481. ★★ On étudie un groupe de cellules. À l'instant initial, $n = 0$, il y en a une. À chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3. Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.

482. ★★ Soient $p \in]0,1[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$ avec une probabilité p et $X_{n+1} = 0$ avec probabilité $1 - p$. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

483. Soit Ω un ensemble. On dit que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone si elle vérifie :
(i) $\Omega \in \mathcal{M}$, (ii) $\mathcal{M}$ est stable par union croissante,
(iii) si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{M}$.
a) Montrer qu'une intersection de classes monotones est une classe monotone.
b) Montrer qu'une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.
c) Soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection finie. Montrer que la classe monotone D engendrée par C (c'est-à-dire la plus petite classe monotone contenant C) est une tribu.

Mines - Ponts – MP - MPI

Algèbre

484. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}(-3)^k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$.

485. Soient $(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application définie sur l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ par $f(\sigma) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ admet un minimum et un maximum à expliciter.

486. On note φ la fonction indicatrice d'Euler.
a) Calculer $\varphi(7)$ et $\varphi(37044)$.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) \geqslant \dfrac{n\ln 2}{\ln n + \ln 2}$.

487. Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $a \wedge b = 1$ si et seulement si, pour tout $n \geqslant ab$, il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = n$.

488. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = 2^{2^n} + 1$.
a) Montrer que, si m et n sont deux entiers naturels distincts, $F_m \wedge F_n = 1$.
b) Retrouver à l'aide de la question précédente que l'ensemble des nombres premiers est infini.

489. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer et dénombrer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

490. Soit G un groupe fini non réduit à l'élément neutre et tel que : $\forall g \in G,\ g^2 = e$.
a) Montrer que G est abélien.

b) Soit H un sous-groupe strict de G et $a \in G \setminus H$. Montrer que $H \cup aH$ est un sous groupe de G et que l'union est disjointe.
c) Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.
d) Calculer le produit des éléments de G.

491. Soient G un groupe fini et $\Omega = G^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme.
On pose : $C = \{(x,y) \in G^2 \ ;\ xy = yx\}$ et $p = \mathbf{P}(C)$.
a) Montrer que $p > 0$. Que dire si $p = 1$?
Dans la suite, on suppose que G n'est pas commutatif.
b) Calculer p lorsque $G = \mathcal{S}_3$ puis lorsque $G = \mathcal{S}_4$.
c) On définit la relation $\sim$ sur G^2 par : $x \sim y \iff \exists g \in G, x = gyg^{-1}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
d) On note s le nombre de classes d'équivalence. Montrer que : $p = \dfrac{s}{\operatorname{card} G}$.

492. Soit G un groupe abélien. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, et $x \in G$ d'ordre a et $y \in G$ d'ordre b. Montrer que xy est d'ordre ab.

493. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative, telle qu'il existe $e \in G$ vérifiant $xe = x$ pour tout $x \in G$, et, pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que $xx' = e$. Montrer que $(G,\cdot)$ est un groupe.

494. Soit $\alpha = e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (\alpha^{2^{-k}} + \bar{\alpha}^{2^{-k}})$.

495. Soit n un entier $\geqslant 2$. On pose $Q = 1 + 2X + \cdots + nX^{n-1}$. Calculer $\displaystyle\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} Q(\zeta)$, où $\mathbb{U}_n$ désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unité.

496. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ des nombres réels, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ des éléments de $\mathbb{N}^*$ et $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X - x_k)^{\alpha_k}$. Quel est le nombre de racines réelles distinctes de P' ?

497. *a)* Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^n + \dfrac{1}{x^n}$.
b) Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $2\cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.

498. Soient $0 < a_0 < \cdots < a_n$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = (X-1)P$.
a) Soient $p \geqslant 2$ et $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z_1 + \cdots + z_p| = |z_1| + \cdots + |z_p|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $z_k = \lambda z_1$.
b) Justifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Q(z)| \leqslant Q(|z|)$.
c) Montrer que les racines de P sont de module strictement inférieur à 1.

499. Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$.

500. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
a) À quelle condition a-t-on $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$?
b) À quelle condition a-t-on $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?
c) À quelle condition a-t-on $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$?

501. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. On note $r^+(P)$ le nombre de racines de P dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $N(P)$ le nombre de coefficients non nuls de P.
a) Que dire de P si $N(P) = 1$? si $N(P) = 2$?
b) Montrer que : $r^+(P) \leqslant r^+(P') + 1$.
c) On suppose que $P(0) = 0$. Montrer que : $r^+(P) \leqslant r^+(P')$.
d) Montrer que : $r^+(P) \leqslant N(P) - 1$.
e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $0 < x_1 < \cdots < x_n$ des réels et $0 \leqslant p_1 < \cdots p_n$ des entiers. Montrer que : $\det\left(x_i^{p_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} > 0$.

502. Soit P un polynôme à coefficients complexes.
a) Donner la décomposition en éléments simples de P'/P.
b) Montrer que l'enveloppe convexe des racines de P' est incluse dans l'enveloppe convexe des racines de P. Que dire si P est un polynôme à coefficients réels scindé dans $\mathbb{R}$?
c) Montrer que si un demi-plan fermé H contient une racine de P' alors H contient une racine de P.

503. *a)* Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux, montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix}$ est inversible.
b) On pose $\alpha = 2^{1/3}$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$.
Montrer que $a = b = c = 0$.

504. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.
a) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$; (ii) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$; (iii) $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$.
b) En dimension infinie, donner des contre-exemples.
c) En dimension finie ou infinie, montrer que : (iii) $\iff$ ((i) et (ii)).

505. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que, si F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f, on a $\operatorname{Im}(f) \subset F$.

506. Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\phi = M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$. En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

507. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tels que : $\forall i, j,\ p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$. Montrer que les p_i sont de rang 1 et que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(p_i)$.

508. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
a) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $uvu = u$ et $vuv = v$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$.
b) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, F_1 un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u)$ dans F. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\operatorname{Ker} v = F_1$, $\operatorname{Im} v = E_1$, $uvu = u$ et $vuv = v$.

509. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que : $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim E \leqslant \operatorname{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.
b) On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$, $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$, $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

510. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $(u - a\,\mathrm{id}) \circ (u - b\,\mathrm{id}) = 0$. On pose $p = \dfrac{1}{b-a}(u - a\,\mathrm{id})$ et $q = \dfrac{1}{a-b}(u - b\,\mathrm{id})$. Déterminer p^2, q^2, $p \circ q$, $q \circ p$ et $p + q$ puis montrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}(q)$.

511. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(e_n) = e_{n+1}$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(v) = uv - vu$.
a) Montrer que Φ n'est pas injectif et que la dimension de $\operatorname{Ker} \Phi$ est infinie.
b) Soient $x_0 \in E$ et $w \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\Phi(v) = w$ et $v(e_0) = x_0$.

512. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont E et $\{0\}$. Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul et tout $y \in E$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

513. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $n - 1$. Montrer que u admet exactement $n + 1$ sous-espaces stables.

514. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Trouver les endomorphismes de E qui commutent avec tous les automorphismes de E.

515. *a)* Soient $n \geqslant 2$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers telle que, pour tout i, $b_{i,i}$ soit impair et, pour tout (i, j) avec $i \neq j$, $b_{i,j}$ soit pair. Montrer que B est inversible.
b) La propriété est-elle encore vérifiée lorsqu'on intervertit « pair » et « impair » ?

516. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$. Déterminer une condition nécessaire sur n et A pour qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

517. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = B^3$. On suppose que A est de rang 1. Donner une relation entre $\operatorname{tr} A$ et $\operatorname{tr} B$.

518. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux éléments de $\{-1, 1\}$ telle que $A + D$ soit inversible.

519. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ réels. On note $V = (x_i^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
a) Calculer le déterminant de la matrice V.
b) Montrer que V est inversible et calculer son inverse.
Ind. On pourra interpréter V comme matrice de passage dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

520. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est libre si et seulement s'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que la matrice $(P_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ soit inversible.

521. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $fg - gf = \mathrm{id}$.
a) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $fP(g) - P(g)f = P'(g)$.
b) Montrer que $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.
c) Si $E = \mathbb{R}[X]$, donner un exemple de couple (f, g) vérifiant les relations précédentes.

522. Soient $n \geqslant 2$ et E un ensemble à n éléments. On pose $N = 2^n - 1$ et $E_1, \dots, E_N$ les parties non vides de E. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, et 0 sinon. Calculer $\det A$.

523. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det\left((f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \neq 0$.

524. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur E.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $(f_1, \dots, f_p)$ est libre,
ii) l'application $\varphi : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ est surjective de E sur $\mathbb{C}^p$,
iii) il existe $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que $\det\left((f_i(x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant p}\right) \neq 0$.

525. Soient $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec A inversible et M de rang 1.
a) On suppose que $\det(A + M) = 0$. Que dire de $\operatorname{tr}\left(A^{-1}M\right)$?
b) On suppose que $\det(A + M) \neq 0$. Donner une expression de $(A + M)^{-1}$.

526. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$. Étudier l'inversibilité de M, et le cas échéant, déterminer M^{-1}.

527. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B nilpotente et $AB = BA$.
a) Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
b) Calculer $(A + B)^{-1}$ quand A est inversible.

528. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 = 0$ si et seulement si A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $2r \leqslant n$.

529. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = X^n - X + 1$.
a) i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet au plus une racine réelle.
ii) Donner les racines des P_n'.

iii) Montrer que les P_n sont à racines simples.
b) Notons r_1, r_2 et r_3 les racines de P_3. Calculer $\begin{vmatrix} r_1+1 & 1 & 1 \\ 1 & r_2+1 & 1 \\ 1 & 1 & r_3+1 \end{vmatrix}$.

530. *a)* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension p. Montrer que u est une homothétie.
b) Soient $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A n'est pas scalaire et que M commute avec toutes les matrices semblables à A. Que dire de M ?
c) Même question pour deux matrices réelles.

531. Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, montrer que $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ le sont aussi.

532. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, si $t \in \mathbb{R}^+$, $\det(A^2 + tI_n) \geqslant 0$.

533. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $G = \{P(N), P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } P(0) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

534. Soient $n \geqslant 2$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversibles telles que $(AB)^n = 0$.
a) Montrer que $(BA)^n = 0$.
b) On suppose que $(AB)^{n-1} \neq 0$ et $(BA)^{n-1} \neq 0$.
Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Ker}((AB)^k) = \mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Ker}((BA)^k) = \mathrm{Ker}(A)$.
c) Conclure.

535. ★ Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle et non inversible.
a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(A^p) \oplus \mathrm{Ker}(A^p)$.
b) Montrer qu'il existe $r \in [\![1, n-1]\!]$, $A_0 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ nilpotente tels que A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$
c) On suppose qu'il existe $m \geqslant 2$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A^m B = A$.
Montrer que $A^m B = A^{m-1}BA = \cdots = BA^m$.

536. Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$.
a) Calculer le déterminant de la matrice $(P^{(i)}(\alpha_j))_{0\leqslant i,j\leqslant n}$.
b) Montrer que $(P(X + \alpha_j))_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

537. Soient $n > 2$, $m = 2^n - 2$, $E = [\![1, n]\!]$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing, E\}$.
a) Montrer qu'il existe une unique bijection $g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ telle que $\forall \alpha \in \mathcal{F}$, $g(\alpha) \cap \alpha = \varnothing$.
b) On se donne une énumération $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de $\mathcal{F}$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,j} = -1$ si $\alpha_i \cap \alpha_j = \varnothing$ et 0 sinon. Calculer $\det(A)$.

538. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = 2n$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est égale à $\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

539. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall M \in G,\ M^2 = I_n$. Montrer que G est fini.

540. Soit I l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
a) Préciser la structure algébrique de I.
b) Montrer que $A \in I$ si et seulement si $\det A \in \{-1, 1\}$.
c) Pour toute colonne X à coefficients entiers, on note $\alpha(X)$ le pgcd de ses coefficients. Montrer que $A \in I$ si et seulement si, pour toute colonne X à coefficients entiers, $\alpha(AX) = \alpha(X)$.

541. Déterminer les parties $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $(G, \times)$ est un groupe multiplicatif mais pas un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que toutes les matrices de G ont même rang.

542. Soit $f \in \mathrm{GL}\,(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ vérifiant : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(A)f(B)$.
a) Calculer $f(I_n)$.
b) On pose $\Delta = \mathrm{Diag}(1, \dots, n)$. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(\Delta) = P\Delta P^{-1}$. Montrer que, pour toute matrice diagonale D, on a : $f(D) = PDP^{-1}$.
c) Expliciter f.

543. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $AB - BA = cA$.
a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(A - cI_n)^k B = BA^k$.
b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-ct}e^{tA}B = Be^{tA}$.

544. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est *stochastique* si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(tA)$ soit stochastique pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

545. ***a)*** Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Trouver une relation entre χ_{MN} et χ_{NM}.
b) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $B = (1 + a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on écrit $A^{-1} = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et on pose enfin $S = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{ij}$. Trouver une relation entre $\det A$, $\det B$ et S.

546. Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et préciser ses éléments propres.
b) Déterminer les éléments propres de la matrice A.

547. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$. À quelle condition M est-elle diagonalisable ?

548. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 \neq b^2$. Diagonaliser si possible la matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = a$ si $i + j$ est pair et $a_{i,j} = b$ sinon.

549. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
a) Justifier que A est diagonalisable lorsque $k \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que $\chi_A = X^2(X - u_1)(X - u_2)$ avec $u_1 + u_2 = k$ et $u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6$.
c) À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

550. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = j$ si $i \neq j$ et 0 sinon.
a) Calculer $\det(A + kI_n)$ pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$.
b) ***i)*** Montrer que A a n valeurs propres distinctes.
ii) Pour λ valeur propre de A, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
c) Déterminer la somme et le produit des valeurs propres de A.

551. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices A et A^T sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

552. Soit ω un nombre complexe non réel
a) Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\omega^2 = \alpha\omega + \beta$.
b) Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = \lambda + \mu\omega$.
c) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $2n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u^2 = \alpha u + \beta\,\mathrm{id}_E$. On pose $(\lambda + \mu\omega) * x = \lambda x + \mu u(x)$ pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in E$. Montrer que $(E, +, *)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
d) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Montrer que $e = (e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
e) Quelle est la matrice de u dans e ? Son polynôme caractéristique ?

553. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E, $u \in \mathrm{GL}(E) \setminus \{\mathrm{id}\}$ tel que $\forall x \in H$, $u(x) = x$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
(i) pour tout supplémentaire S de H dans E, il existe $x \in S$ tel que $u(x) \neq x$;
(ii) u est diagonalisable ;
(iii) u admet une valeur propre autre que 1 ;
(iv) $\det(u) \neq 1$;
(v) l'image de $u - \mathrm{id}$ n'est pas contenue dans H ;
(vi) il existe $\lambda \neq 1$ et une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, \lambda)$.

554. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.
Soit $\Phi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \dfrac{su + us}{2}$. Déterminer les éléments propres de Φ puis étudier sa diagonalisabilité.

555. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices non nulles. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = M + \mathrm{tr}(AM)B$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de f.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.
c) Déterminer les éléments propres de f.

556. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur B pour que l'équation $A^3 = B$ admette au moins une solution.

557. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $L(P) \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)\, e^{-t} \mathrm{d}t$.
a) Montrer que L définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
b) Montrer que $L = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} D^k$ où D est l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{R}[X]$.
c) Déterminer les éléments propres de L.
d) Déterminer le commutant de L.

558. Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ tel que, pour tout $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(u)\, \mathrm{d}u$ si $x \neq 0$, $\phi(f)(0) = f(0)$.
a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
b) Trouver les éléments propres de φ.
c) Montrer que φ stabilise $\mathbb{R}_n[X]$.

559. ★ Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{C}^0([-1,1], [-1,1])$ surjective et croissante. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall f \in E$, $\Phi(f) = f \circ g$. On considère $F \neq \{0\}$ un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ.
a) Montrer que Φ_F est un automorphisme.
b) Montrer que 1 est l'unique valeur propre de Φ_F.
c) Montrer que $u = \Phi_F - \mathrm{id}_F$ est nilpotent.

560. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v = P(u)$.

561. Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble $\{M^k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ soit fini ?

562. Trouver les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que PA est diagonalisable pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

563. Soit $A = \begin{pmatrix} aM & bM \\ bM & cM \end{pmatrix}$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$. Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de a, b, c et M.

564. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BC$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

565. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $A^p = I_n$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $m \geqslant 3$. On suppose que les coefficients de $A - I_n$ sont divisibles par m. Montrer que $A = I_n$.

566. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{M} = \left(\overline{M_{i,j}}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant, n}$.
a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que $\alpha M + \overline{\alpha} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Montrer l'équivalence entre :
(i) $M\overline{M} = \lambda I_n$ avec $\lambda \geqslant 0$, (ii) $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\exists \mu \in \mathbb{C}$, $M = \mu P \overline{P}^{-1}$.
c) Montrer l'équivalence entre : (i) $M\overline{M}$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\left(M\overline{M}\right) \subset \mathbb{R}^+$,
(ii) $M = PD\overline{P}^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale.

567. ***a)*** Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n \geqslant 0}$ de polynômes telle que $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$, $\deg(P_n) = n$.
b) Soit $n, N \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ telle que $P_n(A) = 0$. Montrer que A est diagonalisable.
c) Soit $n \geqslant 2$. Résoudre le système $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$ en convenant que $x_0 = x_{n+1} = 0$.

568. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont soit de taille 1, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

569. Soient A et B deux matrices non cotrigonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure et $P^{-1}BP$ triangulaire inférieure.

570. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Soit F un plan stable par f. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré au plus 2 tel que : $F \subset \mathrm{Ker}\, P(f)$.

b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré 2 divisant le polynôme minimal de f. Montrer qu'il existe un plan F stable par f tel que $F \subset \operatorname{Ker} P(f)$.

571. Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur χ_u pour que les seuls sous-espaces stables par u soient $\{0\}$ et E.

572. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre : (i) $BA = 0$ et B nilpotente, (ii) $\forall M \in E$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

573. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{sp} A \cap \operatorname{sp} B = \emptyset$.
a) Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique matrice X telle que $AX - XB = M$.

574. Quelles sont les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec chaque matrice de leur classe de similitude ?

575. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) On suppose que $AB - BA = \alpha A$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.
b) On suppose que $AB - BA = \alpha A + \beta B$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

576. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) On suppose que A et B admettent une valeur propre commune λ. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AC = CB = \lambda C$.
b) On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AC = CB$, et on note r le rang de C. Montrer que χ_A et χ_B admettent un diviseur commun de degré r.
c) Étudier la réciproque.

577. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $C(A)$ la sous-algèbre des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec A.
a) On suppose que A est diagonalisable. Calculer la dimension de $C(A)$. À quelle condition a-t-on $C(A) = \mathbb{C}[A]$?
b) Montrer que, sans hypothèse sur A, la dimension de $C(A)$ est supérieure ou égale à n.

578. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $C(A)$ la sous-algèbre des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec A. À quelle condition sur A est-il vrai que $C(A)$ ne contient aucune matrice nilpotente non nulle ?

579. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
a) Supposons $\deg P \geqslant 2$. Montrer que, si P est scindé à racines simples, P' l'est également.
b) Calculer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
c) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $B = 0$.

580. Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de E telle que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$ pour tout $x \in E$.
a) Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.
b) On remplace l'hypothèse « $(e_1, \dots, e_n)$ est libre » par « les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont non-nuls ». Le résultat subsiste-t-il ?

581. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soient $\delta > 0$ et A une partie de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\forall (x, y) \in A^2, x \neq y \implies \|x - y\| = \delta$.
a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $u_0, \dots, u_p \in A$ distincts. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par : $m_{i,j} = \langle u_i - u_0, u_j - u_0 \rangle$. Montrer que M est inversible.
b) Montrer que A est finie.

582. ***a)*** Montrer que $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
b) ***i)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
ii) Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, degré et coefficient dominant de T_n.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n.
Calculer $\displaystyle\min_{P \in U_n} \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

583. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $|\det M| \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2}$.

584. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k$ pour tout $n \geqslant 0$.

585. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme 1-lipschitzien. Montrer que : $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(f - \mathrm{id})$.

586. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non nulle.
Déterminer l'image de l'application $\phi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x^T M x$.

587. Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que l'application $f : x \in E \mapsto \dfrac{x}{\max(\|x\|, 1)}$ est 1-lipschitzienne.

588. Soit (a, b, x_0) une famille libre d'un espace euclidien E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $u(x_0) = a$ et $u^*(x_0) = b$.

589. Soient E un espace euclidien, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ des projecteurs orthogonaux. Montrer que $q \circ p$ est un projecteur si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

590. Soient E un espace euclidien, u et v dans $\mathcal{O}(E)$ telles que $\det(u)\det(v) < 0$. Calculer $\|v - u\|_{\text{op}}$.

591. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle $d_n(\mathbb{K})$ la dimension du plus grand sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont diagonalisables.
a) Que peut-on dire du spectre réel d'une matrice antisymétrique ?
b) Déterminer $d_n(\mathbb{R})$.
c) Déterminer $d_2(\mathbb{C})$.

592. Soit $n \geqslant 3$. Soient $A, B \in \mathbb{R}^n$ non colinéaires. On pose : $M = AB^T + BA^T$.
a) Montrer que M est diagonalisable.
b) Déterminer $\operatorname{rg} M$.
c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M.

593. Soit $J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M^T J M = J\}$.
a) Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.
b) Caractériser les éléments de $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap G$.

594. Décrire $\{e^A\ ;\ A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$.

595. Soient $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{+*}$ continue et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(e^{xA}) > 0$.

596. *a)* Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que
$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), f(Px) = Pf(x)P^{-1}$.
b) Même question en remplaçant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

597. *a)* Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$.
b) On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ telles que $-1 \notin \mathrm{Sp}(M)$. Montrer que l'application $\phi : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}, M \mapsto (I_n + M)(I_n - M)^{-1}$ est une bijection.
c) Soit $Q \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Résoudre l'équation : $(I_n + X)(I_n - X)^{-1} = Q$ d'inconnue $X \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

598. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$

599. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
Soient $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ et $f : x \mapsto \langle x, e_1\rangle\, e_2 + \langle x, e_1\rangle\, e_1$.
a) Si e_1 et e_2 sont linéairement indépendants, montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$.
b) Étudier la réciproque.

600. Soit E un espace réel de dimension $n \geqslant 2$. Lorsque Φ est un produit scalaire sur E, on note $\mathcal{O}_\Phi(E)$ le groupe des isométries pour Φ, et $\mathcal{S}_\Phi^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs pour Φ.
a) On fixe un produit scalaire Φ. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) Ψ est un produit scalaire, (ii) $\exists a \in \mathcal{S}_\Phi^{++}(E), \Psi(x,y) = \Phi(a(x), y)$.
b) Soit $u \in \mathcal{O}_\Phi(E)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in \mathcal{O}_\Psi(E)$ (on utilisera l'endomorphisme a de la question précédente).
c) Soit P l'ensemble des produits scalaires sur E. Déterminer $\bigcap\limits_{\Psi\in P} \mathcal{O}_\Psi(E)$.

601. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(Me_1, \ldots, Me_n)$ soit orthogonale.

602. Soit k un réel fixé. On pose $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,A} \lambda \geqslant k+1$ et $\min\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,A} \lambda \geqslant k-1$.

603. Soit $\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer l'équivalence des énoncés suivants : (i) $x^T S x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
(ii) $\mathrm{Sp}\, S \subset \mathbb{R}^+$, (iii) il existe $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = T^2$.
Désormais, on suppose ces conditions réalisées.
b) Montrer que, pour tous $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ et $x, y \in \mathbb{R}$, $s_{i,i}x^2 + 2s_{i,j}xy + s_{j,j}y^2 \geqslant 0$. En déduire que $s_{i,j}^2 \leqslant s_{i,i}s_{j,j}$.
c) On suppose de plus les coefficients de S non nuls, et on pose $T = \left(\dfrac{1}{s_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\operatorname{rg} S = 1$.

604. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2 + S + I_n$.
b) À quelle condition la matrice S est-elle unique ?

605. Soient $A, C \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & C \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
b) On suppose ici que $B = 0$. Donner une base de diagonalisation de M construite à partir de vecteurs propres de A et C.
c) Montrer que, pour tous $E \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}(EG) = \operatorname{rg}(GE) = \operatorname{rg}(G)$.
d) On suppose ici que A est inversible. On pose $P = \begin{pmatrix} I_2 & A^{-1}B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$. Calculer MP. En déduire le rang de M.

606. Soit $A = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que A est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

607. Soit $A_n = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que les valeurs propres de A_n sont dans $]0,\pi[$ et que la plus petite valeur propre de A_n est inférieure à $\frac{1}{2n+1}$. On pourra montrer que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$.

608. Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{S}(E)$, a et b deux réels tels que $a < b$, $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [a,b], P(x) > 0$. On suppose que $\forall x \in E,\ a\|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \leqslant b\|x\|^2$. Montrer que $P(u) \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

609. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est combinaison linéaire de quatre matrices orthogonales.

610. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^TA = A^TA$. Montrer que si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ stable par A alors $F^\perp$ est stable par A^T. On suppose $n = 3$. Montrer que A est soit diagonalisable, soit semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$.

611. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.
b) Déterminer $\sup\limits_{A\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{tr}(AM)$.

612. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.
a) Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im} u$.
b) Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = h^2$.
c) Soient $f, g \in \mathcal{S}^+(E)$ tels que $\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.
Montrer que $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

613. Soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec S^2. Montrer que A commute avec S.

614. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ telles que $A^2B^2 = B^2A^2$. Montrer que $AB = BA$.

615. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application $f : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^k$.

616. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ pour tout i telles que $P^TM^TMP = D^2$.
b) On note $V_1, \ldots, V_n$ les colonnes de MP.

Soit Q la matrice dont les colonnes sont $\frac{1}{\lambda_1}V_1, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}V_n$. Montrer que $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
c) Montrer qu'il existe O, O' dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = ODO'$.
d) Montrer le même résultat si M est non inversible.

617. Soit $n \geqslant 2$.
a) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Déterminer le plus petit sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

618. Soit $n \geqslant 2$.
a) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P^TP$.
b) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
c) Soient $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
Montrer que $|\det(\alpha_1A_1 + \cdots + \alpha_kA_k)| \leqslant \det(|\alpha_1|A_1 + \cdots + |\alpha_k|A_k)$.

619. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\|$.
b) Montrer que $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1,\|y\|=1} |\langle u(x), y\rangle| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1} |\langle u(x), y\rangle|$.
c) On suppose u symétrique. Montrer que $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle u(x), x\rangle| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |\langle u(x), x\rangle|$.

620. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note r la plus petite valeur propre de $A^\top A$ et R la plus grande.
Montrer que $\|A\|^2 = R$ et $\|A^{-1}\|^{-2} = r$.

Analyse

621. Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $N : f \mapsto \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}$.
a) Montrer que N est une norme sur E.
b) Comparer N à la norme $\|\ \|_\infty$.

622. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'|$.
a) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, N_a est une norme.
b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

623. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}^n)$. Montrer que $\left\|\int_a^b f\right\| = \int_a^b \|f\|$ si et seulement s'il existe $\Phi \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}^+)$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall t \in [a,b],\ f(t) = \Phi(t)u$.

624. On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0\}$.
a) Montrer que $\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$ définit une norme sur E.
b) Les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_\infty$ sur E sont-elles équivalentes ?

625. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Construire une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que : $N(X^n - Q) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

626. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ et $a_n = \inf_{P\in E_n} N(P)$.
a) Montrer que $a_n > 0$; calculer a_0 et a_1.
b) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle.

627. Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

628. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_Q = \sup_{x\in[-1,1]} |PQ(x)|$.
a) Montrer que $\| \ \|_Q$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
b) À quelle condition sur Q la norme $\| \ \|_Q$ est-elle équivalente à $\| \ \|_1$ (norme associée au polynôme égal à 1) ?
c) Soit $c \in [-1,1]$ une racine de Q. Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(c) = 1$, $P'(c) = 0$ et $\forall x \in [-1,1] \setminus \{c\}, 0 \leqslant P(x) < 1$.
d) Montrer que $\|P^n\|_Q \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
e) Qu'en déduire ?

629. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E, $f : [0,1] \to E$ continue. On suppose que $f(0) \in A$ et $f(1) \in E \setminus A$. Montrer que $f([0,1]) \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.

630. On munit $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des points distincts de $[a,b]$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des réels. Montrer que l'adhérence de l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X]; \forall i \in [\![1,n]\!], P(x_i) = y_i\}$ est $\{f \in E; \forall i \in [\![1,n]\!], f(x_i) = y_i\}$.

631. On munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme $\|P\| = \max |p_k|$ où $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$.
Déterminer les valeurs $b \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $f : P \mapsto P(b)$ est continue.

632. Soient C une partie convexe d'un espace normé E, X une partie de E telle que $C \subset X \subset \overline{C}$. Montrer que X est connexe par arcs.

633. *a)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}(z)|^n \leqslant |P(z)|$.
b) On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables. Montrer que $\mathcal{T}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'adhérence de $\mathcal{D}$ est $\mathcal{T}$.

634. *a)* Montrer que l'image par une fonction continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs.
b) Montrer qu'une fonction continue injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone.
c) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $F : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}$. On suppose que F envoie toute matrice inversible sur une matrice inversible.
i) Montrer que f est injective et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

ii) Montrer que $f(0) = 0$.

