
n'est autre que le segment d'extrémités $\lambda_{\min}(u \circ v)$ et $\lambda_{\max}(u \circ v)$.
4. Montrer que
$$\lambda_{\min}(u)\lambda_{\min}(v) \leqslant \lambda_{\min}(u \circ v) \leqslant \lambda_{\max}(u \circ v) \leqslant \lambda_{\max}(u)\lambda_{\max}(v)$$

## 28 Mines-Ponts

Soient $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence de $C \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A^{-1}$.
2. On pose $D = CBC$. Montrer que
$$(\det(\mathrm{I}_n + D))^{1/n} \geqslant 1 + (\det(D))^{1/n}$$
3. Montrer que
$$(\det(A+B))^{1/n} \geqslant (\det(A))^{1/n} + (\det(B))^{1/n}$$

## 29 ENS L 2024

Soit $p \geqslant 1$ et $A, B$ dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\operatorname{tr}\left(I_p - A^{-1}B\right) \leqslant \ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right).$$
2. Soit $n \geqslant 1$, $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $\lambda > 0$. Pour $1 \leqslant m \leqslant n$, on pose $A_m = \sum_{k=1}^{m} u_k u_k^{\intercal}$ et $B_m = \lambda I_p + A_m$.

   Montrer que, pour $1 \leqslant m \leqslant n$, $B_m$ est symétrique définie positive.
3. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de $A_n$. Montrer que
$$\sum_{m=1}^{n} \left\langle u_m, B_m^{-1} u_m\right\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda}\right).$$