1. Polynômes

1 Mines-Telecom 2019

Soit $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Démontrer que X^n-1 divise X^m-1 si et seulement si n divise m.

Variante : montrer que $X^{n\wedge m}-1=(X^n-1)\wedge(X^m-1)$.

2 Mines-Telecom 2019

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n\geqslant 2$, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Démontrer que P' est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
2. On note $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ les racines de P et $\beta_1,\dots,\beta_{n-1}$ celles de P'.
   On pose $M=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ et $m=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k$.
   Comparer M et m.

3 Mines-Telecom 2018

1. Soit $m\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_{2m}[X]$ et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.
   On suppose que a et b sont racines d'ordre m de P.
   Montrer que pour tout $k\in[\![1,m]\!]$, $P^{(k)}$ admet k racines distinctes dans $]a,b[$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $Q_n(X)=\left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(n)}$.
   Quel est le degré de Q_n ? Montrer que Q_n admet n racines simples dans $]-1,1[$.

4 CCINP 2017 Polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0(X)=1$, $T_1(X)=X$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$T_{n+2}(X)=2X\,T_{n+1}(X)-T_n(X).$$

1. Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de T_n.
2. Démontrer que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$,
$$T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta).$$
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note
$$E_n=\left\{P\in\mathbb{R}[X],\ \left(1-X^2\right)P''-XP'+n^2P=0\right\}.$$
   a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P\in\mathbb{R}[X]$. Démontrer que si $P\in E_n$, alors $P=0$ ou $\deg(P)=n$.
   b) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T_n\in E_n$.
4. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $E_n=\mathrm{Vect}(T_n)$.

5 TPE (Mines-Telecom) 2017 – Théorème de Gauß-Lucas

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré n et $z_1,\dots,z_n$ les racines de P dans $\mathbb{C}$. L'ensemble :

$$\mathscr{C}_P=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k \text{ avec } (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in(\mathbb{R}_+)^n \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1\right\}$$

est appelé enveloppe convexe des racines de P.

Démontrer que toute racine complexe de P' appartient à $\mathscr{C}_P$.

2. Algèbre générale

6 CCINP

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $(G,*)$ un groupe cyclique de cardinal n et a un générateur de $(G,*)$.

Soit $r\in\mathbb{N}^*$, $d=\mathrm{PGCD}(n,r)$ et $f:\left|\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G\\ x & \longmapsto & x^r\end{array}\right.$.

1. Montrer que f est un morphisme de groupes.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe de $(G,*)$ engendré par a^d.
4. Soit $y\in\mathrm{Im}(f)$. Déterminer les solutions de l'équation $x^r=y$ d'inconnue $x\in G$.

7 CCINP

Soit $(G,*)$, $(H,\times)$ deux groupes et f un morphisme de groupes de $(G,*)$ vers $(H,\times)$.

1. Soit $x\in G$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que x est d'ordre fini égal à n. Montrer que $f(x)$ est d'ordre fini et que son ordre divise n.
2. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},+)$ vers $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z},+)$.
3. Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$ vers $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+)$.

8 Mines-Telecom 2019

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{N}^2$, on note $x\vee y$ le PPCM de x et y, et $x\wedge y$ le PGCD de x et y. Déterminer tous les couples $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ vérifiant

$$x\vee y+11(x\wedge y)=203.$$

9 Mines-Telecom 2019

Par combien de 0 se termine l'écriture décimale de l'entier naturel 2022! ?

10 Mines-Telecom 2018

Résoudre le système

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{cccc} x+y & \equiv & 4 & [11]\\ xy & \equiv & 10 & [11]\end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

3. Algèbre linéaire

11 Mines-Telecom 2022 (Lilian)

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. n est pair.
2. Il existe $A,B\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB+BA=0_n$.
3. Il existe $A,B\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB+BA=0_n$.

12 CCINP 2021 (Marcelin)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E.

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes

(i) $\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}\,f+\mathrm{rg}\,g$.

(ii) $\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g=\{0\}$ et $E=\mathrm{Ker}\,f+\mathrm{Ker}\,g$.

13 CCINP 2021 (Maximilien)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe une base à déterminer dans laquelle
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^n.
3. Soient (u_n), (v_n), (w_n) telles que $u_0 = 0$, $v_0 = w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = v_n + w_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$$
Exprimer ces suites en fonction de n.

14 CCINP 2021 (Maïlane)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 1$, f endomorphisme de E.

1. Soit f un projecteur, la condition « $\mathrm{rg}\, f = 1$ » est elle nécessaire ? Suffisante ?
2. Soit f tel que $\mathrm{rg}\, f = 1$ et $\mathrm{tr}\, f = 1$. Montrer que f est un projecteur.
3. Déterminer une base de $\mathscr{L}(E)$ formée de projecteurs.

15 CCINP - Mines-Telecom 2019

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et p, q des projecteurs de E.

1. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   - (P1) $p + q$ est un projecteur ;
   - (P2) $p \circ q = 0 = q \circ p$;
   - (P3) $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Démontrer que
$$\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q).$$

16 Mines-Telecom 2019

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de taille n défini par :
$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

17 CCINP 2019

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et g_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X],\ g_n(P) = P(X+1) - P(X).$$
Déterminer le noyau et l'image de g_n.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ défini par :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ g(P) = P(X+1) - P(X).$$
Montrer que g est surjectif.

18 CCINP 2018

Soit $(a, m) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre le système
$$(S) \quad \begin{cases} 3x & + & my & + & z & = & 1 \\ (m-3)x & & & - & z & = & -1 \\ x & + & y & + & mz & = & a \end{cases}$$
d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en discutant selon les valeurs de m et a.

19 Mines-Telecom 2018

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et
$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$
Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

20 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ fixée et
$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & -X + \mathrm{tr}(X)A. \end{array} \right.$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Montrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que u ne soit pas bijective.
4. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ fixée. Résoudre l'équation linéaire $u(X) = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

21 Mines-Telecom 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note f_k et g_k les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos(kx) \text{ et } g_k(x) = \sin(kx).$$
Montrer que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

22 Mines-Telecom 2018

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout entier $n \geqslant 2$, le déterminant de taille n défini par :
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

23 Mines-Telecom 2018

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u + v = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leqslant n$.

Démontrer que $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$ puis en déduire que u et v sont des projecteurs.

24 TPE (Mines-Telecom) 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = 0$.

1. Montrer que $I_n + A$ est inversible.
2. Soit $B \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Démontrer que $A + B$ est inversible.

4. Réduction des endomorphismes

25 Mines-Telecom 2024 (Simon)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{tr} A = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable ou nilpotente.
2. Est-ce toujours le cas pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$.

26 Mines-Telecom 2024 (Nicolas)

Soit $n \geqslant 2$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X^2+X)P(1) + (X^2-X)P(-1) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer les valeurs propres de f.
4. f est-il diagonalisable ?

27 Mines-Telecom 2022 (Aure) couplé avec 20

Soit $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & -X + \operatorname{tr}(X) I_n \end{array} \right.$.

Montrer que u est diagonalisable et donner ses sous-espaces propres.

28 CCINP 2022 (Greg) couplé avec 17

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = I_n$, $A \neq I_n$ et $A \neq -I_n$.

1. Montrer que $\operatorname{tr} A \equiv n[2]$.
2. Montrer que $\operatorname{tr} A \leqslant n-2$.

29 CCINP 2022 (Guillaume) couplé avec 11

Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ 1 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Déterminer le rang de M.
2. Trouver les valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.
3. Donner la matrice de la projection orthogonale sur $\mathfrak{Im} f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n$.