635. ★ Soient E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle. Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
a) Montrer que : $\|f\|_{\mathrm{op}} = \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \mathrm{Ker} f)}$.
b) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\exists a \in E, \|f\|_{\mathrm{op}} = \dfrac{|f(a)|}{\|a\|}$; (ii) $\exists y \in \mathrm{Ker} f, d(x_0, \mathrm{Ker} f) = \|x_0 - y\|$.

636. ★ Soient $\| \ \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \ \|_{\mathrm{op}}$ la norme d'opérateur associée.
a) i) Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
ii) Montrer qu'elle est sous-multiplicative.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_k(A) = \left(I_n + \dfrac{1}{k}A\right)^k$.
i) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que $(u_k(A))$ est une suite convergente et préciser sa limite.
ii) Montrer le même résultat dans le cas général.

637. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que e^A est un polynôme en A. Est-ce que A est un polynôme en e^A ?

638. ★ *a)* Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout couple (A, B) de matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $N(AB) = N(BA)$?

639. Soient $\| \ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|M\| = 1\}$.
a) Montrer qu'il existe $U \in S$ telle que $\det U = \max_{M\in S} \det M$ et montrer que U est inversible.
b) On pose $N(A) = \max_{M\in S} \mathrm{tr}(AM)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que N est une norme.
c) Que dire de $N(U^{-1})$? Le calculer pour $n = 2$.

640. Soient E un espace vectoriel normé et $f, g \in \mathcal{L}_c(E)$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f \circ g - g \circ f = \lambda\, \mathrm{id}$. Montrer que $\lambda = 0$.

641. Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel normé de dimension finie. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée. On note G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ vérifiant $\|g - \mathrm{id}\| < 1$ pour tout $g \in G$.
a) Montrer que $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathbb{U}$ pour tout $g \in G$.
b) Montrer que $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$ pour tout $g \in G$.

642. Soit E l'espace des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, μ une forme linéaire sur E envoyant toute fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ sur un élément de $\mathbb{R}^+$. On munit E de la norme uniforme sur $\mathbb{R}$. Montrer que μ est continue.

643. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{1}{16^n}\displaystyle\sum_{k=n}^{3n}\binom{4n}{k}$.

644. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{n+1}$.
a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que, si $u_{k+1} \leqslant u_k$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant k+1}$ est strictement décroissante.
b) Montrer que, si la suite (u_n) est croissante, alors sa croissance est stricte.
Que dire de sa limite ?
c) On admet que $e^{e-2} < 9/4$. Montrer que, pour x suffisamment petit, la suite (u_n) converge.

645. Soit $\alpha > 1$. On considère l'équation : $(E_n) : \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(kx+n^2) = \alpha n^{2n}$.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) possède une unique solution strictement positive. On la note x_n.
b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n < 2\alpha$.
c) Montrer la convergence et calculer la limite de la suite (x_n).

646. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) \to +\infty$ et $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\left\{e^{if(n)}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans le cercle unité.

647. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n.
a) Montrer que si (u_n) converge alors sa limite ℓ est un point fixe de f. Dans la suite on considère a un point fixe de f.
b) On suppose que $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $k > 1$ tel que $|f'(x)| \geqslant k$ pour $x \in]a-\eta, a+\eta[$. Si $|f'(a)| > 1$ décrire les suites (u_n) qui convergent vers a.
c) On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $k \in [0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$ pour $x \in]a-\eta, a+\eta[$. Montrer que la suite (u_n) converge vers a si et seulement s'il existe un rang p tel que $u_p \in]a-\eta, a+\eta[$.

648. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+2}$.
Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $u_N > 1$.
a) Montrer qu'il existe $n_0 > N$ tel que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.
b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, trouver sa limite.

649. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction bornée et telle que $|f(x)-f(y)| < |x-y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \neq y$. On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_1 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = f(u_n) + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. On pose enfin $a_n = |u_{n+1} - u_n|$ pour tout $n \geqslant 1$.
a) Soient p et q des entiers tels que $1 \leqslant p < q$. Montrer que $a_q - a_p \leqslant \dfrac{1}{p}$.
b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

650. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$.
a) Montrer que la suite (u_n) converge.
b) On suppose $u_0 > 0$ et on pose $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
i) Montrer la convergence de la suite (v_n) vers un réel α puis que $0 \leqslant \alpha - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n u_n}$.
ii) Donner un équivalent de u_n.
c) Donner un équivalent de u_n dans le cas $u_0 \in]-1, 0[$.

651. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $[0,1]$. On dit que (u_n) est équirépartie si et seulement si, pour tous $\alpha < \beta$ dans $[0,1]$, on a $\dfrac{1}{n}\,\mathrm{card}\left\{k \in [\![1,n]\!], \alpha < u_n < \beta\right\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha$.
a) On suppose (u_n) équirépartie. Montrer que (u_n) diverge. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[0,1]$.
b) Montrer l'équivalence entre : (i) (u_n) est équirépartie,
(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}), \lim \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$,
(iii) $\forall m \in \mathbb{N}^*, \lim \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m u_k} = 0$.

652. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^{\lfloor n/2\rfloor} u_n$?

653. Existe-t-il une bijection $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que la série $\sum \dfrac{f(n)}{n^2}$ converge ?

654. Soient (u_n) une suite de réels non nuls et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Étudier la nature de $\sum u_n$.

655. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_p}{x^p} + o\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$.
a) À quelle condition la série de terme général $u_n = f(n)$ converge-t-elle ?
b) À quelle condition la suite de terme général $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} f(k)$ converge-t-elle ?

656. *a)* Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\left|f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\max_{t\in[n,n+1]}|f'(t)|$.
b) Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$?

657. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\mathrm{d}x$.

a) Étudier le signe de u_n.
b) Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

658. Existe-t-il une suite réelle (u_n) telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^3$ diverge ?

659. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
a) On suppose $\sum u_n$ convergente et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Construire à partir de R_n une suite $v_n > 0$ croissante tendant vers $+\infty$ telle que $\sum u_n v_n$ converge.
b) On suppose $\sum u_n$ divergente. Construire v_n décroissante qui tend vers 0 telle que $\sum u_n v_n$ diverge.

660. Étudier la convergence de la série $\sum \sin(\pi e n!)$.

661. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que la série $\sum n(\ln n)^2 u_n^2$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

662. On considère la suite réelle définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}}$ pour tout $n \geqslant 0$. Étudier la convergence de la série $\sum(1-x_n)$.

663. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant $u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.
a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles (u_n) converge.
b) Trouver alors un équivalent de $\ell - u_n$, où ℓ désigne la limite de la suite.
c) Donner un équivalent de u_n lorsque (u_n) diverge.

664. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente et calculer sa somme.

665. Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln((\exp(u_n)-1)/u_n)$.
a) Déterminer la limite éventuelle de (u_n).
b) En déduire la nature de $\sum u_n$.

666. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite u associe Tu telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $(Tu)_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$.
a) Si u converge vers ℓ, montrer que Tu converge vers ℓ.
b) On suppose que u est à valeurs positives.
On note $\sqrt{u}$ la suite telle que : $\forall n$, $(\sqrt{u})_n = \sqrt{u_n}$. Si Tu tend vers 0, montrer que $T\sqrt{u}$ tend également vers 0.

On suppose u positive et décroissante.
c) On pose $w_n = \sqrt{n}\, u_n$. Montrer que Tw tend vers 0 si et seulement si w tend vers 0.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = nu_n$.
d) Montrer que $s - Ts = Tv$.
e) On suppose que Ts converge. Montrer que Tv tend vers 0 si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

667. Soit (u_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose $u_0 > 0$ et $(|S_n - nu_n|)$ majorée. On suppose enfin $\sum u_n$ divergente.
a) Montrer que $\ln S_n \sim \ln n$.
b) Montrer que $\forall n$, $S_n \geqslant \sqrt{n}$.
c) Montrer que $\lim u_n > 0$. Conclusion ?

668. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Montrer que $\sum f(k)$ converge et donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

669. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{n}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_n - u_{n+1})\ln n$ converge.

670. Soient $\alpha > 0$ et (a_n) définie par $a_1 > 0$, $a_1 + a_2 > 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\sum_{i=1}^{n} a_i$.
Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum a_n$ converge.

671. Nature et somme de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}$.

672. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = e\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

673. *a)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n.
Pour $\alpha > 1$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$.
b) Pour $\alpha > 2$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \dfrac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$.

674. ***a)*** Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^{u_n}$.
On choisit désormais $u_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
b) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![0, N]\!]$, $u_n \mid u_N$.
c) Montrer que, pour $N, k \in \mathbb{N}$, $u_{N+k} \geqslant u_N^{k+1}$.
d) Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.
e) Montrer que $u_N \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.
f) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} \notin \mathbb{Q}$.

675. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

676. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, $2rf(x) \leqslant \displaystyle\int_{x-r}^{x+r} f(t)\,\mathrm{d}t$.

677. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I est la différence de deux fonctions convexes.

678. Soit $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Montrer que la dérivée n-ième de f s'écrit sous la forme $\dfrac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$. Trouver une relation linéaire entre P_{n+2}, P_{n+1} et P_n.

679. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to E$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si $x \mapsto \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ possède une limite quand $x \to 0$.

680. Soient $I =]-3, 9[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in I \setminus \{3\}$, on pose $g(x) = \tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) f(x)$. À quelle condition la fonction g se prolonge-t-elle continûment à I ? Le prolongement est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ?

681. Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement monotone par morceaux ?

682. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
a) Montrer qu'il existe x_1 tel que $f'(x_1) = 0$.
b) Montrer qu'il existe une suite (x_n) strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_n) = 0$.

683. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ n'admet pas de primitive de la forme $x \mapsto f(x)e^{x^2}$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle.

684. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(t) + f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Montrer que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

685. Posons $f : x \neq 0 \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par continuité en 0.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) f(x)$. Déterminer degré et coefficient dominant de P_n.
d) Montrer que les polynômes P_n sont scindés dans $\mathbb{R}$.

686. Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}^{+*}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$ non identiquement nulle et telle que $|f'| \leqslant M|f|$. Montrer que f ne s'annule pas.

687. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
a) Soit $f \in E$. Montrer $v : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{1}{x^{p+1}} \displaystyle\int_0^x t^p f(t)\,\mathrm{d}t$ se prolonge par continuité en 0.
On note $u(f)$ ce prolongement.
b) Montrer que u ainsi défini est un endomorphisme injectif de E.
c) Déterminer son spectre.

688. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Montrer $\displaystyle\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3)\,\mathrm{d}x$.

689. Donner un équivalent de $f(x) = \displaystyle\int_1^x t^t \mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.

690. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, strictement croissante telle que $f(0) = 0$.
a) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x)$.
b) ***i)*** Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0, n]\!]$, on note $x_{i,n} = \dfrac{ix}{n}$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}(f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) \longrightarrow \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t$ quand $n \to +\infty$.
ii) Montrer l'égalité vue en ***a)***.
c) Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et bijective.
Montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\mathrm{d}t \geqslant ab$.

691. Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_{0,n}, \ldots, x_{n,n})$ de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}} f = \frac{1}{n}\int_a^b f$

b) Déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n})$.

692. Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

a) Pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, on pose : $\phi_p : x \mapsto f(x+p) - \int_x^{x+p} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x+p-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ_p est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $f', \ldots, f^{(n-1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

693. ***a)*** Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $\phi(0) = \phi(1) = 0$, l'on ait $\int_0^1 f(t)\phi(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f = 0$.

b) Soient maintenant $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $\phi(0) = \phi(1) = 0$, l'on ait $\int_0^1 f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer sa dérivée.

694. Soient $h > 0$, $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ avec $f'' \geqslant m^2 > 0$, et $E = \{x \in [a,b], |f'(x)| > h\}$.

a) On suppose que $[c,d]$, avec $c < d$, est inclus dans E. Montrer que $\left|\int_c^d e^{if(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{3}{h}$.

b) Montrer que $\left|\int_E e^{if(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{6}{h}$.

c) Montrer que $\left|\int_a^b e^{if(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{6}{h} + \frac{2h}{m^2}$.

d) Montrer que $\left|\int_a^b e^{if(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{8}{m}$.

695. Déterminer la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$.

696. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. Que dire de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^p+t^p}\,\mathrm{d}t$ pour $p \geqslant 2$?

697. Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

a) Pour $f \in E$, montrer la convergence de $I_1 = \int_0^1 f(t)f'(t)\cotan(\pi t)\mathrm{d}t$ et de $I_2 = \int_0^1 f^2(t)\ (1+\cotan^2(\pi t))\mathrm{d}t$. Comparer I_1 et I_2.

b) Montrer que, si $f \in E$, $\int_0^1 (f')^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2$. Pour quelles f y-a-t-il égalité ?

698. Convergence et calcul de $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\ln(x)\mathrm{d}x$.

699. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-t^\alpha \sin^2(t))\mathrm{d}t$.

700. Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(e^{\sqrt{t}}-1)}$ est définie, continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

701. ★★ ***a)*** Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\sqrt{\sin(2x)}}\mathrm{d}x$.

b) Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\int_0^{\pi/2} f(\sin(2x))\sin(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2(y))\cos(y)\mathrm{d}y$.

702. ***a)*** Soit $(a,\varepsilon) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Après avoir simplifié $\ln\left(\frac{1-e^{2ax}}{1-e^{ax}}\right)$, montrer que $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\ln(1+e^{ax})}{x}\mathrm{d}x = -\int_1^2 \frac{a\varepsilon}{e^{a\varepsilon y}-1}\ln(y)\mathrm{d}y$.

b) Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln(1-e^{-a\varepsilon y})}{y}\mathrm{d}y = \ln(2)\ln(1-e^{-2a\varepsilon}) - \int_1^2 \ln(y)\frac{a\varepsilon}{e^{a\varepsilon y}-1}\mathrm{d}y$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{e^{ax}-1}\mathrm{d}x$.

d) Retrouver le résultat précédent par un calcul direct de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x-1}\mathrm{d}x$.

703. Soit F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est bien définie.

b) Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Calculer $\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$.

704. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. On note F la primitive de f qui s'annule enE 0. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(t+1)^2}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1}\mathrm{d}t$ sont de même nature.

705. ***a)*** Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ est convergente.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

b) Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ est une série convergente.

706. Trouver un équivalent simple de $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

707. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et T-périodique.

a) À quelle condition f admet-elle une primitive T-périodique ?

b) On suppose à présent que $\int_0^T f(x)\,dx \neq 0$, et on fixe un réel $a \in]0,1]$. Donner un équivalent de $\int_1^x \frac{f(t)}{t^a}\,dt$ quand $x \to +\infty$.

708. Quelles sont les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes convexes ?

709. Soit f continue sur $[0,\pi]$ telle que $\forall n$, $\int_0^\pi \cos(nt)f(t)dt = 0$. Que dire de f ?

710. ★ Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

711. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer qu'en posant $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha x}$, on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Donner la limite puis un équivalent simple de f en $+\infty$.

c) Donner la limite puis un équivalent simple de f en 0.

712. Déterminer le domaine de définition et un équivalent simple en 1^- de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

713. Pour $n \geqslant 0$, soit $u_n : x \mapsto \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x+i}$.

a) Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Exprimer $S(x+1)$ en fonction de $S(x)$ et de x.

714. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Étudier la continuité de f sur D.

c) Déterminer des équivalents de f aux extrémités de D.

715. ***a)*** Soit $x \in [0,1[$ Justifier la convergence de $f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right)^{x^n}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $\ln f(x) = \frac{x-1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \ln(1+x^n) + \ln 2$.

c) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $\ln f(x) = \ln 2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} \frac{x^m}{1+x+\cdots+x^m}$.

d) Montrer que f possède une limite finie en 1 et la déterminer.

716. On pose $f : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Exprimer $f(x)$ en fonction de : $g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)}$.

c) Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.

d) Déterminer un équivalent simple de f en 0^+.

e) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$ sur les parties du domaine de définition de f.

717. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n))$.

a) Donner le domaine de définition de f. Étudier sa régularité.

b) Exprimer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$ et de x.

718. Domaine de définition et équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^x}{n^2}$.

719. Soit u_0 l'identité de $[1,+\infty[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} : x \in [1,+\infty[\mapsto u_n(x) + \frac{1}{u_n(x)}$.

a) Montrer que la suite de fonction (u_n) est bien définie.

b) Étudier la convergence simple de (u_n) sur $[1,+\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in [1,+\infty[\mapsto \frac{(-1)^n}{u_n(x)}$.

c) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[1,+\infty[$.

d) Montrer que la somme de la série de terme général f_n est continue sur $[1,+\infty[$.

e) A-t-on convergence normale sur $[1,+\infty[$?

720. Notons, pour $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

a) Déterminer les modes de convergence de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que la somme S_α de cette série est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que si $\alpha > 1/2$, S_α est continue sur $\mathbb{R}^+$.

c) Pour $\alpha \leqslant 1/2$, S_α est-elle continue en 0 ?

721. Pour x réel convenable, on note $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
a) Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de ζ.
b) Montrer que, pour $x \in \mathcal{D}$, $\zeta(x) = 1 + \frac{1}{x-1} - x\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{x+1}}\mathrm{d}t$, où $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.
En déduire que ζ peut être prolongée sur un ensemble $\mathcal{D}'$.
c) Donner un équivalent de ζ en 1.
d) Montrer que le prolongement de ζ sur $\mathcal{D}'$ se prolonge par continuité en $\inf(\mathcal{D}')$.

722. Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+nx}$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$.
b) Donner un équivalent de $f(x)$ en 1.

723. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\frac{x^n}{n}$.

724. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$ est développable en série entière au voisinage de 0.

725. Déterminer le rayon et la somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n$.

726. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n \sin(nt)\,\mathrm{d}t$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
a) Calculer a_0, a_1, a_2.
b) Calculer $f(x)$ pour $|x| < 1$. Préciser le rayon de convergence de f.
c) En déduire a_n.

727. ***a)*** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - z}$ est développable en série entière au voisinage de 0.
b) Soient $F \in \mathbb{C}(X)$ sans pôle de module 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto F(e^{\alpha t})$ est développable en série entière au voisinage de 0.

728. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \nu_2(n)$ (valuation 2-adique).
a) Déterminer les valeurs d'adhérence de (a_n).
b) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$. La suite (b_n) possède-t-elle une limite ?
c) Déterminer le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$.

729. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$.

a) Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.
b) Si $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+2} en fonction de a_n.
c) Déterminer le rayon de convergence R de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Calculer la somme. Étudier le comportement en $\pm R$.

730. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}$ pour tout n. Trouver u_n en considérant la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$.

731. La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.
a) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
b) Donner un équivalent de a_n.
c) Donner le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$. Y-a-t-il convergence pour $x = R$? pour $x = -R$?
d) Donner un équivalent de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ quand x tend vers R^-.

732. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, nt \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}x^n$.
a) Déterminer le rayon de convergence R de f.
b) Étudier la convergence en $\pm R$. *Ind.* Poser $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sin(kt)$.
c) Exprimer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

733. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe telle que la série $\sum na_n$ converge absolument. On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
a) Montrer que le rayon de convergence de f est $\geqslant 1$.
b) On suppose que $a_1 \neq 0$ et que $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leqslant |a_1|$. Montrer que f est injective sur $\mathbb{D}$.

734. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i+j=n} a_i a_j$ pour $n \geqslant 2$.
a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
b) Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation $xy'' - x = y^2$ sur $]0, 1[$.

735. Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$. En déduire le rayon R de $f(x) = \sum a_n x^n$.

b) Montrer que f est solution de $(1-x)y' - (2x+1)y = 0$. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

736. Soient $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et D son disque ouvert de convergence.

a) Montrer que, s'il existe $(z_k) \in (D \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $F(z_k) = 0$, alors F est nulle.

b) On suppose que $F(0) \in \mathbb{R}^{+*}$ et que $|F|$ admet un maximum local en 0.

Montrer que F est constante.

Ind. Raisonner par contraposée et montrer l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in D$, $|F(z)| \geqslant |F(0) + a_p z^p| - \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n||z|^n$.

737. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leqslant \dfrac{1}{\ln^n(2)}$.

b) Montrer que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence R non nul et que $\forall x \in]-R, R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{2 - e^x}$.

c) En déduire une expression sommatoire explicite de b_n pour $n \in \mathbb{N}$.

738. Soit $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mapsto \exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$.

a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. On écrit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

b) Donner une expression sommatoire des a_n.

c) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n).

d) Donner un développement asymptotique de $\ln(a_n)$.

739. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On pose $A_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \dfrac{1}{k!}X(X - ak)^k$.

a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ak)A_k(X)$.

En déduire que $\forall y \in \mathbb{C}^*$, $ny^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-ak)^k(y+ak)^{n-k}$.

b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}x^n$.

c) On note S sa somme. Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $x(1 + S(x))S'(x) = S(x)$. Donner une expression simple de $h : x \mapsto S(x)\, e^{S(x)}$.

740. Soit $(a_n)_{n\geqslant 2}$ une suite réelle telle que la série entière associée est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On suppose que $f : z \mapsto z + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ est injective sur $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\operatorname{Im}(f(z)) > 0$ si et seulement si $\operatorname{Im}(z) > 0$.

c) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r < 1$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(re^{it}))\sin(nt)\mathrm{d}t$.

741. Soit (a_n) une suite de réels positifs avec $a_0 > 0$ et $a_1 = 1$. Soient $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On suppose que le rayon de convergence de S est $R > 0$.

a) Soient $n \geqslant 1$ et $y > a_0$. Montrer qu'il existe un unique $x_n(y) \in \mathbb{R}^+$ tel que $S_n(x_n(y)) = y$. Montrer que la suite $(x_n(y))$ converge vers un réel noté $T(y)$. Montrer que $|T(y)| \leqslant R$.

b) On suppose que $|T(y)| \leqslant R$. Calculer $(S \circ T)(y)$. Que peut-on en déduire ?

742. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.

a) Montrer que, pour tout $r \in [0, R[$, $I(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$, puis que la fonction I est croissante sur $[0, R[$.

b) Si f n'est pas nulle, montrer que $I(r) > 0$ pour tout $r \in]0, R[$.

c) Montrer que la fonction $t \mapsto \ln\left(I(e^t)\right)$ est convexe sur $]-\infty, \ln R[$.

743. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 et $f : x \mapsto e^{P(x)}$. Montrer que f est développable en série entière en 0 et que deux coefficients consécutifs de ce développement ne sont jamais simultanément nuls.

744. Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$.

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$.

a) Quel est le rayon de convergence de f ?

b) Déterminer la limite en 1^- de f puis de $x \mapsto (1-x)f(x)$.

745. Déterminer un équivalent de $p(n) = \left|\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3,\ x + 2y + 3z = n\}\right|$.

746. On dit que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $\mathcal{P}$ si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ possède une limite finie en 1^-.
a) Déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
b) Montrer que si $\sum a_n$ est absolument convergente alors (a_n) vérifie $\mathcal{P}$. Étudier la réciproque.
c) Déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour toute suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\mathcal{P}$, la suite $(f(a_n))$ vérifie $\mathcal{P}$.

747. Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence $+\infty$.
a) Montrer que E est une $\mathbb{R}$ algèbre.
Pour $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
b) Montrer que T est un endomorphisme de E et que $\mathrm{Im}(T)$ est un idéal de E.
c) Montrer que $E = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$.
d) Déterminer le spectre de T.

748. Limite de $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+2x}}}}}$ (où il y a n racines carrées) ?

749. Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$. Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels I_n est définie. Donner un équivalent de I_n.

750. Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}$ en $o(1/n^2)$.

751. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 (-t^2+t-1)^n\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que (u_n) converge vers 0.
b) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et calculer sa somme.
c) Trouver un équivalent simple de u_n.

752. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t$.
a) Montrer la convergence de I_n.
b) Étudier la convergence et la limite éventuelle de (I_n).
c) Trouver un équivalent simple de I_n.

753. Exprimer sous forme de somme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(t)\mathrm{d}t$.

754. *a)* Justifier que $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.
b) En déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n n^2}$.

755. Soient α et β des réels > 0.
a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\alpha n+\beta}$ est convergente.
b) Exprimer sa somme sous forme intégrale.

756. Calculer $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\mathrm{d}t$.

757. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa dérivée.
b) On pose $g(x) = f(x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ est constante, et préciser sa valeur.
c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

758. Pour tout réel $a > 0$, on pose $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \arctan(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de $F(a)$, puis calculer cette intégrale.

759. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x < 0$, on pose : $h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)^n}$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que h_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $\forall x > 0, h_n'(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x)$.
b) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, h_n(x) = a_n x^{2-4n}$.
c) Expliciter la suite (a_n).

760. On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.
a) Domaine de définition de F ? de continuité ?
b) Donner un équivalent de F en $+\infty$.

761. Soit $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(t) + 1\right)\mathrm{d}t$.
a) Donner le domaine de définition et étudier la continuité de f.
b) Donner une expression de $f(x)$.

762. *a)* Déterminer le domaine de définition D de : $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

763. Soient $\alpha > 0$ et $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x^\alpha + t^3}$. L'application f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$?

764. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{-ixt} \mathrm{d}t$ par deux méthodes :
- en déterminant le développement en série entière de $f(x)$;
- en montrant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

765. Soit f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
b) Montrer que f est continue et décroissante.
c) Pour tout $x \in D_f$, on pose $g(x) = (x+1)f(x+1)f(x)$.
Montrer que : $\forall x \in D_f, g(x+1) = g(x)$.
d) Déterminer des équivalents simples de f aux extrémités de D_f.

766. *a)* Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$.
b) On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} \mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
c) On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-it^2}\mathrm{d}t$ à l'aide de f.

767. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant : $\forall x > 0, f'(x) = f(1/x)$.

768. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, monotone et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f(x)$ sont bornées.

769. On considère l'équation différentielle $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$.
a) Montrer que (E) possède une unique solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et qui soit la somme d'une série entière.
b) Donner une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
c) À l'aide du changement de fonction inconnue $y = zf$, résoudre (E).

770. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les solutions de : $(E) : y'' + (\lambda - 1)x^2 y = 0$ sont de la forme $x \mapsto H(x)e^{-x^2/2}$ avec H développable en série entière.

771. Résoudre l'équation différentielle $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$.

772. Déterminer une solution de $(E) : y'' + xy' + y = 1$ développable en série entière au voisinage de 0.

773. Soit (E) l'équation différentielle $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
a) Résoudre (E) en utilisant le changement de variable $t = \ln x$.
b) Résoudre $x^2y'' + xy' + y = \sin(a \ln x)$.

774. Considérons l'équation différentielle $(E) : x^2y' + y + x^2 = 0$.
a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que (E) admet une unique solution qui admet une limite finie en 0.
c) Existe-t-il des solutions de (E) admettant une limite finie en $+\infty$?
d) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

775. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(*)$ l'équation différentielle :
$(1 + x^n)(1 - x^2)y' + 2x(1 + x^n)y = 2(1 - x^2)$.
b) Trouver les solutions de $(*)$ sur $]-1, 1[$.
c) Existe-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?
d) Existe-il une solution définie sur $]1, +\infty[$ et bornée ?

776. Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et bornées, telles que $y'' - y = f$.

777. Soit y une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $xy'' + y' + xy = 0$,
a) On pose : $\forall x > 0,\ u(x) = \sqrt{x}\,y(x)$. Déterminer une équation différentielle dont u est solution.
b) Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{4x^2}\,\mathrm{d}x = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)$ avec v vérifiant $v'' + v = 0$.
c) Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe $x_a \in [a, a + \pi[$ tel que $y(x_a) = 0$.
d) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$ s'annule une infinité de fois.

778. On note S l'ensemble solution de l'équation différentielle $(E) : xy'' + xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
a) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto x^\alpha$ soit solution de (E).
b) Pour tout $x > 0$, on pose : $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$. Dresser le tableau de variation de G.
c) Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et $s : x \mapsto xf(x)$. Montrer que $s \in S$ si et seulement si f' est solution d'une certaine équation différentielle du premier ordre. Résoudre cette équation différentielle.
d) Expliciter S à l'aide de G. Étudier les limites des solutions en 0^+.

779. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction monotone de classe $\mathcal{C}^1$ admettant une limite réelle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

780. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f''+f \geqslant 0$. Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t)+f(t+\pi) \geqslant 0$.

781. Résoudre les systèmes différentiels
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& 2x+3y+3z+te^t \\ y' &=& 3x+2y+3z+e^t \\ z' &=& 3x+3y+2z+t^2e^t \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcll} x' &=& 2y-z & +te^t \\ y' &=& 3x-2y & +e^t \\ z' &=& -2x-2y+z & +t^2e^t \end{array}\right.$$

782. Soient $m,n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système différentiel $(S) : Y^{(m)} = AY$ d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

783. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si les solutions de $Y' = AY$ sont de norme constante.

784. Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, A une application continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{C}^*$ et une application X de classe $\mathcal{C}^1$ non identiquement nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A(t)X(t)$ et $X(t+T) = \lambda X(t)$.

785. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction M de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $M'(t) = SM(t)S$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur S la fonction M est-elle bornée ?

786. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $u : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(E)$ dérivable. Montrer l'équivalence entre : (i) $\forall s,t \in \mathbb{R}$, $u(s+t) = u(s)\,u(t)$, (ii) $\exists a \in \mathcal{A}(E), \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = e^{at}$.

