Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Marc Becker, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, André Chambrillon, Philippe Chateaux, Denis Choimet, Dimitri Cocheril-Crèvecoeur, Yves Dutrieux, Alexis Fagebaume, Serge Francinou, Cyril Germain, Hervé Gianella, Gil Guibert, Max Hochart, Denis Jourdan, Romain Krust, Thomas Lafforgue, Christelle Larchères, Roger Mansuy, François Moulin, Jean Nougayrède, Renaud Palisse, Philippe Patte, Mickaël Prost, Marc Rezzouk, Eddy Routin, Christophe Schneider, Cécile Stérin, Brice Touzillier, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 7 février 2025, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com* .

Les exercices avec une étoile sont réservés aux étudiants, ceux avec deux étoiles sont proposés à tous les lecteurs.

Écoles Normales Supérieures – MP - MPI

Algèbre

1. [L] Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E^3$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on note $\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$. Soit $E^{3*} = \{(x, y, z) \in E^3\ ;\ x, y, z \text{ sont distincts}\}$. Soit $S \subset E^{3*}$ tel que ***i)*** $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_3$, si $\varepsilon(\sigma) = -1$ alors $\sigma \cdot (S) = \{\sigma \cdot x\ ;\ x \in S\} = E^{3*} \setminus S$,
ii) $\forall a, b, c, d \in E$, si $(a, b, c) \in S$ et $(a, c, d) \in S$, alors $(a, b, d) \in S$ et $(b, c, d) \in S$.
Montrer qu'il existe $g : E \to \mathbb{R}$ injective telle que
$\forall (a, b, c) \in E^3, g(a) < g(b) < g(c) \Rightarrow (a, b, c) \in S$.

2. [P] Soit N une application de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}^+$ vérifiant :
(i) $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
(ii) $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,
(iii) pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
(iv) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N(n) > 1$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in]0, 1]$ tel que $N(x) = |x|^\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

3. [PLSR] ★ On étend de façon naturelle la valuation 2-adique v_2 à $\mathbb{Q}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Calculer $v_2(H_n)$.

4. ★ Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, avec p premier supérieur ou égal à 5, m et p premiers entre eux.
a) Montrer que $\binom{np}{m} \equiv 0\,[p]$.
b) Montrer que $\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p(n-1)}{mp-k} \binom{p}{k}$.
c) Montrer que $\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m}\,[p^2]$.
L'objectif de la suite est de montrer $\binom{2p}{p} \equiv 2\,[p^3]$.
d) Montrer que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1\,[p]$.
e) Montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^2 \equiv 0\,[p]$.
f) Conclure.

5. [PLSR] Soit p un nombre premier impair.
a) Déterminer $\mathrm{card}\{x^2\ ,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.
b) Démontrer l'équivalence : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,[p] \iff a$ est un carré non nul modulo p.
c) On pose $a = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (2k)$. Démontrer que :
- si $p \equiv 1\,[4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)!\,[p]$,
- si $p \equiv -1\,[4]$, alors $a \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)!\,[p]$.

6. [L] ★★ On considère l'équation $2^a + 3^b = 5^c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$.
a) Résoudre l'équation dans le cas $a = b = c$.
b) Traiter le cas b impair.
c) Traiter le cas c impair.
d) Traiter le cas général.

7. [SR] Soit p un nombre premier impair.
a) Quel est le cardinal du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
b) Montrer que l'équation $x^2 = 1$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
c) En déduire : $\mathrm{card}\left\{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right\}$.

d) Soit $\chi : \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ telle que : $\chi(n) = 1$ si $n \wedge p = 1$ et si n est un carré modulo p; $\chi(n) = -1$ si $n \wedge p = 1$ et si n n'est pas un carré modulo p; $\chi(n) = 0$ si $p \mid n$.
Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

e) Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \chi(k)$.

f) En déduire une majoration de $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \chi(k)\right|$ pour $N \in \mathbb{N}$. On pose $\xi = e^{2i\pi/p}$. Montrer que

$$\chi(n) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{a=0}^{p-1} \chi(a)\xi^{k(a-n)}.$$

Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on note $S_k(N) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \xi^{-kn}$.

g) Montrer que $\forall N \geqslant 0$, $|S_k(N)| \leqslant \dfrac{1}{|\sin(k\pi/p)|}$.

h) En déduire que, pour $k < p/2$, $|S_k(N)| \leqslant p/2k$.

i) Trouver une majoration similaire pour $k > p/2$.

j) On pose $G_k = \displaystyle\sum_{a=0}^{p-1} \chi(a)\xi^{ka}$. Montrer que $|G_k| = \sqrt{p}$.

8. [SR] On dit que A est un anneau euclidien si A est un anneau intègre (donc commutatif) et qu'il existe $t : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ vérifiant :
- pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, il existe $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $t(r) < t(b)$,
- $\forall (a, b) \in (A \setminus \{0\})^2, t(ab) \geqslant t(a)$.

a) Les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont-ils euclidiens ? Montrer qu'un corps est un anneau euclidien.
b) Soient A un anneau euclidien et I un idéal de A. Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $I = xA$. Y a-t-il unicité de x ?
c) Dans cette question, on se donne A un anneau euclidien tel que $t(1) = 1$. Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible si et seulement si $t(x) = 1$.

9. [PLSR] Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.
Pour $f, g \in A$, on pose $(f * g)(n) = \displaystyle\sum_{d|n} f(d)\, g(n/d)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif intègre.
b) Caractériser les inversibles de l'anneau A.
c) Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans l'anneau A avec a et $b^2 - 4ac$ inversibles.

10. [PLSR] ★ ***a)*** Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.
b) Alice et Barbara jouent à un jeu. Elles choisissent à tour de rôle un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans remise qu'elles ajoutent à un ensemble S. Le jeu s'arrête quand S engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la joueuse ayant tiré le dernier numéro perd. Selon n, y a-t-il une stratégie gagnante pour la première joueuse ?

c) Même question avec le groupe S_n.

11. [SR] ***a)*** Soient $\sigma \in S_n$ et $c_1 \circ \cdots \circ c_r$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Calculer l'ordre de σ dans le groupe S_n.
b) On note $g(n)$ l'ordre maximal d'une permutation de S_n. Montrer que g est croissante et $n \leqslant g(n) \leqslant n!$
c) Trouver n minimal tel que $g(n) > n$.
d) On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que : $n \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \implies g(n) \geqslant \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.
e) On suppose que $g(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Montrer que : $n \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.
f) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) \leqslant Ce^{\varepsilon n}$.

12. [SR] Lorsque $\sigma \in S_n$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de k-cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Ainsi $n_1(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ. On note également $m(\sigma) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n_k(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ.
a) Soient $i, k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de i dans $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$.
b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma, \tau \in S_n$. On dit que σ et τ sont conjuguées s'il existe $\phi \in S_n$ tel que $\sigma = \phi\tau\phi^{-1}$.
Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall k \in [\![1, n]\!], n_k(\sigma) = n_k(\tau)$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det \left(i \wedge j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Ind. Considérer les matrices $A = (\mathbb{1}_{i|j})$ et $B = (\varphi(j)\mathbb{1}_{j|i})$.
d) Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!], m(\sigma^i) = m(\tau^i)$.
e) Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation P_σ et P_τ sont semblables.

13. [P] ★ Soient G un groupe, A une partie finie non vide de G. Montrer que $|A| = |AA|$ si et seulement si $A = xH$ avec $x \in G$ et H sous-groupe de G tel que $x^{-1}Hx = H$.

14. [P] Soient G un groupe et $A \subset G$ fini non vide tel que $|AA| < \dfrac{3}{2}|A|$. Montrer que $A^{-1}A$ est un sous-groupe de G.

15. [PLSR] ***a)*** Soient $n \geqslant 3$ et Q un polygone régulier à n côtés. Montrer que l'ensemble des isométries affines du plan préservant Q est un groupe à $2n$ éléments.
b) On note maintenant $n = q$, nombre premier impair, et D_{2q} le groupe précédent. Montrer que tout groupe de cardinal $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou à D_{2q}.

16. [L] ***a)*** Trouver tous les groupes d'ordre 8 dont l'ordre maximal des éléments est 4.
b) Trouver tous les groupes d'ordre 8 à isomorphisme près.

17. [L] ***a)*** Donner des exemples de groupes d'ordre 12 commutatifs ainsi qu'un exemple non commutatif.

b) Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 2.
c) Trouver à isomorphisme près les groupes commutatifs d'ordre 12.
d) Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 3.
e) Trouver tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.