30 Mines-Telecom 2022 (Guillaume)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg} A = 1$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
3. *Bonus : montrer que* $A^2 = \operatorname{tr}(A) \cdot A$.

31 Mines-Telecom 2022 (Aure)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner son polynôme minimal.
2. (a) On suppose que e^N est diagonalisable. Montrer que $e^N - I_n$ est diagonalisable et nilpotente.
   (b) En déduire que $N = 0_n$.

32 CCINP 2022 (Louise) couplé avec 9

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que u admet n valeurs propres distinctes.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u \iff u$ et v possèdent une base de vecteurs propres en commun.
2. Soit A la matrice de u dans une base e. Discuter du nombre de solutions de l'équation $X^2 = A$.

33 CCINP 2021 (Lucas)

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que pensez-vous de l'affirmation
$$AB = 0 \Longrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$
Question bonus hors exercice : trouver une condition supplémentaire à $AB = 0$ pour que cela implique $A = 0$.
2. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n)^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{tr} A \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer A dans le cas où $\operatorname{tr} A = 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A(A - I_n)^2 = 0$. A est-elle toujours diagonalisable ?

34 Mines Telecom 2021 (Éléonore)

Soit $n \geqslant 3$. On pose A la matrice carrée de taille n avec des 1 sur la première ligne, la première colonne et la diagonale et des 0 ailleurs.

Montrer que 1 est valeur propre de A et calculer son sous-espace propre.

Déterminer les autres valeurs propres de A et leurs sous-espaces propres.

35 Mines Telecom 2021 (Mariette)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que
$$\operatorname{tr} I_n = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \cdots = \operatorname{tr} A^n$$
si et seulement si $\operatorname{Sp} A = \{1\}$.

36 CCINP 2019

Soit $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices $A = \begin{pmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & b \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Exprimer A en fonction de I_n et J.
   b) Montrer que $P(X) = X^2 + (2 - 2b - n)X + (b-1)(n+b-1)$ est un polynôme annulateur de A.

   a) Déterminer les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de A.
   b) Calculer $\det(A)$.

37 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = BA^k$. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
3. Soit Q un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples. Montrer que $Q'(A)$ est une matrice inversible.
4. Montrer que si M est diagonalisable, alors A est diagonalisable et $B = 0$.
5. Établir la réciproque.

38 TPE (Mines-Telecom) 2019

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

39 CCINP 2019

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme annulateur et le polynôme minimal de A. En déduire l'unique valeur propre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)^2$.
3. Exprimer A^n en fonction de A, I_3 et n.
4. L'expression obtenue à la question 3) est-elle toujours vraie pour $n = 0$? $n = 1$? $n = -1$?

40 TPE (Mines-Telecom) 2019

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel défini par

$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}),\ f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \right\}.$$

Soit T l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ T(f)(x) = f(x+1).$$

Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f.

41 CCINP 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on considère A comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer le polynôme minimal de A.
2. Dans cette question, on considère A comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

42 Mines-Telecom 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2. Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.
3. Soit λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A. On pose $B = A - \lambda_1 I_3$ et $C = A - \lambda_2 I_3$.
   Calculer BC, CB et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B^n et C^n.
   Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n en fonction de B et C, puis calculer A^n.

43 CCINP 2019

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.

1. Démontrer que si f est bijectif, alors $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même polynôme caractéristique.
2. Démontrer que si f, g sont bijectifs et $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.
3. Démontrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
4. Donner deux matrices A, B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisables et telle que AB est diagonalisable.

44 Mines-Telecom 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$.

1. Montrer que A n'admet aucune valeur propre réelle.
2. Montrer que n est pair.
3. Déterminer $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.

45 CCINP 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.
   Déterminer le polynôme caractéristique de B. En déduire une contradiction. Conclure.
3. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

46 CCINP 2019

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour tout vecteur $x \in E$, on pose $E(x) = \mathrm{Vect}\big(\{f^k(x),\ k \in \mathbb{N}\}\big)$.

1. Déterminer $E(e_1)$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de f et vérifier que 2 est valeur propre de f.
3. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Déterminer tous les vecteurs x de E tels que $E(x) \neq E$.

47 CCINP 2019

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.

1. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Déterminer le rang de f.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
4. En utilisant le lemme des noyaux, montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}\big(f^2 + \mathrm{id}_E\big)$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
6. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

48 CCINP 2019

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$ et $c \in \mathbb{R}_+$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Diagonaliser A lorsque A est diagonalisable.
2. On suppose $c = 0$. Calculer $\exp(A)$.
3. On suppose $bc \neq 0$. Expliquer comment on peut calculer $\exp(A)$.

49 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{tr} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}\, M. \end{array} \right.$

1. a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.
   b) Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}))$.
   c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
2. Montrer que l'endomorphisme $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{tr}(M) I_n \end{array} \right.$ est diagonalisable.
3. Soit $J \in E$ telle que $\mathrm{tr}(J) = 0$ et l'endomorphisme $g : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & M + \mathrm{tr}(M) J. \end{array} \right.$
   Montrer que $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

50 Mines-Telecom 2019

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\exp(A)$ sans chercher à diagonaliser A.

51 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que $A^n = I_n$ et que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une famille libre. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

52 TPE (Mines-Telecom) - CCINP 2019

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer de deux manières différentes que A et B sont semblables.

53 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que le polynôme $X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle λ, puis que $\lambda > 0$.
3. En déduire que $\det(A) > 0$.

54 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = M + 2M^{\intercal}$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Calculer $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.

55 Mines-Telecom 2018

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E.

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^{k+1}\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right) + \dim(\mathrm{Ker}(u)).$$
2. Dans la suite de cet exercice, on suppose que $u^n = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = n-1$.
   Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right) = k$.
3. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension k. Démontrer que $F = \mathrm{Ker}\left(u^k\right)$.

56 CCINP 2018

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f_n(P) = f(P)$.
   a) Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Calculer le déterminant de f_n.
   c) L'endomorphisme f_n est-il diagonalisable ?

57 CCINP 2018

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$f(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = f(P)$.
   a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. a) Soit Q un vecteur propre de f. Montrer que $Q' \neq 0$ et déterminer le degré de Q.
   b) Déterminer les éléments propres de f.

58 CCINP 2018

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.
2. En déduire que B est diagonalisable et diagonaliser B.
3. Donner deux polynômes annulateurs de la matrice B ainsi que son polynôme minimal.

59 CCINP - Mines-Telecom 2018

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$.

1. Montrer que toute valeur propre de M prend au plus quatre valeurs que l'on donnera.
2. a) Montrer que 0 ou -1 est valeur propre de M.
   Indication : utiliser $\det A$.
   b) Que peut-on en déduire pour le polynôme caractéristique de M ?
   c) La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. a) Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.
   b) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$.
   Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}XP$ sont diagonales.
   c) Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 + X = A$.

60 **Mines-Telecom 2018** Soit $E=\mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f\in E$, on définit la fonction $\Phi(f):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ par $\Phi(f)(0)=f(0)$ et, pour tout $x>0$, $\Phi(f)(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de Φ.

61 **Mines-Telecom 2018** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que B est nilpotente et $AB=BA$.

1. Démontrer que si A est inversible, alors $A^{-1}B$ est une matrice nilpotente.
2. Démontrer que $\det(A+B)=\det(A)$.
3. Démontrer que $A+B$ et A ont même polynôme caractéristique.

62 **CCINP 2018** Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose $A=XY^\intercal$.
   a) Quelle est la taille de A ?
   b) Calculer A.
   c) Calculer le rang de A.
   d) Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker}A$.
   e) Exprimer $\operatorname{tr}(A)$ en fonction de X et Y.
2. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.
   Montrer qu'il existe X et Y non nulles dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que $A=XY^\intercal$.
3. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.
   a) Quel est le spectre de A ?
   b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(A)\neq 0$.

