

1172. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$. On suppose que $X \leq Y$, que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y = i) > 0, \forall 1 \leq k \leq i, \mathbf{P}(X = k | Y = i) = \frac{1}{i}$. Montrer que X et $Y - X + 1$ ont la même loi.

1173. Soient $n \in \mathbb{N}^*, X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $M = (X_i X_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

a) Déterminer la loi du rang de M , de la trace de M .

b) Quelle est la probabilité que M soit un projecteur?

1174. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n, \mathbf{P}(T > n) > 0$. Pour tout entier naturel n , on pose $\theta_n = \mathbf{P}(T = n | T \geq n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0, 1]$.

b) Exprimer θ_n en fonction de $\mathbf{P}(T \geq n)$. En déduire que $\sum \theta_n$ diverge.

1175. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1]$.

a) Soit U une variable aléatoire telle que $U \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la fonction génératrice de U .

b) Soient Y et Z deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $U = Y + Z$ et $U \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que Y et Z suivent des lois binomiales (pas nécessairement de mêmes paramètres).

1176. a) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$. Montrer que $\sum_{n=r-1}^{+\infty} \binom{n}{r-1} x^{n-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}$.

b) Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Soit X le rang du r -ème succès. Quelle est la loi de X ? Déterminer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(X(X+1))$ et $\mathbf{V}(X)$.

1177. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

a) Montrer que $\mathbf{P}(X \geq \lambda + 1) \leq \lambda$.

b) Montrer que $\mathbf{P}\left(X \leq \frac{\lambda}{3}\right) \leq \frac{9}{4\lambda}$.

1178. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs strictement positives indépendantes et suivant la même loi. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$.

1179. a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

b) Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$ est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on définit le *taux de défaillance* de X pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \mathbf{P}(X = n | X \geq n)$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$.

d) En déduire $\mathbf{P}(X = n)$ en fonction des x_k pour $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Quelle variable aléatoire admet un taux de défaillance constant à partir du rang 1?

f) Calculer le taux de défaillance de la variable Y introduite à la première question.

1180. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ tel que la série $\sum p_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_n . On pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $(S \geq k)$ à l'aide des événements $(S_n \geq k)$. En déduire que S est une variable aléatoire.

b) Montrer que S est presque-sûrement finie.

c) Montrer que S admet une espérance et la calculer.

1181. Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi géométrique de paramètre p .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

a) Montrer que $\mathbf{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 - (1 - q^k)^n$ où $q = 1 - p$.

b) Soit $f_n : t \mapsto 1 - (1 - q^t)^n$. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donner un équivalent de $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

c) En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(M_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Centrale - MP - MPI

Algèbre

1182. Un entier $n \geq 2$ est un faux premier (FP) s'il n'est pas premier et si, pour tout $a \in \mathbb{Z}$ premier à n , $a^{n-1} \equiv 1 [n]$.

a) Montrer que, si n est FP, n est impair.

b) On suppose que n s'écrit $\prod_{i=1}^r p_i$ où $r \geq 2$, les p_i sont des nombres premiers impairs distincts tels que, pour tout $i \in [1, r]$, $p_i - 1$ divise $n - 1$. Montrer que n est FP.

c) On admet que, pour tout p premier impair et tout $v \in \mathbb{N}^*$, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p^v \mathbb{Z})^\times$ est cyclique. En déduire la réciproque de la question précédente.

1183. Soient G un groupe admettant un nombre fini de générateurs, H un groupe fini, $f : G \rightarrow G$ un morphisme de groupes surjectif et $g : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que l'ensemble des morphismes de groupes de G vers H est fini.

b) Soit $a \in \text{Ker } f$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $b_n \in G$ tel que $f^n(b_n) = a$, puis calculer $g \circ f^m(b_n)$ pour tout $m > n$.

c) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$.

d) On pose $\Gamma = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det M = 1\}$. Montrer que Γ est un groupe, engendré par les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Montrer que tout endomorphisme surjectif de Γ est bijectif.

1184. On note $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Soit q un entier ≥ 2 fixé. On pose $H_q = \{z \in \mathbb{C} ; \exists n \in \mathbb{N}, z^{q^n} = 1\}$.

- Montrer que H_q est un sous-groupe dense de $\mathbb{U}$.
- Soit f un endomorphisme du groupe H_q , continu en 1. Montrer que f se prolonge de manière unique en un endomorphisme continu $\bar{f}$ du groupe $\mathbb{U}$.
- En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = z^m$ pour tout $z \in H_q$.

1185. a) Rappeler, pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, la définition de $P \circ Q$ et préciser le degré de ce polynôme.

- Montrer que seuls les polynômes de degré 1 possèdent un inverse pour la loi $\circ$.
- On pose $P = X^2 + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P .