787. Déterminer le domaine de définition de $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2}$. Est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

788. On pose $f(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$. Étudier la continuité et la différentiabilité de f.

789. Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ et g définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par : $g(x,y) = f\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$. Déterminer les fonctions f qui vérifient : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

790. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique.
On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\dfrac{1}{2}\sin(x+y), \dfrac{1}{2}\cos(x-y)\right)$.
a) Calculer la différentielle de f en tout point.
b) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|\mathrm{d}f(x,y)\|_{\mathrm{op}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
c) En déduire que f possède au plus un point fixe.

791. *a)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et minorée. On pose $m = \inf_{\mathbb{R}} f$. On suppose que m n'est pas atteint. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leqslant m + \dfrac{1}{2^n}$ et $|x_n| \geqslant n$. En déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $|u_n| \to +\infty$ et $f'(u_n) \to 0$.
b) Soient $p \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ minorée. Pour $\varepsilon > 0$, soit $g_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon\|x\|$. Montrer que g_ε atteint son minimum (la norme est la norme euclidienne standard). En déduire qu'il existe une suite (u_n) telle que $\nabla f(u_n) \to 0$.

792. *a)* Soient $n \geqslant 2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Soient $a,b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = \mathrm{d}f_c(b-a)$.
b) Application : si on souhaite connaître la valeur de $\dfrac{\sqrt{2}}{e+\pi^3}$ à la précision 10^{-20}, avec quelle précision doit-on alors connaître $\sqrt{2}$, e et π ?

793. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle qu'en tout point x le spectre de la hessienne soit inclus dans $[1,+\infty[$.
a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f(x) \geqslant f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + \dfrac{1}{2}x^Tx$.
Ind. Considérer $\psi : t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx\rangle - \dfrac{1}{2}t^2x^Tx$.
b) En déduire que f admet un minimum.

794. On munit $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on note $f(x)$ l'unique vecteur y positivement colinéaire à x vérifiant : $\|x\| \times \|y\| = 1$.
a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle en tout point.
b) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Interpréter $\mathrm{d}f(x)$ en faisant intervenir la réflexion d'axe $\{x\}^\perp$.
c) En déduire que $\mathrm{d}f(x)$ conserve les angles.

795. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des conditions
(i) $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(tx) = t^\lambda f(x)$:
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\partial_i f(x) = \lambda f(x)$.

796. *a)* Calculer la différentielle du déterminant au point I_n.
La fonction det atteint-elle un extremum local en I_n ?
b) Déterminer points critiques et extrema locaux de la fonction det sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

797. On pose $D =]0,1[^2$ et l'on définit f sur D par :
$\forall (x,y) \in D, f(x,y) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{x+y}$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Déterminer les extrema locaux de f.

c) En étudiant la restriction de f à $K = \left\{(x,y) \in D\ ;\ (x,y) \in \left[0, \frac{7}{9}\right] \text{ et } x+y \geqslant \frac{2}{9}\right\}$ déterminer les extrema globaux de f.

798. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in \mathbb{R}^2$ et γ un arc paramétré plan de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(0) = a$ et, pour tout t, $\|\gamma'(t)\| = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $C_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\})$.
a) Montrer que $\nabla f(a)$ indique la direction de plus grande pente sur la surface représentative de f en a.
b) Supposons $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^+ \nabla f(a)$. Montrer que, pour λ suffisamment proche de $\alpha = f(a)$, il existe un unique t_λ voisin de 0 tel que $\gamma(t_\lambda)$ appartient à C_λ. Donner un équivalent de $\|\gamma(t_\lambda) - a\|$ quand $\lambda \to \alpha$.

799. Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On considère les assertions : (i) $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathrm{d}f_x(h)\| = \|h\|$, (ii) $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|h\|$.
a) On suppose (i) et on pose, pour tous $i, j, k \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j \partial x_k}$.
Montrer que $a_{i,j,k} = a_{i,k,j} = -a_{k,i,j}$ puis que $a_{i,j,k} = 0$.
b) Montrer l'équivalence des assertions (i) et (ii).

800. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$.
a) On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $J_f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f = \nabla g$.

801. Extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^y + ye^x$.

802. Soient E un espace euclidien, $\varphi \in E^*$ une forme linéaire et $f : x \mapsto \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f.

803. Soient $n \geqslant 2$ un entier et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que la hessienne de f est toujours à valeurs propres dans $[1, +\infty[$.
a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx\rangle - \frac{t^2}{2}\|x\|^2$ est convexe.
b) Montrer que f admet un minimum global.

804. Soient E un espace euclidien, $v \in E$ non nul et $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.
a) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f.
b) Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul, $\langle f(x), x\rangle > 0$.
c) Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle v, x\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
d) Calculer les dérivées partielles de g relativement à la base $(e_1, \dots, e_n)$ et le gradient de g.
e) Montrer que g admet un unique point critique c.
f) Montrer que g admet un minimum global en c. Existe-t-il d'autres extrema locaux ?

805. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle. On note $\mathcal{B}$ la boule unité ouverte et $\mathcal{S}$ la sphère unité. Soit $f : \overline{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
a) On suppose que $f_{|\mathcal{S}} \leqslant 0$ et qu'il existe $\zeta \in \mathcal{B}$ tel que $f(\zeta) > 0$.
Montrer que $\varphi : x \in \overline{\mathcal{B}} \mapsto f(x) + \varepsilon(\|x\|^2 - 1)$ admet un maximum en $\zeta_0 \in \mathcal{B}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit puis prouver que $\Delta f(\zeta_0) < 0$.
b) On suppose que $\Delta f = 0$. Montrer que $\min_{\overline{\mathcal{B}}} f = \min_{\mathcal{S}} f$ et $\max_{\overline{\mathcal{B}}} f = \max_{\mathcal{S}} f$.

806. Déterminer les espaces tangents en I_n aux parties $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

807. *a)* Soient A la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des $f \in A$ telles que $f(0) = 0$. Montrer que I est un idéal de A et que tout élément de I s'écrit $\sum_{i=1}^{n} f_i\theta_i$ où les f_i sont dans A et les θ_i sont les formes linéaires coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$.
b) Déterminer les φ de A^* vérifiant, pour tout $(f,g) \in A^2$, $\varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)$.
c) Montrer que l'ensemble des formes linéaires de la question précédente est un sous-espace vectoriel de dimension finie de A^*. Quelle est sa dimension ?

Probabilités

808. On considère n ampoules éteintes numérotées de 1 à n. L'ampoule i a une probabilité p_i de s'allumer à un instant donné. On note Y la variable aléatoire comptant le nombre d'ampoules s'allumant.
a) Exprimer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$.
b) On fixe à présent m et on considère des p_i tels que $\mathbf{E}(Y) = m$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_i pour que $\mathbf{V}(Y)$ soit maximal. Donner la loi de Y dans ce cas.

809. Un magasin dispose d'un stock de N produits. Le nombre de clients qui passent dans une journée suit la loi de Poisson de paramètre λ et chaque client a une probabilité p d'acheter le produit. Quelle est la probabilité que le magasin soit en rupture de stock avant la fin de la journée ?

810. On lance N dés. À chaque tour, on relance ceux qui n'ont pas donné 6 lors des tours précédents. Soit S_n la variable aléatoire donnant le nombre total de dés ayant donné 6 au cours des n premiers tours.
a) Montrer que S_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
b) Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(S_n = N)\right) = 1$.
c) On pose $T_N = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = N\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
i) Donner la loi de T_N.
ii) Montrer que T_N admet une espérance et la calculer.

811. Un péage comporte 3 voies et n voitures se présentent en choisissant aléatoirement et indépendamment une voie. On note X_i le nombre de voitures qui passent par la voie i pour $i \in \{1,2,3\}$.
a) Déterminer la loi des X_i.
b) Calculer $\mathbf{V}(X_1), \mathbf{V}(X_2)$ et $\mathbf{V}(X_1+X_2)$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
c) Les variables X_1, X_2, X_3 sont-elles indépendantes deux à deux ? mutuellement indépendantes ?

812. Une urne contient des boules numérotées de 0 à n. On en prend une poignée au hasard et on note les numéros obtenus. On effectue deux tirages indépendants. Soit X la variables aléatoire correspondant au nombre de numéros communs entre les deux poignées. Déterminer la loi de X.

813. Soient m, n, p des entiers $\geqslant 1$ tels que $p \leqslant \min(m,n)$. Une urne contient m boules mauves et n boules noires. On tire simultanément p boules dans l'urne et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules mauves tirées. Quelle est la valeur la plus probable de X ?

814. Une urne contient $a \geqslant 1$ boules blanches et $b \geqslant 1$ boules rouges. À chaque tirage, on remet la boule tirée et on ajoute $c \geqslant 1$ boules de la même couleur. Soit Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule blanche tirée. Donner sa loi. Admet-elle une espérance ? Un moment d'ordre $p \geqslant 2$?

815. On dispose de deux urnes A et B, et de $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$ réparties aléatoirement dans ces urnes. À chaque itération, on pioche une boule au hasard et on la change d'urne. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans l'urne B à la n^e itération. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (\mathbf{P}(X_n=0)\ \mathbf{P}(X_n=1)\ \cdots\ \mathbf{P}(X_n=2N))^T$.
a) Déterminer $M \in \mathcal{M}_{2N+1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout n, $U_{n+1} = MU_n$.
b) Soient $v_0, \ldots, v_{2N}$ des réels et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2N} v_k X^k$. En notant V le vecteur colonne défini par les coefficients v_k, montrer que $V \in \mathrm{Ker}(M - \lambda I_{2N+1}) \Leftrightarrow \lambda P = XP - \dfrac{1-X^2}{2N}P'$.
c) Montrer les X_n suivent la même loi si et seulement si X_0 suit une certaine loi à déterminer.
d) La matrice M est-elle diagonalisable ?