18. [PLSR] ★ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_3)$. On admet que $A^{13} = -I_3$.
a) Quels calculs auriez-vous fait pour justifier que $A^{13} = -I_3$?
b) Montrer que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ et que A est d'ordre 26 dans ce groupe.
c) On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A, et on pose $V = G \cup \{0\}$. Montrer que $V = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.
d) On pose $W = \mathrm{Vect}(I_3, A)$. Montrer que, pour tout $M \in G$, il existe $N, P \in W \setminus \{0\}$ telles que $M = P^{-1}N$.
e) On note H le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A^2. Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis que $|H \cap W| = 4$.

19. [L] ★ *a)* Montrer que toute rotation du plan complexe est composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites.
b) Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide X est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de X.
c) Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si X est infini ?

20. [SR] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $|z| < 2$.

21. [PLSR] Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.
On pose $f(X,Y) = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} Y + a_2 X^{m-2} Y^2 + \dots + a_m Y^m$ et on suppose que le polynôme $f(X, 1) \in \mathbb{R}[X]$ est scindé.
Montrer que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, le polynôme $\dfrac{\partial^{n+p} f}{\partial X^n \partial Y^p}(X, 1)$ est nul ou scindé sur $\mathbb{R}$.

22. [L] ★ Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \in [1/C, C]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_{k,n})$, où l'on a noté $x_{k,n}$ les racines complexes de P_n.
a) Montrer que $\{x_{k,n} ;\ n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![1, n]\!]\}$ est borné.
b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} x_{k,n}^2 = \dfrac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
c) Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

23. [SR] *a)* Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ unitaire de degré $n \geqslant 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, avec $a_{n-1} \in \mathbb{R}_+$. Montrer, pour $M = \max(|a_0|, \dots, |a_{n-2}|)$, que toute racine z de P vérifie $\mathfrak{Re}(z) \leqslant 0$ ou $|z| \leqslant \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2}$.
b) Soit p un nombre premier et $b \geqslant 3$ un entier. On écrit $p = \overline{c_n c_{n-1} \cdots c_0}^b$ en base b. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

24. [SR] Soit P un polynôme à n indéterminées $X_1, X_2, \dots, X_n$. On dit que P est symétrique si, pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a $P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On dit que P est homogène de degré $k \in \mathbf{N}$ s'il est somme de monômes de la forme $cX_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$ avec $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$.
a) Montrer qu'il existe une famille presque nulle $(e_i(X_1, X_2, \dots, X_n))_{i \geqslant 0}$ de polynômes à n indéterminées symétriques et homogènes tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$(1 + tX_1)(1 + tX_2) \cdots (1 + tX_n) = \sum_{i \geqslant 0} e_i(X_1, X_2, \dots, X_n) t^i$.
b) Montrer qu'il existe une famille $(h_i(X_1, X_2, \dots, X_n))_{i \geqslant 0}$ de polynômes à n indéterminées symétriques et homogènes tels que, pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0,

$$\frac{1}{(1 - tx_1)(1 - tx_2) \cdots (1 - tx_n)} = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) t^i.$$

On pose $\mathcal{P}_n = \{\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{N}^n,\ \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n\ \}$ et, si $\alpha \in \mathbf{N}^n$, on pose $\Lambda(\alpha)$ le n-uplet obtenu en ordonnant les entiers de α par ordre décroissant, puis pour tout $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $m_\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n,\ \Lambda(\alpha) = \lambda} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$.
c) Calculer m_λ avec $\lambda = (2, 1, 0, 0)$ et λ le n-uplet contenant r fois 1 et $n - r$ fois 0. Pour $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$, on note $M_{\lambda,\mu}$ le nombre de matrices dont les coefficients valent 0 ou 1 et telles que la somme des coefficients de la i-ième ligne vaut toujours λ_i et celle des coefficients de la j-ième colonne vaut toujours μ_j.
d) Montrer que $\prod_{i=1}^{n} e_{\lambda_i}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} M_{\lambda,\mu} m_\mu$.

25. [PLSR] ★ Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non tous constants et premiers entre eux deux à deux.
a) On veut montrer que si $A + B = C$ alors $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) \leqslant M(ABC) - 1$ où $M(P)$ est le nombre de racines distinctes du polynôme P.
Si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on note $W_{P,Q} = PQ' - P'Q$.
  i) Montrer que $W_{A,B} = W_{C,B} = W_{A,C} \neq 0$.
  ii) Montrer que $\deg(A \wedge A') + \deg(B \wedge B') + \deg(C \wedge C') \leqslant \deg(W_{A,B})$.
  iii) Conclure.
b) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Donner un exemple de $(A, B, C) \in \mathbb{C}[X]^3$ avec $\deg(A) = d$ et pour lequel $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) = M(ABC) - 1$.

c) Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $A^n + B^n = C^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n \leqslant 2$. Montrer qu'il existe des solutions pour $n = 2$.

26. [PLSR] Soit $\mathbb{R}\left[X, X^{-1}\right]$ l'ensemble des fractions rationnelles dont le dénominateur est une puissance de X.
a) Montrer que $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}(X)$. En est-ce un sous-corps ? Quels sont ses éléments inversibles ?
b) Déterminer les automorphismes de l'anneau $\mathbb{R}$.
c) Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$.
d) Déterminer les automorphismes de l'anneau $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$.

27. [P]★★ Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires. On dit que P et Q sont entrelacés lorsqu'entre deux racines consécutives de l'un (en tenant compte des multiplicités) il y a exactement une racine de l'autre. On suppose que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$, que Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et que P et Q n'ont aucune racine commune. On pose enfin $F = \dfrac{P}{Q}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Montrer l'équivalence entre :
(i) P est scindé sur $\mathbb{R}$ et P et Q sont entrelacés, (ii) $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$

28. [L] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Exprimer $\det(A + uv^T)$. Dans le cas où celui-ci est non-nul, exprimer $(A + uv^T)^{-1}$.

29. [SR] Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.
a) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Que dire de f si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée ?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{tr}\, A = 0$. Montrer que A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

30. [SR] ***a)*** Calculer $\det\left(i^j\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
b) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $P_i = \displaystyle\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} X^{k-1}$. Calculer $\det(\alpha_{i,k})_{1 \leqslant i,k \leqslant n}$.

31. [SR] Soient $n, r, k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leqslant r \leqslant n$ et $r + k \leqslant n$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Montrer que M est de rang $r + k$ si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est de rang k.

32. [P] ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, m un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la réduction modulo m définit un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, puis que ce morphisme est surjectif.

33. [P] ★★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\{Mv\ ;\ M \in A\} = \mathbb{C}^n$. Montrer que $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

34. [PLSR] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que n est divisible par 3.

35. [SR] Soit $\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes non constant. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme $(a + b\chi(r) + c\overline{\chi(s)} + d\chi(r)\overline{\chi(s)})_{r,s \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
b) Pour $\xi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes, calculer $\displaystyle\sum_{r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} \xi(r)$.
c) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par produit matriciel et que la $\mathbb{R}$-algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on exhibera un isomorphisme).

36. [SR] On s'intéresse aux parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont des groupes pour le produit matriciel.
a) Donner des exemples de tels groupes, dont certains ne soient pas des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, où B est inversible et N nilpotente.
c) Caractériser ces groupes.

37. [SR] ★ Pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, soit $\mathrm{Pf}(A) = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.
a) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$.
b) On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(BAB^T) = \det(B)\mathrm{Pf}(A)$.
Ind. Pour le cas $\det B < 0$, considérer la matrice $J = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
c) Soit $R \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^T$. Montrer l'équivalence entre :
(i) R n'a pas de valeur propre réelle, (ii) $\mathrm{Pf}(A) \neq 0$, (iii) A est inversible.
d) Soient $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^T - R_1$ et $A_2 = R_2^T - R_2$. On suppose $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\mathrm{Pf}(A_1) = \mathrm{Pf}(A_2) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^T$.

38. [L] Déterminer l'image de $\varphi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mapsto \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}$.

39. [PLSR] À quelle condition sur la matrice A, la comatrice de A est-elle diagonalisable ?

40. [PLSR] Pour $i \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $c_i(A)$ le coefficient numéro i du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A.
a) Montrer que $c_i(AB) = c_i(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i \in \mathbb{N}$.
b) Le résultat reste-t-il valable pour des matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ quelconque ?

41. [PLSR] ★ ★ Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et $S = \left(\zeta^{(r-1)(s-1)}\right)_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$.
a) Donner une expression simple de $\det(S)$. *Ind.* On pourra calculer S^2.
b) On pose $G_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik^2\pi}{n}}$. Donner une expression simple de $|G_n|^2$ par un calcul direct.

c) On suppose que n est impair. Déterminer le spectre de S et la multiplicité de chacune de ses valeurs propres.