63 **TPE (Mines-Telecom) 2018** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes. Démontrer qu'il existe $a\in E$ tel que $\left(a,f(a),f^2(a),\dots,f^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.

64 **CCINP 2018** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B=\begin{pmatrix}A & A\\ 0 & A\end{pmatrix}$.

1. Calculer B^m pour tout $m\in\mathbb{N}$.
2. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A, $P(A)$ et $P'(A)$.
3. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
4. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si $A=0$.

65 **CCINP 2018** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathscr{Z}=\{f\in\mathscr{L}(E),\ \forall g\in\mathscr{L}(E),\ f\circ g=g\circ f\}$.

1. Soit $f\in\mathscr{Z}$.
   a) Montrer que pour tout $x\in E$, la famille $(x,f(x))$ est liée.
   b) En déduire qu'il existe $k\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $x\in E$, $f(x)=kx$.
2. Déterminer $\mathscr{Z}$. Vérifier alors que $\mathscr{Z}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et préciser sa dimension.
3. Soit f et g deux endomorphismes de E. On suppose qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $f\circ g-g\circ f=\lambda f$.
   Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun. On étudiera d'abord le cas $\lambda=0$.

66 **CCINP 2018** Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 3$, et $(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$.

Soit $J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2\\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0\end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer J^k pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.
2. Exprimer A en fonction des matrices de la famille $\left(J^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.
3. Soit Q un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(Q)<n$. Montrer que $Q(J)\neq 0_n$.
4. Que peut-on en déduire sur le degré de π_J, polynôme minimal de J ?
5. Déterminer π_J et χ_J.
6. Montrer que A est diagonalisable et donner les valeurs propres de A.

67 **CCINP 2018** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3+f=0$ et $f\neq 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(f)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Ker}(f^2+\mathrm{id})$.
3. Montrer que f n'est pas injectif. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*
4. Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}^3$ tel que $\left(f(a),f^2(a)\right)$ est libre. En déduire que $\operatorname{rg}(f)=2$.
5. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

68 **CCINP 2018** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$. Soit p un projecteur de E distinct de l'endomorphisme nul et de id_E. On note Φ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall u\in\mathscr{L}(E),\ \Phi(u)=u\circ p-p\circ u.$$

1. Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u=u\circ p-p\circ u$.
   a) Montrer que $p\circ u=0$ et $u=u\circ p$.
   b) En déduire que $u^2=0$ et $\operatorname{Im}(u)\subset\operatorname{Ker}(p)\subset\operatorname{Ker}(u)$.
2. Justifier que Φ n'est pas injectif et déterminer $\operatorname{Ker}(\Phi)$.
3. Montrer que l'endomorphisme Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
4. Montrer que $\mathscr{L}(E)=\operatorname{Ker}(\Phi)\oplus\operatorname{Im}(\Phi)$.

69 **CCINP 2018** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E tel que $\operatorname{rg}(f)=1$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f^2=\lambda f$.
2. A-t-on nécessairement $E=\operatorname{Im}(f)\oplus\operatorname{Ker}(f)$?
3. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (P1) il existe $c\in\mathbb{R}^*$ tel que cf est une projection ;
   (P2) $f\circ f\neq 0$;
   (P3) $E=\operatorname{Im}(f)\oplus\operatorname{Ker}(f)$.
4. On suppose que f vérifie (P1). Montrer que f est diagonalisable et $\operatorname{tr}(f)\neq 0$.

70 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose

$$M(x) = \begin{pmatrix} x & x-a & \cdots & x-a \\ x-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-a \\ x-b & \cdots & x-b & x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \Delta(x) = \det(M(x)).$$

1. Montrer que Δ est une fonction polynomiale de degré au plus égal à 1.
2. On suppose que $a \neq b$. Calculer $\Delta(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.
3. On suppose $a = b$. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $M(x)$ est diagonalisable et calculer $\Delta(x)$.

71 CCINP 2018

On note $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^{1-x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Soit $f \in E$. Montrer que $T(f)$ est dérivable et calculer $T(f)'(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ? Justifier les réponses.
4. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
   Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de T ?
5. Soit $f \in E$ un vecteur propre de T et λ la valeur propre qui lui est associée.
   Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + \dfrac{1}{\lambda^2} y = 0$ et vérifie $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$.
6. Déterminer le spectre de T et donner le sous-espace propre associé à chaque valeur propre.
   On vérifiera que $\mathrm{Sp}(T)$ est une famille dénombrable convergeant vers 0.

72 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$. On note $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Déterminer de trois manières différentes les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$:
   (a) en utilisant la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre de A ;
   (b) en calculant le polynôme caractéristique de A ;
   (c) en déterminant le polynôme minimal de A.
2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ et déterminer une matrice $P \in \mathscr{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

73 Mines-Telecom 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que $\mathrm{rg}(A)$ est un entier pair.
3. Donner un exemple de matrice non nulle $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

74 Mines-Telecom 2018

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de Φ.

5. Algèbre bilinéaire

75 CCINP 2024 (Nicolas) couplé avec 22

1. Soit E un espace euclidien de dimension 2, p endomorphisme représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale fixée de E.
   (a) Donner la matrice représentant p^*.
   (b) Montrer que
   - p et p^* sont des projecteurs.
   - $p + p^*$ est inversible.
   - $\mathrm{Im}(p + p^*) = \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,p^*$.
2. Soit E un espace euclidien de dimension quelconque, p un projecteur de E.
   (a) Montrer que p^* est un projecteur.
   (b) Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E.
   Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
   (c) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p + p^*)$. Montrer que $(p \circ p^* + p^* \circ p)(x) = 0_E$.
   (d) En déduire que $\mathrm{Ker}(p + p^*) = \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,p^*$.

76 Mines-Telecom 2024 (Melvyn)

Soient $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une colonne non nulle et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Y_k = \dfrac{S^k X}{\|S^k X\|}$.

1. Montrer que la suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers un vecteur propre de S.
2. (Question oubliée)

77 Mines-Telecom 2022 (Cybélia)

Soient $f, g \in E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On définit

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose

$$V = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f'' = f \right\}.$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E et que $\left(t \mapsto \mathrm{e}^t, t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\right)$ est une base orthogonale de W.
3. Montrer que V et W sont orthogonaux.
4. Calculer $p_W(f)$ projeté orthogonal de $f \in E$ sur W.
5. Montrer que V et W sont supplémentaires.

78 CCINP 2021 (Hugo)

Soit $(E,\langle,\rangle)$ un espace préhilbertien avec E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, a, b réels, et $\langle,\rangle$ le produit scalaire tel que $\langle f,g\rangle=\int_a^b fg$.

On admet l'existence d'une suite orthonormale $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$ de polynômes tels que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\deg L_k=k$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On note F_n le sous espace vectoriel des fonctions polynomiales engendré par $L_0,\dots,L_n$ et $P_n(f)$ la projection orthogonale de f sur F_n.

1. Exprimer $P_n(f)$ et $\left\|P_n(f)\right\|^2$ en fonction des L_k.
2. Montrer que que la suite $\left(\left\|f-P_n(f)\right\|^2\right)_n$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(L_n)_n$ est totale dans E.
4. Donnez la limite de la suite $\left(\left\|f-P_n(f)\right\|^2\right)_n$.
5. Montrez que $\left\|f\right\|^2=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f(t)L_k(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

79 CCINP 2022 (Théo)

Soit E un espace euclidien de dimension $n\geqslant 3$.