816. On lance simultanément deux pièces équilibrées n fois. Soit E_n l'événement « les deux pièces donnent le mê me nombre de pile ».
a) i) Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant a+b$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.
ii) En déduire $\mathbf{P}(E_n)$.
b) Déduire combien de fois en moyenne les pièces sont tombées sur Pile lorsque l'événement E_n est réalisé.

817. Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A\cap B)\mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = \mathbf{P}(A\cap\overline{B})\mathbf{P}(\overline{A}\cap B)$.

818. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X \geqslant n)$ converge et donner sa somme.

819. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ et $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{(X+1)(X+2)}\right)$.

820. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi géométrique de paramètre $1/2$. On pose : $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$. Déterminer la loi de (X,Y).

821. À quelle condition sur α existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbf{P}(X=n) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque cela est réalisé montrer que X admet une variance et la calculer.

822. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Comparer $\mathbf{E}(X^\alpha)$ et $\mathbf{E}(X)^\alpha$ au sens de $\overline{\mathbb{R}}$.

823. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ avec X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, X et Z suivant $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et Y suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Déterminer la probabilité que U soit vecteur propre de A.

824. ★★ Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Minorer aussi précisément que possible $\mathbf{E}(X/Y)$.

825. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

826. Soient X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et $Y = X^2+1$.
a) Calculer $\mathbf{E}(Y)$.
b) Calculer $\mathbf{P}(2X < Y)$.
c) Comparer $\mathbf{P}(X \in 2\mathbb{N})$ et $\mathbf{P}(X \in 2\mathbb{N}+1)$.

827. On suppose que la probabilité de tirer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est $\dfrac{1}{2^n}$.
a) Calculer $\mathbf{P}(A_p)$ où A_p est l'événement « n est multiple de p ».
b) Calculer $\mathbf{P}(A_2 \cup A_3)$.
c) On note B l'événement « n est premier ». Montrer que $\dfrac{13}{32} < \mathbf{P}(B) < \dfrac{209}{504}$. En déduire $\mathbf{P}(B)$ à 10^{-2} près.

828. Soit A, B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{P}(A^B \leqslant B^A)$.

829. Soit X une variable de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $Y = \overline{X}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quelle est la loi de Y ?

830. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $p = 1/2$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}(S_{2n} = k) \leqslant \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.

831. Soit $(E_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{E_n}$. Montrer que si $\sum \mathbf{P}(E_n)$ converge alors Z est d'espérance finie.

832. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le développement en série entière de $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^n}$.

b) En déduire que $|\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n,\ k_1 + \cdots + k_n = s\}| = \dbinom{s+n-1}{n}$.

c) Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Déterminer $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} (X_1 + \cdots + X_n = s)\right)$.

833. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.
a) Montrer que $X_1 + X_2, X_3, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
b) En déduire que, pour tout $r \in [\![2, n-1]\!]$, $X_1 + \cdots + X_r, X_{r+1}, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

834. Soient $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$, $a_0, \ldots, a_{k-1} \in]0,1[^k$ tels que $a_0 + \cdots + a_{k-1} = 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. On suppose que : $\mathbf{P}(X_0 = 0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbf{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \mathbf{P}(X_n = j - i)$.
a) Déterminer la loi de X_n.
b) Soit $j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ fixé. Étudier le comportement asymptotique de $(\mathbf{P}(X_n = j))_{n\geqslant 0}$.

835. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Y = \int_0^{2\pi} \sin(t)^X \mathrm{d}t$. Montrer que Y possède une espérance et la calculer.

836. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $Y = |X_1 - X_2|$.
a) Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$ puis $\mathbf{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
b) Montrer que $\mathbf{E}(X_1 - X_2)^2 = 2\,\mathbf{V}(X_1)$. En déduire que Y admet une variance et la calculer.

837. Soient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
a) Montrer que $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
b) Soit Z une variable aléatoire réelle centrée admettant un moment d'ordre 2. On pose $\mathbf{V}(Z) = \sigma^2$.

i) Montrer que pour tous $a > 0$ et $x > 0$, $\mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(x+a)^2}$.

ii) En déduire que $\mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ et $\mathbf{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

838. ***a)*** Rappeler le développement en série entière au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, ainsi que sa validité.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel r pour qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(X = n) = \dfrac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2} r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) Calculer alors l'espérance et la variance de X.

839. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$.
a) Justifier la bonne définition d'une telle loi et calculer l'espérance de X.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement $(n|X)$. Les événements A_p et A_q sont-ils indépendants si p et q sont deux entiers pairs ?
c) Étudier l'indépendance de A_p et A_q pour p et q entiers quelconques.

840. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$; $\alpha_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $\beta_n = \mathbf{E}(Z_n)$.
a) Déterminer la monotonie des suites (α_n) et (β_n).
c) Calculer α_n.
c) Déterminer la limite de (β_n). Donner un équivalent de β_n.

841. Soient $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. On pose $Y = (X + n)!$
a) Trouver une condition sur λ pour que Y admette une espérance finie.
b) On suppose que $Y \in L^1$. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y \geqslant m) \leqslant \dfrac{n!}{m(1-\lambda)^{n+1}}$.

842. ***a)*** Montrer qu'il existe une variable aléatoire telle que : $\forall t \in [0,1], G_X(t) = \dfrac{e^{t-1}}{\sqrt{2-t}}$.
b) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

843. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que : $\mathbf{E}(1/X) < +\infty$. On définit F_X sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^+, F_X(t) = \mathbf{E}(e^{-tX})$.
a) Montrer que F_X est bien définie, continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\int_0^{+\infty} F_X$.

b) Soient Y, Z deux variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+Y}\right)$.

844. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Notons, pour tout k F_k la fonction de répartition associée à X_k.
On note $X = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
a) Montrer que $F_X = \prod_{k=1}^{n} F_k$ et $F_Y = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - F_k)$.
b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y < x$. Montrer que $\mathbf{P}(y < Y \leqslant X \leqslant x) = \prod_{k=1}^{n}(F_k(x) - F_k(y))$.
c) Supposons que les X_k suivent des lois géométrique de paramètre $p_k \in]0,1[$. Déterminer la loi de Y.

845. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une variance.
a) Montrer que la fonction génératrice de X est convexe sur $[0,1]$.
b) Prouver que $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right) \leqslant 1 - \dfrac{2}{3}\mathbf{E}(X) + \dfrac{1}{6}\mathbf{E}(X^2)$.

846. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n > m+2$. On définit une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fixant $u_0 \in \mathbb{R}$ et en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = \dfrac{k+m}{k+n} u_k$.
a) étudier la série $\sum \ln\left(\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{n-m} \dfrac{u_{k+1}}{u_k}\right)$. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} Ck^{m-n}$.
b) Montrer l'existence d'une variable aléatoire réelle X telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+n)\mathbf{P}(X = k+1) = (k+m)\mathbf{P}(X = k)$
c) Montrer que $X \in L^1$ et calculer $\mathbf{E}(X)$.

847. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
b) Déterminer un équivalent de $\max\{\mathbf{P}(S_n = k), k \in \mathbb{N}\}$ lorsque $n \to +\infty$.

848. Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{G}(p)$ et N une variable indépendante des X_i qui suit la loi $\mathcal{G}(q)$. Soit $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$. Montrer que S est une variable aléatoire et déterminer son espérance et sa variance.

849. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On répartit $2N$ boules entre deux urnes A et B. On tire successivement une boule au hasard dans l'une des urnes, et on la place dans l'autre urne.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dans l'urne B au $n^{\text{ème}}$ tour et on pose $U_n = (\mathbf{P}(X_n = 0) \cdots \mathbf{P}(X_n = 2N))^T \in \mathcal{M}_{2N+1,1}(\mathbb{R})$.
a) Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_{2N+1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = MU_n$.

b) Soit $V = (v_0, \ldots, v_{2N})^T \in \mathcal{M}_{2N+1,1}(\mathbb{R})$. On note $P(X) = v_0 + v_1X + \ldots + v_{2N}X^{2N}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $V \in \operatorname{Ker}(M - \lambda I_{2N+1})$ si et seulement si $\lambda P = XP + (1-X^2)P'$.
c) Comment choisir X_0 pour que toutes les variables aléatoires X_n soient équidistribuées ?
d) La matrice M est-elle diagonalisable ?

850. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$, $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $a_n = \mathbf{E}(Y_n)$ et $b_n = \mathbf{E}(Z_n)$.
a) Étudier la monotonie de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer a_n.
c) Déterminer la limite et un équivalent simple de $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

851. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
a) Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2}\right)$.
b) Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(\dfrac{a^2}{2n}\right)$.
c) Montrer que le résultat de la question précédente subsiste si $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires bornées par 1 et centrées.

852. Soit X une variable aléatoire réelle discrète.
a) Pour $t \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $\varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX})$.
b) Montrer que φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que φ_X détermine la loi de X.

853. Soient $k \leqslant n \in \mathbb{N}$. Un parking dispose de n places consécutives numérotées de 1 à n. On y dispose des véhicules nécessitant chacun k places consécutives pour être garés. Chaque véhicule est successivement placé aléatoirement sur les emplacements disponibles jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en garer aucun.
Pour $j \in [\![1, n-k+1]\!]$, B_j désigne l'événement « la première voiture est garée entre les emplacements j et $j+k-1$, » et X_n est le nombre d'emplacements résiduels libres à la fin du processus.
a) Montrer que, pour i, j convenables, $\mathbf{P}_{B_j}(X_n = i) = \mathbf{P}(X_{j-1} + X_{n-(j+k)+1} = i - k)$.
En déduire que $\mathbf{E}(X_n) = k + \dfrac{2}{n-k+1}\sum_{\ell=0}^{n-k}\mathbf{E}(X_\ell)$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \mathbf{E}(X_0) + \cdots + \mathbf{E}(X_n)$.
Montrer que la somme f de la série entière $\sum S_n t^n$ est au moins définie sur $]0,1[$ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
c) Expliciter f et en déduire une expression de $\mathbf{E}(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.