42. [SR] *a)* Rappeler l'ordre d'un élément k de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
b) Montrer que deux permutations de $\mathcal{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont pour tout k, le même nombre de cycles de longueur k dans leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints.
c) Soit c un cycle de longueur k. Déterminer le nombre de cycles dans la décomposition de c^i en produit de cycles à supports disjoints.

43. [PLSR] Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $v, w \in \mathcal{L}(E)$. On note $u = vw - wv$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note $F_u(\lambda) = \bigcup_{m\geqslant 1} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id})^m$
a) Montrer que $F_u(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel stable par u et qu'il admet un supplémentaire stable par u.
b) On écrit $\pi_u = (X-\lambda)^p Q$ avec $(X-\lambda)\wedge Q = 1$. Montrer que $E = F_u(\lambda) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$.
On suppose de plus que u commute avec v. On note p_λ le projecteur sur $F_u(\lambda)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, Q(u)$.
c) Montrer que p_λ commute avec v.
d) Montrer que $\mathrm{tr}(up_\lambda) = \lambda\,\mathrm{rg}(p_\lambda) = 0$.
e) En déduire que u est nilpotent.
f) On suppose désormais que $vw^2 - w^2v = w$. Montrer qu'il existe un entier d impair tel que $\pi_w = X^d$.

44. [SR] Soit A, B, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme arbitraire $\|\ \|$.
a) Montrer que M est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}(M^k) = 0$.
b) On suppose que $A(AB - BA) = 0$. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.
c) On suppose que $A(AB - BA) = (AB - BA)A$. Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.
d) Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toutes semblables. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une extraction φ et une matrice nilpotente N telles que $\dfrac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} N$.

45. [SR] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{i=1}^r \underbrace{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}_{=P_i}$.
a) Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur $\mathrm{Ker}\, P_i(A)$.
b) Montrer qu'il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$ et $ND = DN$.
c) Si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Comm}_X : M \mapsto MX - XM$. On reprend les notations précédentes. Montrer que $\mathrm{Comm}_A = \mathrm{Comm}_D + \mathrm{Comm}_N$, que Comm_D et Comm_N commutent et sont respectivement diagonalisable et nilpotente.

46. [PLSR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite toute puissante (TP$\mathbb{K}$) si, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = B^p$.

a) Trouver les matrices TP$\mathbb{K}$ pour $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\chi_A = \prod_{i=1}^k (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts dans $\mathbb{K}$ et les α_i sont des entiers naturels non nuls.
i) Montrer qu'il existe $N_1, \ldots, N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux $\lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$.
ii) Montrer que A est TP$\mathbb{K}$ si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont. On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unipotente si $M - I_n$ est nilpotente et on note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, on pose $\ln(A) = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p-1}}{p}(A - I_n)^p$.
c) Justifier la définition de $\ln(A)$ pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. Montrer que exp est une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur l'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.
d) Montrer que les matrices unipotentes sont TP$\mathbb{K}$.
e) Déterminer finalement les matrices toutes-puissantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

47. [PLSR] ★ Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation $(E) : X - AXB = C$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ les spectres complexes de A et B.
a) On suppose que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, $\alpha\beta \neq 1$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution.
b) Que se passe-t-il dans le cas général ?

48. [L] Combien y-a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^3 = 0$?

49. [L] ★★ Déterminer les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M soit semblable à $2M$.

50. [L] ★ ★ Déterminer les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $k \geqslant 2$, on dispose de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A = M^k$.

51. [SR] Montrer que toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ admet une racine carrée.

52. [P] ★★ *a)* Montrer que toute $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique UD où $U \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente, $D \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et $UD = DU$.
b) Soit ρ un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$ tel que les coefficients de $\rho(M)$ soient des fonctions polynomiales de ceux de M. Montrer que ρ respecte la décomposition de la question précédente.

53. [SR] *a)* Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. À quelle condition existe-t-il $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales ?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A s'écrit de manière unique $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.
c) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\pi_A = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{\beta_i}$ son polynôme minimal et $P \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer que $P(A)$ est diagonalisable si et seulement si $P^{(j)}(\lambda_i) = 0$ pour tous $i \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, \beta_i - 1]\!]$.

54. [SR] ***a)*** Soient u, v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, tels que $uv = vu$. Montrer que u et v sont codiagonalisables.
b) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que u admet au plus une décomposition de la forme $u = d+n$, où $(d, n) \in \mathbb{K}[u]^2$, l'endomorphisme d est diagonalisable, l'endomorphisme n est nilpotent et $dn = nd$.

55. [SR] Soient $n \in \mathbb{N}$ et w une fonction continue positive non identiquement nulle de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
a) Soit $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, $\displaystyle\int_0^1 f_k f_\ell w = \delta_{k,\ell}$. Montrer que $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.
b) Montrer qu'il existe une unique suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^1 p_k p_\ell w = \delta_{k,\ell}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit polynomiale de degré k à coefficient dominant positif.
c) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, p_n a n racines simples dans $]0, 1[$ que l'on note $x_{1,n} < \cdots < x_{n,n}$.
d) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 pw = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} p(x_{k,n})$.

56. [P] ★ Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i, e_j \rangle \leqslant 0$ pour tous i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre si et seulement s'il existe une forme linéaire f sur E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) > 0$.

57. [L] Soient $n, m \geqslant 1$ des entiers. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle_E)$ et une application $f : \mathbb{R}^n \to E$ tels que, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x' \rangle^m = \langle f(x), f(x') \rangle_E$.

58. [L] ★★ Trouver un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ et $f : \mathbb{R} \to E$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-\dfrac{(y-x)^2}{2}\right) = \langle f(x), f(y) \rangle$.

59. [L] Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on considère r vecteurs de $\mathbb{R}^m$ notés $x_1, \ldots, x_r$.
a) Montrer qu'il existe une matrice $U_0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ minimisant $\displaystyle\sum_{i=1}^r \|x_i - UU^T x_i\|_2^2$ parmi toutes les matrices $U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telles que $U^T U = I_n$.
b) Montrer que $\displaystyle\min_{U \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^r \|x_i - UU^T x_i\|_2^2 = \min_{U,V \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^r \|x_i - UV^T x_i\|_2^2$.

60. [PLSR] Soient $(\lambda_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante vérifiant $\lambda_0 = 0$ et k dans $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
a) Calculer $I_{n,k} = \displaystyle\inf_{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}} \int_0^1 \left(t^k - \sum_{i=0}^n a_i t^{\lambda_i}\right)^2 dt.$
On admettra que le déterminant de la matrice de coefficient général $m_{i,j} = \dfrac{1}{1 + x_i + y_j}$ vaut $\dfrac{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n}(1 + x_i + y_j)}$.
b) En déduire une condition suffisante sur (λ_n) pour que $F = \mathrm{Vect}(t \mapsto t^{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit dense dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $f \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$.

61. [SR] Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\langle\ ,\ \rangle_1$ et $\langle\ ,\ \rangle_2$ deux produits scalaires tels que $\forall (x, y) \in V^2,\ \langle x, y \rangle_1 = 0 \iff \langle x, y \rangle_2 = 0$
a) Soient $x, y \in V$. Montrer que si $\|x\|_1 = \|y\|_1$ alors $\|x\|_2 = \|y\|_2$.
b) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|x\|_1 = C\|x\|_2$.
c) Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ qui préserve l'orthogonalité : si $\langle x, y \rangle = 0$ alors $\langle u(x), u(y) \rangle = 0$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $u \circ u^* = C\,\mathrm{id}$.

62. Soient E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose $\Lambda = \left\{\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i,\ (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{Z}^n\right\}$.
a) Soit $r \in \mathcal{O}(E)$ tel que $r(\Lambda) \subset \Lambda$. Montrer que $r(\Lambda) = \Lambda$.
b) Montrer que $G_\Lambda = \{r \in \mathcal{O}(E), r(\Lambda) = \Lambda\}$ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$.
c) Ici $n = 3$. Montrer que tous les éléments de G_Λ ont un ordre qui divise 12.

63. [SR] Soient E un espace euclidien de dimension n, G un groupe fini et ρ un morphisme injectif de G dans $\mathrm{GL}(E)$ tel que, pour tout $g \in G$, $\rho(g) \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que les éléments de G sont d'ordre 1 ou 2, puis que $|G|$ divise 2^n.

64. [PLSR] ★★ ***a)*** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ soit positive, puis définie positive.
b) Soit $(a, b, c) \in [-1, 1]^3$. On suppose que $1 + 2abc \geqslant a^2 + b^2 + c^2$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2(abc)^n \geqslant a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$.