Soit a, b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E.

On pose, pour tout $x\in E$, $u(x)=\langle a,x\rangle a+\langle b,x\rangle b$.

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$.
3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.

80 Mines Telecom 2021 (Maryam)

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale directe. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

1. Décrire l'ensemble des isométries vectorielles.
   Déterminer l'expression de la représentation matricielle d'une isométrie dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la représentation matricielle d'une isométrie vectorielle directe ne dépend pas de la base orthonormée choisie (à l'aide des règles de calcul usuelles sur $\mathscr{SO}_2(\mathbb{R})$).
3. Trouver la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie représentée matriciellement par $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}$.

81 CCINP 2019

Soit $(E,\langle\,,\,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n\geqslant 2$. Soit u un vecteur unitaire de E. Pour tout $a\in\mathbb{R}^*$ et tout $x\in E$, on pose $f_a(x)=x+a\langle x,u\rangle u$.

1. Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique de E.
2. a) Montrer qu'il existe un unique $b\in\mathbb{R}^*$ vérifiant
   $$\forall x\in E,\ \|f_b(x)\|=\|x\|.$$
   b) Montrer que $\mathrm{Ker}\big(f_b-\mathrm{id}_E\big)$ et $\mathrm{Ker}\big(f_b+\mathrm{id}_E\big)$ sont supplémentaires dans E.
3. Soit $a\in\mathbb{R}^*$. Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de f_a.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a\in\mathbb{R}^*$ pour que f_a soit bijectif.

82 CCINP 2019

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})=\left\{M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ \forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^{\intercal}MX\geqslant 0\right\}.$$

1. Soit $M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $M\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de M sont positives.
2. Soit $A=\begin{pmatrix}5&1&1\\1&5&1\\1&1&5\end{pmatrix}$.
   a) Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A dans une base orthonormale de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $A\in\mathscr{S}_3^+(\mathbb{R})$.
   c) Montrer qu'il existe $R\in\mathscr{S}_3^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2=A$.
3. Soit $B\in\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $B^2\in\mathscr{S}_3^+(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que si $AB=BA$, alors $(AB)^2\in\mathscr{S}_3^+(\mathbb{R})$.

83 CCINP 2019

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2+A^{\intercal}=I_n$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 4. Que peut-on en déduire pour A ?
2. Démontrer que 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de A.
   Indication : on pourra considérer $X^{\intercal}AX$ où X est un vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ bien choisi.
3. Montrer que A est une matrice symétrique. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?
4. Déterminer toutes les matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2+M^{\intercal}=I_n$.

84 CCINP 2019

Pour tout $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$, on pose $\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle\,,\,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. On pose $\alpha=\min\left\{\int_0^1\left(t^2-at-b\right)^2\mathrm{d}t,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
   Justifier l'existence de α et déterminer α, ainsi que deux nombres réels a et b réalisant ce minimum, en utilisant deux méthodes différentes :
   - à l'aide de la base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ trouvée à la question précédente ;
   - en cherchant a et b de telle sorte que X^2-aX-b appartienne à $\mathbb{R}_1[X]^{\perp}$.

85 CCINP 2019

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes de $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})\cap T_n^+(\mathbb{R})=\{I_n\}$.
3. Montrer que pour toute $A\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $(O,T)\in O_n(\mathbb{R})\times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A=OT$.
   Indication : on pourra utiliser une base orthonormale construite à l'aide du procédé de Schmidt.

86 CCINP 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U, V deux vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $M = I_n + UV^\intercal$ et $t = \operatorname{tr}(UV^\intercal)$.

1. Montrer que $M^2 - (t+2)M + (t+1)I_n = 0$. Indication : on pourra remarquer que $V^\intercal U \in \mathbb{R}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur t pour que M soit inversible.
   Dans ce cas exprimer M^{-1} en fonction de t, U, V et I_n.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur t, U et V pour que M soit diagonalisable.
   Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.

87 Mines-Telecom 2019

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.
Soit a, b deux vecteurs de E et f l'endomorphisme de E défini par $\forall x \in E,\ f(x) = \langle a, x\rangle b$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit diagonalisable.

88 CCINP - Mines-Telecom 2019

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.
2. Démontrer que l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x, f(y)\rangle \end{array}\right.$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
3. Démontrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique g de $\mathbb{R}^n$ tel que $g^2 = f$ et n'admettant que des valeurs propres strictement positives.
4. Justifier que g est bijectif et démontrer que $\left(g^{-1}(u_1), \dots, g^{-1}(u_n)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire Φ.

89 Mines-Telecom 2018

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit F un sous-espace vectoriel de E et p le projecteur orthogonal sur F. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$ est indépendant du choix de la base orthonormée $\mathscr{B}$.

90 CCINP - Mines-Telecom 2018

Soit E un espace préhilbertien et p un projecteur de E.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.
2. On suppose que p est un projecteur orthogonal. Démontrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
3. On suppose que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Démontrer que p est un projecteur orthogonal.
4. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$, $\varepsilon_1 = (1,0)$, $\varepsilon_2 = (1,1)$, $D = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\Delta = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2)$.
   Soit p le projecteur sur $\Delta = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2)$ parallèlement à $D = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$.
   a) Donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   b) Trouver $x \in E$ tel que $\|p(x)\| > \|x\|$.
5. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à
   $$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Démontrer que u est un projecteur orthogonal sur un plan dont on donnera un vecteur normal.

91 CCINP 2018

Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ et Φ l'application définie sur E^2 par $\forall (f,g) \in E^2,\ \Phi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
On note P (resp. I) le sous-espace vectoriel de E des fonctions paires (resp. impaires).

1. Montrer que $E = P \oplus I$.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Montrer que $P^\perp = I$.
4. Soit Ψ la symétrie orthogonale de E par rapport à P.
   Soit $f \in E$. On note $\widehat{f} = \Psi(f)$. Déterminer $\widehat{f}(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.

6. Espaces vectoriels normés

92 Mines-Telecom 2022 (Cybélia)

Soit $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 - x^2 = 1\right\}$.

1. La partie H de $\mathbb{R}^2$ est-elle fermée ?
2. Rappeler la définition d'une partie connexe par arcs.
3. La sphère unité S de $\mathbb{R}^2$ est-elle connexe par arcs ?
4. Montrer que l'image de S par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue est un segment.

93 CCINP 2022 (Ammar) couplé avec 82

1. Soient E, F espaces vectoriels normés. Montrer que l'image d'un compact de E par une application continue $f : E \to F$ est un compact de F.
2. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E, $f : K \to K$ continue telle que
   $$\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$
   a) Montrer que $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ est continue.
   b) En déduire que f admet un point fixe et qu'il est unique. On le note ℓ.
   c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   Indication : on pourra montrer que $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et que sa limite ne peut être que* 0.
3. Soit $f : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \cos x$. Montrer que f admet un point fixe $\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

94 Mines Telecom 2021 (Marcelin)

Soit $E = \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in E$. On définit la norme $\|.\|$ par
$$\forall P \in E,\ \|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$
Soit $b \in \mathbb{N}$, on définit l'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(b) \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Étudier la continuité de f.

95 Mines-Telecom 2019

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.
Démontrer que N_φ est une norme sur E si et seulement si $\varphi^{(-1)}(\mathbb{R}^*)$ est dense dans $[0,1]$.

96 CCINP 2019

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ définie par $\forall t \in]-1,1[$,

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } t \in]-1,0] \\ \left(t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \in]0,1[\end{cases}$$

On note $\|.\|_2$ la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$.
2. Calculer $\|f'(t)\|_2^2$ pour tout $t \in]-1,1[$.
3. $f(]-1,1[)$ est-il connexe par arcs ? $f'(]-1,1[)$ est-il connexe par arcs ?