65. [PLSR] ★ ***a)*** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe un vecteur propre de A dont tous les coefficients sont > 0.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients > 0. Montrer que A possède un vecteur propre à coefficients > 0.
c) Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$, $M_i = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $M_1 \times \cdots \times M_n$ est à spectre inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

66. [SR] ***a)*** Rappeler la définition de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
b) Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u et u^* commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant soit de taille 1, soit de taille 2 et de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

67. [PLSR] ★ Montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

68. [P] On admet l'existence d'une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ d'unité 1 admettant une base de la forme $(1, i, j, k)$ avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$. Montrer que le groupe des automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

69. [PLSR] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$.
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\inf\limits_{\|G\|=1} \|AG - GB\| = \min\limits_{(\lambda_1,\lambda_2)\in \mathrm{Sp}(A)\times\mathrm{Sp}(B)} |\lambda_1 - \lambda_2|$.

70. [L] Soient X un ensemble et $K : X \times X \to \mathbb{R}$. On suppose que, pour tous $n \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_n \in X$, $(K(x_i, x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $x \in X$, on note $K_x : y \mapsto K(x, y)$.
Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^X$ engendré par les fonctions $(K_x)_{x\in X}$.
Soit $a, b \in E$. Par définition de E, il existe $(\lambda_x)_{x\in X}$ et $(\mu_x)_{x\in X}$ dans $\mathbb{R}^X$ n'admettant qu'un nombre fini de coefficients non nuls tels que $a = \sum\limits_{x\in X} \lambda_x K_x$ et $b = \sum\limits_{x\in X} \mu_x K_x$, et on pose

$$\langle a, b\rangle = \sum_{x,y\in X} \lambda_x \mu_y K(x, y).$$

a) Montrer que cela définit bien un produit scalaire sur E.
b) Montrer qu'il existe $f : X \to E$ telle que $\forall x, y \in X, K(x, y) = \langle f(x), f(y)\rangle$.

71. [L] ★ Soient $p \geqslant 1$ et $A, B \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\mathrm{tr}\left(I_p - A^{-1}B\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{\det A}{\det B}\right)$.
b) Soient $n \geqslant 1$, $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda > 0$. Pour $1 \leqslant m \leqslant n$, on pose $A_m = \sum\limits_{k=1}^{m} u_k\, u_k^T$ et $B_m = \lambda I_p + A_m$. Montrer que, pour $1 \leqslant m \leqslant n$, B_m est symétrique définie positive.
c) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n.
Montrer que $\sum\limits_{m=1}^{n} \langle u_m, B_m^{-1} u_m\rangle \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} \ln\left(1 + \dfrac{\lambda_i}{\lambda}\right)$.

72. [PLSR] Si G est un groupe, on note $Z(G)$ son centre.
On pose $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A^*A = I_n\}$ où $A^* = \overline{A}^T$, l'ensemble des matrices unitaires.
a) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, c'est-à-dire telle que $A^* = A$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ telle que P^*AP soit diagonale.

c) Démontrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus quatre matrices unitaires.
d) Déterminer $Z\left(\mathcal{U}_n(\mathbb{C})\right)$.

Analyse

73. [PLSR] Soit F l'application qui à une norme N sur $\mathbb{R}^n$ associe la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour N.
a) L'application F est-elle injective ?
b) Quelle est l'image de F ?

74. [SR] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\phi : E \to \mathbb{R}^+$ une application telle que
i) pour tout $x \in E, \phi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
ii) pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi(\lambda x) = |\lambda|\phi(x)$.
On note $C = \{x \in E,\ \phi(x) \leqslant 1\}$.
a) Montrer que ϕ est une norme si et seulement si C est convexe.
b) Soit K un partie de E convexe, compacte, d'intérieur non vide et symétrique par rapport à l'origine. Montrer que K est un voisinage de l'origine.
c) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Posons $I(x) = \{\lambda > 0\,;\ \exists k \in K,\ x = \lambda k\}$. Montrer que $I(x)$ est un convexe fermé, non vide.

75. [P] ★★ Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}^n, +)$ dans lequel 0 est un point isolé. Montrer qu'il existe une famille libre $(u_1, \dots, u_p)$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $G = \left\{\sum\limits_{k=1}^{p} a_k.u_k,\ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p\right\}$.

76. [L] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire des parties de la forme $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ avec $a_1 \leqslant b_1, \dots, a_n \leqslant b_n$. Pour toute partie finie $G \subset \mathbb{R}^n$, on note $f(G) = \{F \cap G,\ F \in E\}$. Déterminer $\sup\{k \in \mathbb{N}\,;\ \exists G \subset \mathbb{R}^n,\ |G| = k,\ f(G) = \mathcal{P}(G)\}$.

77. [PLSR] ***a)*** Soient E un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E. Soit (f_i) une suite de fonctions affines, continues, qui commutent deux à deux et telles que $f_i(K) \subset K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que les fonctions f_i ont un point fixe commun.
b) Le résultat précédent reste-t-il valable pour une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions indexées par un ensemble non dénombrable ?

78. [PLSR] ★★ Soient H le groupe (pour la composition) des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, H^+ le sous-groupe des homéomorphismes croissants.
a) Caractériser les groupes finis isomorphes à un sous-groupe de H.
b) Montrer qu'on peut munir tout sous-groupe dénombrable G de H^+ d'une relation d'ordre totale telle que $\forall f, g, h \in G,\ f \leqslant g \implies h \circ f \leqslant h \circ g$.
c) Réciproquement, montrer que tout groupe dénombrable pouvant être muni d'un tel ordre est isomorphe à un sous groupe de H^+.

79. [PLSR] Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, F une partie finie de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, f une application 1-lipschitzienne (pour les normes euclidiennes canoniques) de F dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que l'on peut prolonger f en une application 1-lipschitzienne de $F \cup \{x\}$ dans $\mathbb{R}^m$.

80. [SR] Soient $\gamma, \tau \in \mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$,
$D_N = \left\{x \in \mathbb{R}^d \; ; \; \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \|k\| \leqslant N \Rightarrow |\langle x, k\rangle| \geqslant \dfrac{\gamma}{\|k\|^\tau}\right\}$ et $D = \bigcap_{N \geqslant 1} D_N$.
Montrer que D est fermé et d'intérieur vide. Qu'en est-il de D_N ?

81. [P] ★★ Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \to F$ telle que : $\forall r \in]0,1], \forall x \in E,\ B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right) \subset f(B(x,r)) \subset B(f(x), 2r)$.
a) Montrer que f est continue et surjective.
b) Que peut-on dire de l'image par f d'un ouvert ? D'un fermé ?
c) Soit γ un chemin continu de $[0,1]$ dans F. Montrer qu'il existe un chemin c continu de $[0,1]$ dans E tel que $f \circ c = \gamma$.

82. [PLSR] ***a)*** Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide. Soit $f : X \to X$. On suppose qu'il existe $\theta \in [0,1[$ tel que $\forall x, y \in X, \|f(x) - f(y)\| \leqslant \theta\|x - y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe c et que, pour tout $x \in X$, $f^m(x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} c$.
b) Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide. Soit $f : X \to X$.
On suppose que $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
i) Soient Y, Z deux compacts non vides tels que $f(Y) \subset Y$ et $f(Z) \subset Z$. Montrer que $Y \cap Z$ est non vide.
ii) En déduire que f possède un unique point fixe.

83. [PLSR] On se place dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis d'une norme.
a) Montrer qu'il existe $C > 0$ et $R_0 \geqslant 0$ tels que, pour tout $r \geqslant R_0$, $\operatorname{card}\{x \in \mathbb{Z}^n \; ; \; \|X\| \leqslant r\}) \leqslant Cr^n$.
On appelle plongement grossier $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ une fonction qui vérifie :
$\forall a \geqslant 0, \exists b \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \|x - y\| \leqslant a \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant b$,
$\forall b \geqslant 0, \exists a \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \|f(x) - f(y)\| \leqslant b \Rightarrow \|x - y\| \leqslant a$.
Soit $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ un prolongement grossier.
b) Montrer qu'il existe $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $\mu > 0$ tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(x) = +\infty$ et $\forall x, y \in \mathbb{Z}^n, \rho(\|x - y\|) \leqslant \|f(x) - f(y)\| \leqslant \mu\|x - y\|$.
c) Montrer que $m \geqslant n$.
d) Adapter pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

84. [PLSR] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose :
$L_f(x,r) = \sup\{\|f(x) - f(y)\| \; ; \; y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| \leqslant r\}$,
$\ell_f(x,r) = \inf\{\|f(x) - f(y)\| \; ; \; y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| \geqslant r\}$.
a) Montrer que :
$L_f(x,r) = \sup\{\|f(x) - f(y)\| \; ; \; y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| = r\}$,
$\ell_f(x,r) = \inf\{\|f(x) - f(y)\| \; ; \; y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| = r\}$.

b) Pour x fixé, montrer que $r \mapsto L_f(x,r)$ et $r \mapsto \ell_f(x,r)$ sont croissantes.
On dit que f est quasi-conforme s'il existe $K_f > 0$ tel que :
$\forall (x,r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*}, L_f(x,r) \leqslant K_f \ell_f(x,r)$.
c) On suppose f quasi-conforme. Montrer qu'alors $L_f(x, 2r) \leqslant (1 + K_f)L_f(x,r)$.
d) Montrer que f est quasi-conforme si et seulement si f^{-1} est quasi-conforme.