97 CCINP 2019

Soit $\ell^\infty = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$.

Pour toute suite $u \in \ell^\infty$, on pose $N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1. Montrer que N_∞ est une norme sur ℓ^∞.
2. Soit E le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ défini par $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty,\ u_0 = 0\}$.
   Montrer que N est une norme sur E. L'application N est-elle une norme sur ℓ^∞ ?
3. Comparer les normes N_∞ et N sur E.
4. Soit $F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ u_n = 0\right\}$.
   L'ensemble F est-il un fermé de E pour la norme N_∞ ? pour la norme N ?

98 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et

$$F = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A^2 = A\right\}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que F est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Démontrer que F n'est pas compact.
4. Démontrer que F est d'intérieur vide.

99 CCINP 2018

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A un fermé non vide de E.

Soit $f : A \to A$ une application vérifiant $\exists k \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, $\forall (x,y) \in A^2$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\left(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|\right).$$

1. Montrer que f admet au plus un point fixe dans A.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $x_0 \in A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \left(\frac{k}{1-k}\right)^n \|x_1 - x_0\|.$$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Démontrer que f admet un unique point fixe dans A.

100 Mines-Telecom 2017

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Comparer les normes N et $\|\cdot\|_\infty$.

101 TPE (Mines-Telecom) 2017

On note $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\Phi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
2. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application Φ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. Calculer la norme d'opérateur de Φ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

7. Dérivation, fonctions convexes et intégration sur un segment

102 CCINP 2022 (Anatol) couplé avec 102

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ continue avec E espace vectoriel de dimension finie, F l'unique primitive de f s'annulant en 0. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad G_f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que
$$\forall x \neq 0,\quad G_f(x) = \frac{1}{2x}(F(x) - F(-x)).$$
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $G_f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u$.
   (c) Montrer que G_f est paire et donner l'ensemble des réels en lesquels elle est continue.
   (d) Montrer que G_f est nulle si et seulement si f est impaire.
2. Soit $\phi : f \mapsto G_f$.
   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme.
   (b) ϕ est-elle injective ?
   (c) ϕ est-elle surjective ?

103 Mines-Telecom 2022 (Perrine)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ tel que $\displaystyle\int_a^b f = 1$.

Comparer $\left(\displaystyle\int t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $\displaystyle\int_a^b t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

104 CCINP 2021 (Clément)

Soit φ une fonction continue et convexe sur $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

1. Démontrer que
$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$
   Indication : penser aux sommes de Riemann.
2. Montrer que $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x}$.
3. (...)

105 CCINP 2019

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+t}}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Étudier le comportement de g en 0^+.
4. Étudier le comportement de g en $+\infty$.
5. Tracer l'allure de la représentation graphique de g.

106 CCINP 2019

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair et f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant |P(t)|.$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.
2. En déduire que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
3. Ce résultat subsiste-t-il si P est de degré pair ?

107 Mines-Telecom 2018

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

1. Justifier l'existence de $m = \inf\limits_{x\in[0,1]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ et montrer que $mM \leqslant 0$.
2. Montrer que f s'annule sur $[0,1]$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant -mM$.

   Indication : on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto \big(M - f(x)\big)\big(f(x) - m\big)$.

108 CCINP 2018

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $F_n'(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

   $$x_n = \min\left\{x \in \mathbb{R}_+,\ F_n'(x) = 0\right\}.$$

   Montrer que $F_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$.

109 CCINP 2018

Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$ puis tracer son graphe.
5. Donner un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

110 TPE (Mines-Telecom) 2017

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est convexe sur I, alors pour tout $(a,b) \in I^2$, f est majorée sur $[a,b]$ et atteint son maximum en a ou b.
2. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   - (C1) f est convexe sur I.
   - (C2) Pour tout $(a,b) \in I^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda x$ est majorée sur $[a,b]$ et atteint son maximum en a ou b.

111 TPE (Mines-Telecom) 2017

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + \left(2 - \cos\left(t^2\right)\right) y = 0.$$

1. Dans cette question, on suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) < 0$.
   a) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   b) On note $\mathscr{C}_f$ le graphe de f. Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a. En déduire une contradiction.
2. Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet au moins une racine réelle.

8. Suites et séries numériques

112 Mines Telecom 2024 (Simon)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Justifier la bonne définition de (u_n).
2. Trouver la monotonie de (u_n). Est-ce que la suite converge ?
3. Trouver un équivalent de $\left(u_{n+1}^2 - u_n^2\right)$.
4. Déduire un équivalent de (u_n).

113 ENSEA 2024 (Mickaël)

Soit $x > 0$, $n \geqslant 2$, $(E_n) : x^n = x + 1$.

1. Démontrer l'existence et l'unicité d'une suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ de solution de (E_n).
2. Montrer que $(x_n)_n$ converge vers 1.
3. Calculer un développement asymptotique de (x_n) à deux termes.

114 Mines-Telecom 2022 (Aure)

Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que la famille $\left(x^{k\ell}\right)_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.

   Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$.

115 CCINP 2021 (Matthieu)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n - \ln n$.

1. Montrer que $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ existe puis en trouver un équivalent.
2. Trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ puis en déduire que (v_n) converge vers une limite γ.
3. Trouver pour quelles valeurs de α la série de terme général $a_n = \alpha^{u_n}$ converge.

116 Mines Telecom 2021 (Mariette)

Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, $f>0$, $f'<0$, $f(0)=1$.
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que $x_0\in\mathbb{R}_*^+$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_n f(x_n)$.

1. Étudier la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Étudier la série de terme général x_n.

117 TPE (Mines-Telecom) 2019

Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^z.$$

118 Mines-Telecom 2019

Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln^{\alpha}(k)$.

119 Mines-Telecom 2019

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

120 CCINP 2019

Soit $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{n+a}{n+b}u_n$.

1. a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.
   b) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $x_n=\ln(n^{\alpha}u_n)$. Déterminer une valeur α pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(x_{n+1}-x_n)$ converge.
2. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$.

121 CCINP 2019

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n\mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On pose ℓ sa limite et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $y_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x_k$.
   Démontrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
3. Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. En déduire un équivalent de u_n. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge-t-elle ?

122 Mines-Telecom 2018

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k}-n$.

1. Étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f:x\mapsto\dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, $|\mathrm{e}^x-1-x|\leqslant 2x^2$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n$ puis donner un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

9. Suites et séries de fonctions

123 Mines-Telecom 2024 (Nicolas)

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n:x\mapsto\dfrac{2x}{x^2+n^2}$, et, lorsque cela a un sens, $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Étudier la continuité de S.
3. Déterminer les limites de S en $\pm\infty$.

124 CCINP 2021 (Jéhanne)

On définit $Z(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^t}$.

1. Donner l'ensemble de définition de Z et son sens de variation.
2. Calculer la limite de Z en $+\infty$.
3. Montrer que $Z(t)\underset{t\to 1^+}{\sim}\dfrac{1}{t-1}$.
4. Étudier la convexité de Z sur son ensemble de définition.

125 CCINP 2021 (Amaury)

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n:x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\mapsto\dfrac{1-x^{2n+2}}{1+x}$ et $f:x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\mapsto\dfrac{1}{1+x}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme.
3. Déterminer une majoration de $\left|\displaystyle\int_0^1\big(f_n(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right|$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Proposer une autre méthode pour déterminer cette limite.
5. Montrer que $f_n:x\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^{2k}-\sum_{k=0}^{n}x^{2k+1}$.
6. Justifier a convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{1+k}$ et expliquer comment calculer la somme avec les questions précédentes.

126 Mines Telecom 2021 (Éléonore)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit, sur $\mathbb{R}^+$, $f_n:x\mapsto\frac{n\mathrm{e}^{-x}+x^3}{n+x}$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autre question posée à l'oral : On note f la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $g_n=f_n-f$. Étudier la convergence de la série $\sum g_n$.

127 CCINP 2019

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$.

1. Déterminer l'ensemble D de convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}f_n$.
2. Montrer que la fonction $f=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est continue sur D.

3. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge-t-elle uniformément sur D ?

128 CCINP 2019

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}$, on pose $u_n(t)=\dfrac{e^{-nt^2}}{n^2+1}$.

1. Justifier que $f : t\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Étudier les variations de u_n' sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire $\|u_n'\|_\infty=\sup_{t\in\mathbb{R}}|u_n'(t)|$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Étudier le sens de variation de la fonction f et donner l'allure de sa représentation graphique.
6. Démontrer que la fonction $g : t\mapsto f(t)-1$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

129 CCINP 2019

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

1. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$u_n(x)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{\sin(x)}{2^n}.$$
En déduire qu'il existe $N_x\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\geqslant N_x$,
$$u_n(x)=\frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$
2. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. En étudiant la suite $\left(u_n\left(2^{n+1}\pi\right)\right)_{n\geqslant 1}$, montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $\varphi : [-1,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$\varphi(0)=0 \text{ et, pour tout } x\in[-1,1]\setminus\{0\},\ \varphi(x)=\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}.$$
Justifier que φ est bornée sur $[-1,1]$.
5. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$. Cela se généralise-t-il à $[-a,a]$ avec $a>0$?
Indication : on pourra utiliser la fonction φ.

130 CCINP 2019

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,2]$, on pose

$$f_n(x)=n^2x(1-x)^n+\operatorname{Arcsin}(x-1).$$

1. Déterminer le domaine D de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $\alpha\in]0,1[$. Étudier la convergence uniforme sur $[\alpha,2-\alpha]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ par deux méthodes différentes :
   - en étudiant les variations de f_n-f sur $[0,1]$, où $f=\lim_{n\to+\infty} f_n$;
   - en calculant $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

131 CCINP 2019

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0,1]$, on pose $g_n(t)=e^t\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, $|g_n'(t)|\leqslant\dfrac{e^t}{n}$.
   b) Montrer que pour tout $t\in[0,1]$,
$$\left|e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right|\leqslant\frac{t}{n}.$$
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, on pose $h_n(x)=\int_0^x g_n(t)\,dt$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0,1]$.

132 Mines-Telecom 2019

Soit la fonction $f : x\longmapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Étudier la continuité de f sur D.
3. Étudier la dérivabilité de f sur D.

133 Mines-Telecom 2019

Soit $a\in]-1,1[$ fixé et la fonction $S : x\longmapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction S.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$ puis déterminer un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.
3. Déterminer $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $S(x)=\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

134 Mines-Telecom 2019

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall n\geqslant 2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ u_n(x)=\frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}.$$

1. Déterminer le domaine D de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.
2. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur D.
3. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ sur D.

135 CCINP 2018

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)=\dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0,1]$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0,1]$.

4. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.
5. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}\,dt$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
6. Calculer $\int_0^1 \ln(2-t^2)\,dt$ et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

136 Mines-Telecom 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

137 CCINP 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,\pi]$,

$$f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x).$$

1. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,\pi]$.
2. Étudier les convergences simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0,\pi]$.

   La fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est-elle définie sur $[0,\pi]$? Est-elle continue sur $[0,\pi]$?

138 Mines-Telecom 2018

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}.$$

1. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Démontrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

139 Mines-Telecom 2018

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D_f.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

10. Intégrales généralisées, convergence dominée et intégrales à paramètre

140 CCINP 2022 (Gabriel) couplé avec 61

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.

1. (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer F.
2. Soit $G : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan\theta)}{\tan\theta}\,d\theta$. Déterminer le domaine de définition de G.
3. Trouver une relation entre F et G.
4. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\tan\theta}\,d\theta$.

141 CCINP 2021 (Théo)

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue π-périodique telle que $\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \int_0^\pi f(x)e^{-x/n}\,dx$ et $v_n = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x/n}\,dx$.

1. Justifier l'existence de u_n et v_n.
2. Montrer qu'il existe $(a_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}$.
3. Montrer que $S_n \sim \frac{n}{\pi}$.
4. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Étudier la limite de (v_n).

142 CCINP 2021 (Pierre-Louis et Éléonore)

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,dt$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Calculer F' puis en déduire F.

143 Mines-Telecom 2019

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right)dx.$$

144 CCINP 2019

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^4)^n}$.

   Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0,+\infty[$.

   La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
5. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ en appliquant le théorème de convergence dominée.

145 CCINP 2019

Soit la fonction $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Calculer explicitement $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
4. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in D$.

146 CCINP 2019

Soit les fonctions

$$f : x \longmapsto \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$$

et

$$g : x \longmapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)+g'(x)=0$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\pi}{4}-g(x)$.
5. Démontrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge et calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

147 CCINP 2019

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x-1}e^{-nx}\,dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n existe.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. On pose $\Gamma(a,b) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\,dx$.
   a) Justifier l'existence de $\Gamma(a,b)$.
   b) Calculer $\Gamma(a,b)$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = n!.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_0 = (p+1)!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n.$$
   En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x-1}\,dx = (p+1)!\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{p+2}}$.

148 Mines-Telecom 2019

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Soit $t \in]0,1[$. Écrire $\frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |u_n(t)|\,dt$.
3. Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$ et démontrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}$.

149 CCINP 2018

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de
   $$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}.$$
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.
3. La série $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k I_k$ converge-t-elle ? Si tel est le cas, calculer $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k I_k$.

150 Mines-Telecom 2018

Étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ et si elle converge, calculer cette intégrale.

151 Mines-Telecom 2018

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,dx$.

1. Justifier que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.
4. En déduire la valeur de I.

152 Mines-Telecom 2018

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n\left(1-\sqrt{x}\right)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
2. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

153 TPE (Mines-Telecom) 2018

Soit $x \in]1,+\infty[$. On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt$ et montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt = \Gamma(x)\zeta(x)$.

154 CCINP 2018

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que les fonctions $t \mapsto t^2 f(t)^2$ et $t \mapsto f'(t)^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto t f(t) f'(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$x f(x)^2 = \int_0^x f(t)^2\,dt + 2\int_0^x t f(t) f'(t)\,dt.$$
3. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $x f(x)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
4. En déduire que
   $$\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\,dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,dt\right).$$

155 CCINP 2018

1. Énoncer le théorème de convergence dominée.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\,dt$.
3. À l'aide du théorème de caractérisation séquentielle de la continuité et du théorème de convergence dominée, démontrer le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.

156 Mines-Telecom 2018

Soit $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(t))\,dt$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Montrer que $I=J$.
3. Montrer que $I+J=I-\dfrac{\pi\ln(2)}{2}$ et en déduire I.