85. [P] ★ Soient $n \geqslant 2$ et e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $a_{v,M} \in \mathbb{R}$, tel que la suite $(M^k v)_{k \geqslant 1}$ tende vers $a_{v,M} e_1$, avec de plus $v \mapsto a_{v,M}$ non identiquement nulle.
Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $f_v : M \in \mathcal{A} \mapsto a_{v,M}$ est continue.

86. [L] Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $X \subset E$ et $x \in E$, on note $d(x, X) = \inf_{y \in X} \|y - x\|$ et $\Pi_X(x) = \{y \in X \; ; \; \forall z \in X, \|y - x\| \leqslant \|z - x\|\}$.
a) Pour quels ensembles $Y \subset E$ existe-t-il $X \subset E$ et $x \in E$ tels que $Y = \Pi_X(x)$?
b) Soient $X \subset E$ et $x \in E \setminus X$ tels que $d(x, X) = 0$. Montrer que $\Pi_X(x) = \varnothing$.
c) Existe-t-il $X \subset E$ et $x \in E \setminus X$ tels que $d(x, X) > 0$ et $\Pi_X(x) = \varnothing$?
d) On suppose qu'il existe un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pour tout $x \in E$, que E est de dimension finie et que $X \subset E$ est un ensemble convexe fermé et borné. Montrer que $\Pi_x(X)$ est un singleton.

87. [L] ★ Soit $n \geqslant 1$ un entier, $L \in]0,1[$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application L-lipschitzienne pour $\| \ \|_\infty$, et $x_* \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_*) = x_*$.
a) Soit $(x_k)_{k \geqslant 1}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \geqslant 1, x_{k+1} = F(x_k)$. Montrer que $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x_*$.
b) Pour $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note $F^{|I} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, par $F^{|I}(x)_i = \begin{cases} F(x)_i & \text{si } i \in I \\ x_i & \text{si } i \notin I \end{cases}$.
Montrer que $F^{|I}$ est 1-lipschitzienne pour $\| \ \|_\infty$.
c) Soit $(I_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ telle que chaque indice $i \in \{1, \dots, n\}$ appartienne à une infinité de ces ensembles. Soient $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et, pour $k \geqslant 1$, $x_{k+1} = F^{|I_k}(x_k)$. Montrer que cette suite converge vers x_*.

88. [PLSR] ★★ On munit l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\| \ \|_\infty$.
a) Soit (a_n) une suite réelle sommable. Montrer que l'application $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ définit une forme linéaire continue sur l'espace ℓ^∞.
b) On suppose l'existence d'une partie $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que : (i) pour tous $A, B \in F$, $A \cap B \in F$, (ii) pour $A \in F$, F contient toute partie B de $\mathbb{N}$ qui contient A, (iii) F ne contient que des ensembles infinis, (iv) si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors $A \in F$ ou $\mathbb{N} \setminus A \in F$.
i) Soit $x \in \ell^\infty$.
Montrer qu'il existe un unique réel x^∞ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in F, \forall n \in A, |x_n - x^\infty| \leqslant \varepsilon$.
ii) En déduire l'existence d'une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui n'est pas de la forme donnée en question ***a)***.
c) On note c_0 le sous-espace de ℓ^∞ des suites réelles de limite nulle. Montrer que toute forme linéaire continue sur c_0 est de la forme donnée en question ***a)***.

89. [P] ★ Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$, E une partie de $\mathbb{R}^2$ coupant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ s'annulant sur E. Montrer que $P = 0$.

90. [P] ★★ Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$, C un convexe ouvert de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ne coupant pas C.

91. [L] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $\Delta = \left\{x \in (\mathbb{R}^+)^n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $\pi(x) \in \Delta$ tel que $\forall z \in \Delta$, $\langle z - \pi(x), x - \pi(x)\rangle \leqslant 0$.
a) Soient $x, u \in \mathbb{R}^n$ et $x' = \pi(x+u)$.
Montrer que, pour tout $z \in \Delta$, $2\langle u, z - x\rangle \leqslant \|z - x\|_2^2 - \|z - x'\|_2^2 + \|u\|_2^2$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $x_1, y_1 \in \Delta$ et $(\gamma_k)_{k\geqslant 1}$ une suite strictement positive. Pour $k \geqslant 2$, on définit par récurrence $x_{k+1} = \pi(x_k + \gamma_k A y_k)$ et $y_{k+1} = \pi(y_k - \gamma_k A^T x_k)$.
b) Montrer qu'on peut choisir la suite $(\gamma_k)_{k\geqslant 1}$ de sorte que
$$\max_{x\in\Delta} \sum_{k=1}^N \langle x, A y_k\rangle - \min_{y\in\Delta} \sum_{k=1}^N \langle x_k, A y\rangle \leqslant o(N).$$
c) En déduire que $\max_{x\in\Delta} \min_{y\in\Delta} \langle x, Ay\rangle = \min_{y\in\Delta} \max_{x\in\Delta} \langle x, Ay\rangle$.

92. [PLSR] Soient E euclidien et $T : E \to E$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\big|\|T(x) - T(y)\| - \|x - y\|\big| \leqslant C$.
L'objectif est de montrer qu'il existe $h \in \mathbb{R}^+$ et un unique $u \in \mathcal{O}(E)$ tels que $\forall x \in E$, $\|T(x) - u(x)\| \leqslant h$.
a) Conclure dans le cas où $C = 0$.
b) Prouver l'unicité de u.
c) Pour tout x de E, on pose $u_0(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{T(2^n x)}{2^n}$. Montrer que u_0 est bien définie, linéaire et conserve la norme.
d) Conclure.

93. [L] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien, $F : E \to E$ et $G = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id} - F)$.
a) Montrer que, F est 1-lipschitzienne pour $\|\ \|$ si et seulement si $\forall x, x' \in E$, $\langle G(x') - G(x), x' - x\rangle \geqslant \|G(x') - G(x)\|^2$.
b) On suppose que F est 1-lipschitzienne pour $\|\ \|$ et qu'il existe $x_* \in E$ tel que $F(x_*) = x_*$ (autrement dit x_* est un point fixe de F). Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $x_1 \in E$ et, pour $n \geqslant 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + F(x_n)}{2}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\|F(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{2\|x_1 - x_*\|}{\sqrt{n}}$.
c) En déduire que, si E est un espace euclidien, $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un point fixe de F.

94. [PLSR] ★ Soient $n \geqslant 2$ et $I_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$, où $E_\lambda(A)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.
a) Montrer que $I_n(\mathbb{R})$ est stable par similitude.
b) Soient $A, B \in I_n(\mathbb{R})$.
Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.
c) On note $I_n^*(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) = E_\lambda(A)\}$. Étudier la connexité par arcs de $I_n(\mathbb{R})$ et de $I_n^*(\mathbb{R})$.
d) Déterminer les classes de similitude incluses dans $I_2(\mathbb{R})$.

95. [P] Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe une norme stricte sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle les éléments de G sont des isométries.
b) On suppose que les éléments de G stabilisent un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ noté K. Montrer que les éléments de G ont un point commun dans K.
c) Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel les éléments de G sont des isométries.

96. [PLSR] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour tous $g \in G$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $g \cdot A = gAg^T$.
a) Donner un exemple de produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la norme N_0 euclidienne associée.
b) Soit $N : A \mapsto \sup_{g\in G} N_0(g\cdot A)$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
c) Soit $K = \{gg^T, g \in G\}$. Montrer qu'il existe un compact convexe C vérifiant : $K \subseteq C$, $\{g\cdot A,\ (g,A) \in G \times C\} \subseteq C$ et $C \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
d) Montrer qu'il existe un produit scalaire G invariant pour $\cdot$.
e) La borne supérieure $\sup_{A\in C} \sup_{B\in C} \|A - B\|$ est-elle atteinte ? Si oui, est-elle atteinte en un unique A_0 ?

97. [P] ★★ Déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(\cos n)$ et $(\cos^n n)$.

98. [PSLR] ★★ Soit S une partie de $\mathbb{N}^*$ infinie et stable par produit. On range les éléments de S en une suite strictement croissante $(s_n)_{n\geqslant 1}$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n\geqslant 1}$ admet une limite dans $[1, +\infty[$.

99. [L] Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n e^{-i\,\mathrm{Im}(z_n)}$. Pour quelles valeurs de z_0 cette suite est-elle convergente ?

100. [L] Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k^n}{2^k}$ quand $n \to +\infty$.

101. [P] On fixe un entiers $n \geqslant 2$ et $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $]0,1[$. Soit pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(x_k^i)_{k\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1}^i = (1 - t_i)x_k^i + t_i x_k^{i+1}$. Montrer que les n suites $(x_k^i)_{k\geqslant 0}$ pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ convergent vers une même limite.

102. [PLSR] ★ Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{k=1}^m a_k z_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

103. [P] ★★ Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+h} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

104. [L] Pour $x_0 > 0$, on définit par récurrence $x_{n+1} = x_n + \int_{x_n}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. Étudier la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Donner un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à deux termes.

105. [L] ★★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.
a) Montrer qu'il existe une unique suite $(n_i)_{i\geqslant 1} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n_{i+1} \geqslant {n_i}^2$ et que $\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n_i}\right)$.
b) Généraliser ce résultat.

106. [L] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive.
On note, pour $\alpha \geqslant 0$, $\mathcal{R}_\alpha = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n a_n \leqslant \alpha \right\}$.
Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle positive sommable. Pour tout $\alpha > 0$, construire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\alpha$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n b_n = \max_{(u_n)\in\mathcal{R}_\alpha} \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n b_n \right\}$.

107. [PLSR] Soient $p \in]1,+\infty[$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
a) Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ des suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $\sum {a_n}^p$ et $\sum {b_n}^q$ convergent. Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.
b) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{{R_n}^\alpha}$.
c) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum {b_n}^q$ converge, $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $\sum {a_n}^p$ converge.

108. [PLSR] On admet l'irrationalité de π. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos(n)}$.
a) Montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum u_n$ converge.

109. [PLSR] *a)* Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n) \in {\mathbb{R}^+}^n$, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$.
b) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} < e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
c) Montrer que la constante e est optimale.

110. [PLSR] Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_{0,n} = a_0 + \cdots + a_n$ et, pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $H_{\alpha,n} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} H_{\alpha-1,k}$. Si $(H_{\alpha,n})_{n\geqslant 0}$ converge, on dit que (a_n) est H_α-sommable.
a) Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est H_α-sommable, montrer qu'elle est $H_{\alpha+1}$ sommable.
b) On suppose $(H_{0,n})_{n\geqslant 0}$ périodique. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est H_α-sommable pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
c) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. On suppose que $\sum a_n$ diverge. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas H_α-sommable.
d) Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est H_α-sommable, montrer que $a_n = o(n^\alpha)$.
e) Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ qui n'est pas H_α-sommable mais qui est $H_{\alpha+1}$-sommable.

111. [SR] *a)* Montrer que : $\cos(k\theta)$, $\frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}$, $\frac{\cos((k+1/2)\theta)}{\cos(\theta/2)}$ et $\frac{\sin((k+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}$ sont des polynômes en $\cos\theta$.
b) Soient $a_0,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ des réels.
On suppose que : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un polynôme complexe P tel que : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = |P(e^{i\theta})|^2$.

112. ★ *a)* Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n,p, u_{n+p} \leqslant u_n + u_p + C$, où C est une constante réelle. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge ou tend vers $-\infty$.
b) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ continue et croissante, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1$. On note f^n la composée itérée de f (n fois).
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{f^n(x) - x}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite qui ne dépend pas de x.

113. [SR] ★ Soient $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ dans $(\mathbb{R}^{+*})^n$.
On note $a \geqslant b$ si : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} b_i$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Montrer que $a \geqslant b$ si et seulement si, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{\sigma(i)}} \geqslant \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{\sigma(i)}}$.

114. [PLSR] ***a)*** Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [0, 2\pi]$ tel que $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$.
b) Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
Montrer qu'il existe une partie I de $[\![1, n]\!]$ telle que $\left|\displaystyle\sum_{j\in I} z_j\right| \geqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |z_j|$.

115. [PLSR] Soient $a < b$. Une dissection du segment $[a, b]$ est une suite finie $(t_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ strictement croissante telle que $t_0 = a$ et $t_n = b$. Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on définit la variation de f sur $[a, b]$ par $V(f, [a, b]) = \displaystyle\sup_{\substack{t \text{ dissection} \\ \text{de } [a,b]}} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$.
a) Calculer $V(f, [a, b])$ dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
b) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Montrer que $V(f, [0, 1]) < +\infty$ si et seulement s'il existe g et h croissantes telles que $f = g - h$.

116. [L] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $S_- = \{x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0\}$.
a) L'ensemble S_- peut-il être fini non vide ?
b) On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que $S_- \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ell(I_n) \leqslant \varepsilon$ (où $\ell(I_n)$ désigne la longueur de I_n). Montrer que f est croissante (donc $S_- = \varnothing$).

117. [L] Soient E un espace vectoriel, $C \subset E$ un ensemble convexe non vide, $a < b$ deux réels, et F l'ensemble des fonctions $f : C \to [a, b]$ convexes. Soit $x, y \in C$ fixés. Déterminer $\displaystyle\sup_{f\in F} (f(y) - f(x))$. Déterminer les cas où la borne supérieure est atteinte.

118. [L] Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, on note $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq +\infty\}$. Si $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$, on définit $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par $f^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \{xy - f(x)\}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.
a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$. Montrer que $\mathrm{dom}(f^*)$ est un ensemble convexe et que f^* est convexe sur $\mathrm{dom}(f^*)$.
b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable.
On pose $E = \{(y, a) \in \mathbb{R}^2 ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy - a \leqslant g(x)\}$.
i) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\sup_{(y,a)\in E} (xy - a)$.
ii) En déduire que $(g^*)^* = g$.
iii) Étendre au cas où g n'est pas dérivable.

119. [PLSR] Soient I un intervalle réel contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose qu'il existe $A, C > 0$ telles que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant C|f(x)| + A$.
Montrer que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant |f(0)|e^{C|x|} + \dfrac{A}{C}\left(e^{C|x|} - 1\right)$.

120. [L] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue et dont une primitive est bornée. On suppose que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x (x - y)\,|f(y)|\mathrm{d}y$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Quelles généralisations peut-on étudier ?

121. [PLSR] On note $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Une application $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^{+*}$ est appelée une jauge. Soit $D = ((a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}, (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1})$ une subdivision pointée de $[a, b]$, c'est-à-dire $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$. On dit que D est δ-fine lorsque pour tout i, $|a_{i+1} - a_i| \leqslant \delta(x_i)$.
a) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telles que $\forall x, y \in [a, b], y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
b) Si δ est une jauge, montrer qu'il existe une subdivision pointée δ-fine.
c) Redémontrer le théorème de Heine pour f continue.
d) Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et I un réel. On dit que f est HK-intégrable, d'intégrale I si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ telle que, pour toute subdivision pointée $((a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}, (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1})$ δ-fine, on a $\left|\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)f(x_i) - I\right| \leqslant \varepsilon$.
Montrer que I est unique. On la note $\displaystyle\int_{HK} f$.
e) Montrer que, si f est dérivable, f' est HK-intégrable et $\displaystyle\int_{HK} f' = f(b) - f(a)$.

122. [P] ★ Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(0) \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $z_1, \ldots, z_p$ les racines de module strictement inférieur à r de P comptées avec multiplicité. Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(|P(re^{it})|)\mathrm{d}t = \ln(|P(0)|) + \sum_{k=1}^{p} \ln\left(\frac{r}{|z_k|}\right)$.

123. [SR] Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On dit qu'un endomorphisme u de E est positif si, pour tout $f \in E$, $f \geqslant 0$ implique $u(f) \geqslant 0$. On pose, pour $i \in \mathbb{N}$, $e_i : x \in [0, 1] \mapsto x^i$.
a) Soit u un endomorphisme positif de E. Montrer que pour tout $f \in E$, $|u(f)| \leqslant u(|f|)$.
b) Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\forall x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + \dfrac{2\,\|f\|_\infty}{\delta^2}(x - y)^2$.
c) Soit $(T_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'endomorphismes positifs de E. On suppose que, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, la suite $(T_n(e_i))$ converge uniformément vers e_i sur $[0, 1]$. Montrer que, pour tout $f \in E$, la suite $(T_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
d) Démontrer le théorème de Weierstrass.