11. Séries entières

157 CCINP

Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0=1$, $d_1=\dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n\geqslant 2$:

$$d_n=\begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}_{(n)}.$$

1. Calculer d_2 et d_3.
2. Montrer que pour tout $n\geqslant 2$,
$$(n+1)d_n=nd_{n-1}+d_{n-2}.$$
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|d_n|<1$.
Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}d_nx^n$?
4. Soit $S:x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}d_nx^{n+1}$. Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$,
$$(1-x)S'(x)-xS(x)=1.$$
5. En déduire que pour tout $x\in]-1,1[$, $S(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1-x}$.
6. Déterminer d_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

158 CCINP

Soit la fonction $f:x\longmapsto\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est solution sur $]-1,1[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.
4. En déduire le développement en série entière de la fonction $g:x\mapsto\mathrm{Arcsin}^2(x)$ sur $]-1,1[$.

159 CCINP Soit la fonction $f:x\longmapsto\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 2}\ln(n)x^n$.
2. Montrer que pour tout $x\in]-R,R[$,
$$(x-1)f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n.$$
3. Soit $x\in[0,1[$.
En remarquant que pour tout $n\geqslant 2$, $\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)=\displaystyle\int_{n-1}^n\frac{dt}{t}$, donner un encadrement de $(x-1)f(x)$.
4. Déterminer un équivalent de f en R^-.

160 Mines-Telecom 2018

1. Donner le développement en série entière de la fonction Arctan.
2. Exprimer, pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$, $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
3. Montrer que $\pi=8\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{2n+1}$.
4. Soit $N\in\mathbb{N}$. Donner une majoration de l'erreur commise lorsqu'on approche π par la somme partielle :
$$S_N=8\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{2n+1}.$$

161 CCINP 2017 Soit la fonction $f:x\longmapsto\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.
2. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
3. Montrer que f est continue sur D_f.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.
5. Démontrer que $(1-x)f(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}0$.

162 CCINP 2017 Soit $n\in\mathbb{N}$ la suite définie par $u_0=u_1=1$ et, pour tout entier $n\geqslant 2$,

$$u_n=u_{n-1}+2u_{n-2}+(-1)^n.$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant 4^n$.
3. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_nx^n$ est strictement positif.
4. Soit $f:x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$.
Calculer $f(x)$ pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$.
5. Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
Indication : on pourra décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{X^2+X+1}{(1+X)^2(1-2X)}$.

163 Mines-Telecom 2017

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de a_n.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite. h
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_n - n a_{n-1} = -\dfrac{1}{n+1}$.
5. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ puis exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

164 TPE (Mines-Telecom) 2017

Soit la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.
2. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
3. Étudier f en R et $-R$ (existence et valeur).

12. Équations différentielles

165 Mines-Telecom 2024 (Énio)

Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = f(1-x).$$

166 Mines-Telecom 2022 (Guillaume)

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel.

1. Résoudre l'équation $y'' + y = \sin(nt)$.
2. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge absolument.

   Résoudre l'équation $y'' + y = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \sin(nt)$.

167 CCINP 2019

Résoudre le système différentiel

$$(S)\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z. \end{cases}$$

168 CCINP 2019

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u \in E$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $L_u(f) = f' + uf$.

1. Montrer que L_u est un endomorphisme de E.
2. Calculer $(L_u \circ L_u)(f)$ pour toute fonction $f \in E$.
3. Justifier que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle

   $$y'' + 2xy' + \left(x^2+1\right)y = 0$$

   est inclus dans E.
4. Résoudre l'équation différentielle

   $$y'' + 2xy' + \left(x^2+1\right)y = 0.$$

169 TPE (Mines-Telecom) 2019

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x.$$

170 Mines-Telecom 2019

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.

   Indication : on pourra exprimer chaque solution de (E) à l'aide d'une intégrale.
2. Montrer qu'une seule des solutions de (E) admet une limite finie en $+\infty$.

   Exprimer cette solution à l'aide d'une intégrale et donner sa limite en $+\infty$.

171 CCINP 2018

Soit F l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant

(H1) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$;

(H2) f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;

(H3) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

1. Soit $f \in F$. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + kf(x) = 0$.
2. Déterminer F.

172 CCINP 2018

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.
2. Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = f(x)$, où a, b sont deux nombres réels et f est une fonction que l'on précisera.
3. Résoudre (E) et en déduire S.

173 CCINP 2018

Résoudre l'équation différentielle

$$\cos(x)y' - \sin(x)y = \cos^3(x) \qquad (E)$$

sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ puis sur $[0, \pi]$.

174 CCINP 2017

Soit l'équation différentielle $(E) : xy'' + 2y' + xy = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. *Indication : on pourra commencer par rechercher toutes les solutions de (E) développables en série entière sur un voisinage de 0.*
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

13. Calcul différentiel

175 Mines Telecom 2022 (Maryam)

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$, $ty'-y=-1$.
2. Soit $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Exprimer r et θ en fonction de x et y en coordonnées polaires.
3. En posant $x=r\cos\theta$ et $y=r\cos\theta$, montrer que résoudre
$$1+x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-f(x,y)=0 \qquad (E)$$
avec $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ revient à résoudre
$$1+r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)-g(r,\theta)=0$$
4. Terminer la résolution de l'équation aux dérivées partielles (E).

176 TPE (Mines-Telecom)

Soit la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}\end{array}\right.$.

Démontrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}_+^*$ et le déterminer.

177 CCINP

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\theta\in]-\pi,\pi]$. On pose $u_\theta=(\cos(\theta),\sin(\theta))$.
   En discutant selon la valeur θ, étudier l'existence de la dérivée de f en $(0,0)$ selon u_θ.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?
4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   La fonction f admet-elle des dérivées partielles du second ordre en $(0,0)$?

178 CCINP 2019

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle\,,\rangle$.

Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$, dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Soit u un vercteur fixé de $\mathbb{R}^n$ et g l'application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ g(x)=\frac{1}{2}\langle f(x),x\rangle-\langle u,x\rangle.$$

1. Montrer que pour tout $h\in\mathbb{R}^n$, $\langle f(h),h\rangle\geqslant 0$.
2. Montrer que g est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer la différentielle de g en tout point de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que g admet sur $\mathbb{R}^n$ un unique point critique a et que $a=f^{-1}(u)$.
4. Montrer que g admet un extremum global en a.
   Indication : on pourra étudier le signe de l'application $h\mapsto g(a+h)-g(a)$.

179 TPE (Mines-Telecom) 2019

Soit f l'application de $[0,1]^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(1,1)=0$ et $\forall(x,y)\in[0,1]^2\setminus\{(1,1)\},\ f(x,y)=\dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$.
2. Justifier que f admet un maximum sur $[0,1]^2$, puis déterminer ce maximum ainsi que tout point en lequel il est atteint.

180 CCINP 2019

Soit $f:(x,y)\mapsto x^2+\left(y^3-y\right)^2$.

Déterminer les extremums de f ainsi que tous les points en lesquels ces extremums sont atteints.

181 CCINP 2019

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\ f(x,y)=x\left(\ln^2(x)+y^2\right).$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer les extremums locaux de f. La fonction f admet-elle des extremums globaux ?
3. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et $\mathscr{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z=f(x,y)$.
   Donner l'équation du plan affine tangent à $\mathscr{S}$ au point $(a,b,f(a,b))$.
   Quelle est l'équation du plan affine tangent à $\mathscr{S}$ au point $(1,0,f(1,0))$?
4. Exprimer la différentielle de f au point $(1,1)$.

182 CCINP 2018

Soit l'ouvert $\Omega=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid r>0 \text{ et } \theta\in]-\pi,\pi[\right\}$.