124. [PLSR] Soit $s > 1$. On dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est s-Gevrey s'il existe $R, C > 0$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant CR^k(k!)^s$.
a) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+in^s x}$. Justifier que f est bien définie et s-Gevrey.
b) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\, e^{-1/x}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2-Gevrey.

125. [SR] Pour $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on pose : $F_{\alpha,\beta}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^\alpha (1+t)^\beta \, \mathrm{d}t$.
a) Pour quels (α, β) l'intégrale $F_{\alpha,\beta}(x)$ converge-t-elle absolument ?
b) Pour un tel couple (α, β), étudier la régularité de $F_{\alpha,\beta}$.
c) On pose $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ et $g : x \in]0,1[\mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Exprimer f et g en fonction des $F_{\alpha,\beta}$.
d) Déterminer un développement asymptotique de $F_{\alpha,\beta}$ en $+\infty$.

126. [PLSR] Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma(1/2)$.
b) Montrer que, pour $x, y > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\Gamma((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant \Gamma(x)^{1-\lambda} \Gamma(y)^\lambda$.
c) En déduire :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1/2)^2 \leqslant \Gamma(n)\Gamma(n+1)$; $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1)^2 \leqslant \Gamma(n+1/2)\Gamma(n+3/2)$.
d) Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
e) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. Démontrer que la suite $(\Gamma_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement vers Γ.

127. [SR] Soient $x, y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $x'(t) = \sin(y(t))$ et $y'(t) = \cos(x(t))$.
a) Montrer que $f : t \mapsto \sin(x(t)) + \cos(y(t))$ est constante.
b) Soit $\phi : t \mapsto \frac{1}{2}\left(x(t) + y(t) - \frac{\pi}{2}\right)$. Montrer que les points $(\sin(\phi(t)), \phi'(t))$ sont situés sur un même cercle dont on déterminera le rayon.

128. [P] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, E l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $u \in E$, soit X_u l'unique application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $X_u(0) = x$ et $\forall t \in [0,1], X_u'(t) = AX_u(t) + Bu(t)$.
Montrer que $\{X_u(1) \; ; \; u \in E\} = \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice $(A|AB|\dots|AB^{n-1})$ de $\mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbb{R})$ est de rang n.

129. [SR] *a)* Que dire du spectre complexe d'une matrice symétrique réelle ? d'une matrice antisymétrique réelle ?
b) Soient $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ vérifiant : $A' = AB - BA$. On suppose que : $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B(t) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, A(t) = P(t)^{-1}A(0)P(t)$.
c) On se place dans le cas $n = 2$ avec : $A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ a_1 & b_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ et (S) : $a_1' = a_1(b_2 - b_1)$, $b_1' = 2a_1'$, $b_2' = -2a_1'$, $b_1(0) + b_2(0) = 0$ et $a_1(0), b_1(0) \geqslant 0$.
i) Calculer $AB - BA$.
ii) Trouver une solution particulière de (S) au voisinage de 0.

130. [L] ★★ Pour $k \geqslant 3$, on note $G_k : z \mapsto \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m + nz)^k}$.

a) Montrer que $G_k(z)$ est bien défini pour tout complexe z tel que $\mathrm{Im}\, z > 0$ et que la fonction $(x, y) \mapsto G_k(x + iy)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que $G_k(iy)$ admet une limite quand $y \to +\infty$.
c) Étudier l'existence des limites suivantes :
$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + in)^2}$ et $\lim_{M \to \infty} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + in)^2}$, où dans les deux cas la somme exclut $(n, m) = (0, 0)$. Ces limites sont-elles égales ?

131. [PLSR] ★★ Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3$.
Démontrer que $(x + y + z)^3 + 9xyz \geqslant 4(x + y + z)(xy + yz + zx)$.

132. [PLSR] Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ continue et décroissante par rapport à x.
Soient u et v appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ 1-périodiques par rapport à x.
a) On suppose que $\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial v}{\partial t} + F\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$.
Démontrer que $\sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}}(u - v) = \sup_{\{0\} \times \mathbb{R}}(u - v)$.
b) On suppose que $\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$. Montrer que u est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

133. [L] Soient $a > 0$, $n \geqslant 1$ et $x_1, \dots, x_n > 0$. Calculer $\inf_{\substack{y_1, \dots, y_n > 0 \\ y_1 + \dots + y_n \leqslant 1}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i^a}$.

134. [L] ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
On considère $n + 1$ vecteurs $v_1, \dots, v_{n+1}$ engendrant positivement $\mathbb{R}^n$, c'est à dire tels que $\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, \; (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \right\} = \mathbb{R}^n$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\langle v_i, x \rangle)$.
a) Montrer qu'il existe bien $n + 1$ vecteurs $v_1, \dots, v_{n+1}$ engendrant positivement $\mathbb{R}^n$.
b) Montrer que g atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$.
c) On suppose que f est intégrable en $-\infty$.
Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} f(\langle v_i, x \rangle) v_i = 0$.

135. [SR] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.
b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que vaut $d(A, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$?
c) On note $S = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $M_0 \in S$ telle que $d(A; S) = \|A - M_0\|$.

d) Rappeler le résultat sur les extrema sous contrainte. Que peut-on en déduire sur la matrice M_0 définie ci-dessus ?

Géométrie

136. [P] ***a)*** Montrer que, si $n \geqslant 2$, le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ préservant les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité est un groupe d'ordre $2n$ que l'on note $\mathcal{D}_{2n}$.
b) Soient p un nombre premier, G un groupe fini d'ordre $2p$. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou à $\mathcal{D}_{2p}$.

137. [P] ***a)*** On note G le groupe (pour la composition) des déplacements du plan, i.e. des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$. Montrer que, si H est un sous-groupe de G, H est discret si et seulement si l'orbite de tout $z \in \mathbb{C}$ sous l'action de H n'a pas de point d'accumulation.
b) Le résultat subsiste-t-il si on remplace G par le groupes des similitudes directes du plan, i.e. des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$?

Probabilités

138. [PLSR] Soit E un espace vectoriel normé et soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. On considère des variables aléatoires $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ i.i.d telles que $\mathbf{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_i = -1) = \dfrac{1}{2}$. Si $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$, on pose $N(v_1, \dots, v_n) = \mathbf{E}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k\right\|\right)$. Démontrer que, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [-1, 1]^n$, $N(\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n) \leqslant N(u_1, \dots, u_n)$.

139. [P] On considère une pièce équilibrée et ε_n la valeur du n-ième lancer que l'on considère à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Soient $X_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ et $\tau = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 0\}$. Déterminer $\mathbf{P}(\tau = n)$ ainsi qu'un équivalent de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.

140. [SR] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et Y la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$.
a) Montrer que $\mathbf{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = k)$. On pose $A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.
b) Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{rg}(A))$.
c) Calculer $\mathbf{P}(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ puis $\mathbf{P}(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}))$.
d) Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
e) On pose $B = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ X-Y & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P}(B \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.
f) Soient Z une variable aléatoire réelle et $C = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ Z & Y \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbf{P}(C \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.

g) Soit M une matrice aléatoire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la famille des coefficients est i.i.d., chaque coefficient suivant la loi uniforme sur $\{0, -1, 1\}$. Déterminer $P(M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

141. [PLSR] On note $E = [\![1, n]\!]$ et Δ la différence symétrique. Soit $p \in [0, 1]$ et X et Y deux variables aléatoires i.i.d de Ω dans $\mathcal{P}(E)$ telles que, pour tout $i \in E$, $\mathbf{P}(i \in X) = p$.
a) Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{card}(X \Delta Y))$.
b) On note $D(n)$ le cardinal maximal d'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ telle que, pour toutes parties A et B distinctes de $\mathcal{A}$, $|A \Delta B| \geqslant n/3$. Calculer $D(n)$.

142. [PLSR] ★ ★ Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Si N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $X_{N+n}(\omega) = X_{N(\omega)+n}(\omega)$.
a) Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n} = 1) = 1/2$?
b) Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N = 1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n} = 1) = 1/2$?

143. [PLSR] Soient $E = [\![1, n]\!]$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ telle que $\forall i \in E$, $\mathbf{P}(i \in X) = p$ et, pour $i \neq j \in E$, $(i \in X)$ et $(j \in X)$ sont indépendants.
Pour Y variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X, calculer $\mathbf{E}(|X \Delta Y|)$.

144. [P] ★ ★ Soient G un groupe fini de cardinal N, et A une partie de G aléatoire, où l'on prend chaque élément de G indépendamment avec probabilité $p > 0$.
On note $\mathrm{AA} = \{xy,\ (x, y) \in A^2\}$.
a) Montrer que $\mathbf{P}(1 \in \mathrm{AA})$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.
b) Montrer que $\mathbf{P}(\mathrm{AA} = G)$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.