On considère l'application $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta),r\sin(\theta)).\end{array}\right.$

1. Prouver que φ établit une bijection de Ω sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.
2. Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $F=f\circ\varphi$.
   Ainsi, pour tout $(r,\theta)\in\Omega$, $F(r,\theta)=f(x,y)$ où $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$.
   Donner les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.
3. Déterminer toutes les fonctions $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant
$$\forall(x,y)\in U,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

183 TPE (Mines-Telecom) 2017

Soit la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^4+y^4-2(x-y)^2.\end{array}\right.$

Déterminer les extremums locaux de la fonction f.

184 TPE (Mines-Telecom) 2017

Soit la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^4+y^3-3y-2.\end{array}\right.$

Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction f.

14. Probabilités

185 Mines Telecom 2024 (Melvyn)

On lance 1000 fois un dé équilibré à 6 faces.

Montrer que la probabilité que la moyenne des lancers soit supérieure ou égale à 4 est inférieure à 2%.

186 ENSEA 2024 (Mickaël)

Des clients appellent une société. Chaque appel peut être traité en retard avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

1. Un client appelle 4 fois. On note X la variable aléatoire du nombre d'appels traités en retard.
   (a) Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.
2. On suppose que le nombre Y d'appel reçus suit une loi de Poisson de paramètre m et on note Z la variable aléatoire du nombre d'appels traités en retard.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Z = k \mid Y = n)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(Z = k,\ Y = n)$.
   (c) Déterminer la loi de Z.

187 Mines Telecom 2024 (Enio)

Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

Soit Y indépendante de X_1 et X_2 telle que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in]0,1[$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y X_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $(X_1 + 1) \sim \mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$. Calculer la probabilité que M soit inversible.
2. On suppose que $X_1 \sim \mathscr{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable.

188 CCINP 2022 (Perrine) couplé avec 36 - posé aussi à Mines-Ponts en 2023

Soit $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ des vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$, $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, $A = U \times U^\intercal$.

1. Calculer A puis A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.
   A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer la loi de $\operatorname{tr} A$. Que valent son espérance et sa variance ?
   Quelle est la probabilité que A soit une matrice de projection ?
3. Déterminer la loi de $\operatorname{rg} A$.
   Quelle est la probabilité que A ait au moins deux valeurs propres distinctes ?

189 CCINP 2021 (Mariette)

On considère un arbre dont N représente le nombre de fleurs à chaque saison. $N+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p = 0{,}1$.

La probabilité pour qu'une fleur devienne un fruit est de $2/3$ et la probabilité pour qu'un fruit parvienne à maturation est de $3/4$.

1. Calculer la probabilité d'avoir, à partir d'une fleur, un fruit qui arrive à maturation.
   Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.
   Combien de fleurs y a-t-il en moyenne chaque saison sur l'arbre ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
3. Calculer $\mathbb{P}(M = k)$ où M est le nombre de fruits arrivés à maturation.

190 Mines Telecom 2021 (Marcelin)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}^*$.

On dispose de n urnes dans lesquelles sont réparties na boules de manière aléatoire et indépendante.

On définit Y_n le nombre d'urnes vides, et $S_n = \dfrac{Y_n}{n}$

1. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.
   On pourra définir, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si l'urne numéro i est vide.
2. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

191 Mines Telecom 2021 (Amaury)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = |\{k \in [\![1,n]\!],\ k \wedge n = 1\}|$.

On écrit la décomposition primaire de n : $n = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}$

On tire aléatoirement k dans $[\![1,n]\!]$.

On note A l'événement « le nombre tiré est premier avec n » et, pour tout i entre 1 et N, A_i l'événement « le nombre tiré est divisible par p_i ».

1. Donner un espace probabilisé décrivant l'expérience.
2. Exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de $\varphi(n)$ et n.
3. Montrer que $\mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{p_i}$.
4. Montrer que la famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.
5. En déduire une expression de $\varphi(n)$ à l'aide de n et des p_i.

192 CCINP 2021 (Patrick)

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$. En déduire $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$ puis que $\mathbb{P}(X \leqslant Y) > \frac{1}{2}$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire $\mathbb{P}(Z > X + Y)$.

193 CCINP 2019

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) > 0$.

On appelle **taux de panne** de X la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geqslant n).$$

1. Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   a) Montrer que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
   b) Calculer le taux de panne $(y_n)_{n \geqslant 1}$ de Y.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$.
3. En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction de $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$.
4. Déterminer toutes les lois de probabilités pour lesquelles le taux de panne est constant.

194 CCINP 2019

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires indiscernables les unes des autres. On tire n boules simultanément.
   a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
   b) Montrer que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Une puce se déplace sur une droite. Elle effectue des sauts de même amplitude, à intervalles de temps successifs égaux. Elle se déplace dans les deux sens avec la même probabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n la probabilité qu'elle se trouve à l'origine O (sa position initiale) après le n-ième saut.
   a) Calculer c_{2n-1} et c_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Déterminer un équivalent de c_{2n} à l'aide de la formule de Stirling.
   En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_{2n}$.
   Interpréter ce résultat.
3. La puce se déplace désormais dans un plan. Elle effectue des sauts de même amplitude, à intervalles de temps successifs égaux. Elle se déplace dans les quatre sens (gauche, droite, haut et bas) avec la même probabilité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n la probabilité qu'elle se trouve à l'origine O (sa position initiale) après le n-ième saut.
   a) Calculer d_{2n-1} et d_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) Déterminer un équivalent de d_{2n}.
   En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_{2n}$.
   Interpréter ce résultat.

195 CCINP 2019

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de probabilité de Y_n. En déduire $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \neq j$. Calculer $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$.
   La suite $(Y_n)_{n\geqslant}$ est-elle une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance et la variance de $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n}$.
   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}\left(\left|Z_n - p^2\right| \geqslant a\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

196 Mines-Telecom 2018

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $Y_n = \frac{1}{2}(1 + X_n)$ et $\displaystyle Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_n.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Z_n.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n.
4. Soit $(d,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [1, +\infty[$. Déterminer la variance de $d S_{\lfloor t \rfloor}$.

197 CCINP 2018

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $p \in]0,1[$, $q = 1 - p$ et $(\lambda, \mu) \in]0,1[^2$.
On pose $\Omega = [\![1, n+1]\!]$ et on note $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ les deux applications définies sur Ω par

- pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}_1(k) = p q^{k-1}$ et $\mathbb{P}_1(n+1) = \lambda$;
- $\mathbb{P}_2(1) = 0$, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}_2(k) = (k-1) p^2 q^{k-2}$ et $\mathbb{P}_2(n+1) = \mu$.

1. Déterminer λ et μ pour que $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ définissent une loi de probabilité sur Ω.
2. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue n tirages successifs avec remise. On note X et Y les variables aléatoires respectivement égales au rang du premier tirage d'une boule blanche et au rang du deuxième tirage d'une boule blanche. Si aucune boule blanche n'est tirée, X prend la valeur $n+1$, et si une seule boule blanche est tirée, Y prend la valeur $n+1$.
   a) Déterminer les lois de probabilité de X et Y.
   b) Calculer l'espérance de X.

198 Mines-Telecom 2017

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(U_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, U_i suit la loi géométrique de paramètre p.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\displaystyle T_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$.
Indication : on pourra utiliser la fonction génératrice de T_n.

199 CCINP 2018

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle Y_n = \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(Y_n > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   b) Déterminer la loi de Y_n, la reconnaître puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   a) Montrer que Z admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(Z > k)$ converge.
   b) Montrer que si Z admet une espérance, alors $\displaystyle\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > k)$.
   c) Retrouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de Y_n.

200 CCINP 2017

Soit $X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}$ quatre variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\mathbb{P}\left(X_{i,j} = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_{i,j} = -1\right) = \dfrac{1}{2}$. On pose $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
   b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
   c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
   b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
   c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.