145. [PLSR] ***a)*** Soit X une variable aléatoire réelle positive L^2.
Montrer que, pour $\lambda \in]0, 1[$, $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda \mathbf{E}(X)) \geqslant (1 - \lambda)^2 \dfrac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.
b) Soit (u_n) une suite de variables aléatoires positives indépendantes. Montrer que la série $\sum u_n$ converge presque sûrement si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}(\min(u_n, 1)) < +\infty$.
c) Soit $\alpha > 0$. On suppose que $\mathbf{P}(X_n \geqslant r) \underset{r \to +\infty}{\sim} r^{-\alpha}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ pour que $\sum x_n X_n$ converge presque sûrement.

146. [PLSR] Soient $\lambda > 0$ et N_λ une variable de Poisson de paramètre λ.
Pour $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bornée, on pose $Tf : n \in \mathbb{N} \mapsto \lambda f(n+1) - nf(n)$.
a) Montrer que $Tf(N_\lambda)$ est d'espérance finie, nulle.
b) Pour μ et ν deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$, et X et Y variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de lois respectivement données par μ et ν, on note
$d(\mu, \nu) = d(X, Y) = \dfrac{1}{2} \sup_{\|g\|_\infty \leqslant 1} \mathbf{E}(g(X) - g(Y))$.
Montrer l'existence de $C_\lambda > 0$ tel que, pour toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $d(N, N_\lambda) \leqslant C_\lambda \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} \mathbf{E}(Tf(N))$.

147. [SR] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1,\ldots,x_n\}$. L'entropie de X est définie par $\mathcal{H}(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_i \ln(p_i)$ avec $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.

a) Montrer que $\mathcal{H}(X) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si X est constante.

Soit $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite positive telle que $p_1 + \cdots + p_n = 1$ et (q_i) une autre suite positive de somme 1.

b) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i)$. Expliciter le cas d'égalité.

c) Montrer que $\mathcal{H}(X) \leqslant \ln(n)$ avec égalité si et seulement si X suit une loi uniforme.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\{x_1,\ldots,x_n\}^2$.
On note $p_{i,j} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = x_j)$ pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$.
L'entropie de (X,Y) est $\mathcal{H}(X,Y) = -\sum_{i,j=1}^{n} p_{i,j}\ln(p_{i,j})$.

d) Montrer que $\mathcal{H}(X,Y) \leqslant \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$.

148. [L] ★★ Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1,\ldots,v_n \in E$ tels que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\|v_i\| \leqslant 1$. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in [-1,1]$ et $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe des $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}$ tels que $v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v - w\| \leqslant \sqrt{n}$.

149. [P] Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d sur $\mathbb{Z}$ à support fini suivant la loi μ. On pose $\nu(k) = \dfrac{e^{\lambda k}\mu(k)}{\mathbf{E}(e^{\lambda X_1})}$ et on considère une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d suivant la loi ν. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. On prend $\lambda \geqslant 0, a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, n \geqslant 1$.

a) Montrer que $\mathbf{P}(na \leqslant T_n \leqslant (a+\varepsilon)n) \leqslant \dfrac{e^{\lambda n(a+\varepsilon)}}{(\mathbf{E}(e^{\lambda X}))^n}\mathbf{P}(S_n \geqslant na)$.

b) On suppose $X \sim -X$ et $\exists k > a$, $(a > 0)$, $\mu(k) > 0$.
Démontrer que $\dfrac{1}{n}\ln \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{s\geqslant 0}(-sa + \log \mathbf{E}(e^{sX}))$.

150. [L] Soient $\sigma > 0$, $n \geqslant 1$ un entier et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes telles que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $s > 0$, $\mathbf{E}(\exp(sX_i)) \leqslant \exp(\sigma^2 s^2)$. Montrer que $\mathbf{E}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i\right) \leqslant 2\sigma\sqrt{\ln n}$.

151. [L] Soient $n \geqslant 1$, $a > 0$, et $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires discrètes, indépendantes, d'espérance nulle, et à valeurs dans $[-a,a]$.

a) Montrer que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $s > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{sX_i}\right] \leqslant \exp\left(\dfrac{\mathbf{V}(X_i)}{a^2}(e^{as} - 1 - as)\right)$.

b) On note $\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}(X_i)$. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geqslant t\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2 + 2at/3}\right).$$

152. [L] Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

a) Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$ entier, $\Gamma(k) = (k-1)!$ et $\Gamma(k + 1/2) \leqslant k!$.

b) Soient $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans un ensemble discret, telle que, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbf{P}(|X| > t) \leqslant 2\exp\left(-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}\right)$. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\mathbf{E}\left(|X|^k\right) \leqslant (2\sigma^2)^{k/2}k\Gamma(k/2)$.

c) On suppose de plus que $\mathbf{E}(X) = 0$. Montrer que $\forall s > 0$, $\mathbf{E}[\exp(sX)] \leqslant \exp(4\sigma^2 s^2)$.

153. [L] Soient $n \geqslant 3$ un entier. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, une suite alternante pour σ est une suite strictement croissante $(i_k)_{1\leqslant m}$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$ telle que :
- soit pour tout $k \in [\![2,\ell-1]\!]$, $\sigma(i_k) > \max\{\sigma(i_{k-1}),\sigma(i_{k+1})\}$;
- soit pour tout $k \in [\![2,\ell-1]\!]$, $\sigma(i_k) < \max\{\sigma(i_{k-1}),\sigma(i_{k+1})\}$.

On note $\Delta(\sigma)$ la longueur maximale d'une suite alternante pour σ et on considère σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer $\mathbf{E}(\Delta(\sigma_n))$.

154. [L] Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles i.i.d. Pour $n \geqslant 1$, on note $M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$. Soit $\alpha > 0$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists (a_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}^*}$, $\forall x \geqslant 0$, $\mathbf{P}\left(\dfrac{M_n}{a_n} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-x^{-\alpha})$,

(ii) $\forall x > 0$, $\dfrac{\mathbf{P}(X_1 > xt)}{\mathbf{P}(X_1 > t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} x^{-\alpha}$ (et $\forall t > 0, \mathbf{P}(X_1 > t) > 0$).

155. [L] Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Montrer que, pour une indexation de sous-suite $(\varphi(n))_{n\geqslant 1}$ bien choisie,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{N\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant N}\left(\left|\frac{S_{\varphi(k)}}{H_{\varphi(k)}} - 1\right| > \frac{1}{k}\right)\right) = 0.$$

b) Montrer que l'événement « $\left(\dfrac{S_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge » est presque sûr.

156. [SR] ★★ *a)* Soient $n \in \mathbb{N}$, $(p_0,\ldots,p_n) \in \{-1,1\}^{n+1}$. Montrer que les racines de $\sum_{i=0}^{n} p_i X^i$ dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou égal à 1.

b) Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite réelle non identiquement nulle telle que $\sum a_k x^k$ ait pour rayon de convergence $R > 0$. Si $j \in \mathbb{N}$, on dit que la suite $(a_i)_{i\geqslant 0}$ change de signe en j s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_j a_{j+k} < 0$ et que $a_i = 0$ pour $i \in [\![j+1, j+k-1]\!]$. Montrer que l'ensemble des $x \in]0, R[$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$ est fini de cardinal majoré par le nombre de changements de signes de $(a_i)_{i\geqslant 0}$.

c) Soit $(A_k)_{k\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k$ et N_n le nombre de $x \in]0, 1[$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} A_i x^i = 0$. Montrer que $N_n \leqslant \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}} 1_{S_{2k+1}=0}$ et en déduire que $\mathbf{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{=} O(\sqrt{n})$.

157. [L] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) > 0$. Soit $N \in L^2$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On pose $X = X_N$.
a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que l'on déterminera, telle que $\mathbf{E}\left((f_0(X) - N)^2\right) = \min_{g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}} \mathbf{E}\left((g(X) - N)^2\right)$.
b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $R(g, n) = \mathbf{E}\left((g(X_n) - n)^2\right)$. Montrer que, si la suite $(R(f_0, n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à un certain R_0, alors $R_0 = \min_{g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}} \sup_{n\in\mathbb{N}} R(g, n)$ et f_0 est l'unique fonction vérifiant cette condition.

158. [L] Soient $a \in]0, 1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une interprétation probabiliste, calculer la borne supérieure, pour $(u_n)_{n\geqslant 1}$ parcourant l'ensemble des suites à valeurs dans $[0, 1]$, de

$$\sum_{1\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_m} \prod_{\ell=1}^{m} u_{n_\ell} \prod_{n_{\ell-1}<k<n_\ell} (1 - au_k).$$