1186. a) Soit I un idéal de $\mathbb{Q}[X]$ distinct de $\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme $\mu \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $I = \mu\mathbb{Q}[X]$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $I_\lambda = \{P \in \mathbb{Q}[X], P(\lambda) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible. Montrer que les racines complexes de P sont simples.
- Soient $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ racine de P avec multiplicité $m > \frac{\deg P}{2}$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{Q}$.

1187. a) Rappeler la définition d'une $\mathbb{K}$ -algèbre et d'un endomorphisme de $\mathbb{K}$ -algèbre.

- Soit φ un endomorphisme de la $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathbb{K}(X)$. Montrer que $\varphi(X) \neq 0$.
- Déterminer les endomorphismes de la $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathbb{K}(X)$.
- Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathbb{K}(X)$.

1188. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. Soit $E = \{[A, B], (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\}$.

- i)* Montrer que $\text{tr}(M) = 0$ pour toute matrice $M \in E$.
ii) Montrer que l'ensemble E est stable par similitude matricielle et par multiplication par un scalaire.
- Montrer qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
- Montrer que E est égal à l'ensemble des matrices de trace nulle.

1189. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$,

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g, V^G = \{x \in E ; \forall g \in G, g(x) = x\}.$$

- Montrer que, si $h \in G, g \in G \mapsto h \circ g \in G$ est une bijection de G sur lui-même, puis que p est un projecteur.
- Montrer que $\dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum \text{tr}(g)$.
- Montrer que tout sous-espace V de E stable par tous les éléments de G admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G . On pourra partir d'un projecteur q de E sur V et considérer $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}$.

1190. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Calculer, en fonction de $\text{tr } u$ et de $\text{tr}(u^2)$, les coefficients de X^{n-1} et de X^{n-2} du polynôme caractéristique de u .
- On suppose u de rang 2.
i) Montrer que l'on peut écrire $\chi_u = X^{n-2}P(X)$, où P est un polynôme de degré 2 dont on précisera les coefficients en fonction de $\text{tr } u$ et $\text{tr}(u^2)$.
ii) À quelle condition l'endomorphisme u est-il trigonalisable ?

1191. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on pose $S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Donner le lien entre l'inverse d'une matrice carrée inversible et sa comatrice.
- Montrer que $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ (ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles et dont l'inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$) est un groupe et que $S_a, T_a \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.
- Que vaut $T_b S_a T_b^{-1}$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$?
- Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique $X^2 - 1$. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $M = P S_0 P^{-1}$ ou $M = P S_1 P^{-1}$.

1192. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

- Cours : lemme des noyaux (avec démonstration).
- Soit u et v deux symétries telles que $u \circ v = -v \circ u$. Montrer que n est pair.
- On pose $n = 2p$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et v sont respectivement : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.
- Quels sont les entiers k pour lesquels il existe des symétries $s_1, \dots, s_k$ vérifiant : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, (i \neq j \implies s_i \circ s_j = -s_j \circ s_i)$?

1193. a) Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.

- Montrer que, pour $p, q \in \mathbb{Q}$ avec $p \neq q$, il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux dans leur ensemble tels que $p = a/c$ et $q = b/c$.
- Existe-t-il $x, y, z \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $x^2 + y^2 = 3z^2$?
- Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ symétrique dont $\sqrt{2}$ est valeur propre ?

1194. a) i) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, rappeler la définition des polynômes minimal π_A et caractéristique χ_A .

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur π_A pour que A soit trigonalisable.
- Donner la définition et la dimension du sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre λ .

b) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que, si χ_A est scindé, alors χ_{A^k} l'est aussi.
- Trouver un contre-exemple à la réciproque.

Ind. On pourra examiner le cas des rotations.

ii) On suppose χ_{A^2} scindé à racines dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose : $\forall X \in \mathbb{C}^n, \exists p \in \mathbb{N}^*, A^p X = X$. Montrer que A est diagonalisable.

1195. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \sum_{i=0}^n a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

a) Donner et démontrer la décomposition en éléments simples de P'/P .

En déduire que : $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A), \frac{\chi'_A(x)}{\chi_A(x)} = \text{tr}((xI_n - A)^{-1})$.

b) Pour tous $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{C}$, on pose $B_j = \sum_{i=0}^j a_i A^{j-i}$ puis $Q(x) = \sum_{j=1}^n x^{n-j} B_{j-1}$.

Montrer que $Q(x)(xI_n - A) = \chi_A(x)I_n$ et $\text{tr}(Q(x)) = \chi'_A(x)$.

c) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $S_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k$. Montrer que : $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\sum_{i=0}^j a_i S_{j-i} = (n-j)a_j.$$

1196. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont toutes les racines complexes ont un module majoré par 1.

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in S_n$.

On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de P éventuellement confondues.

a) i) Rappeler les relations coefficients-racines pour un polynôme complexe.

ii) Montrer que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |a_k| \leq \binom{n}{k}$.

iii) Conclure que S_n est fini.

b) Montrer que P est le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

c) i) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \exists Q_p \in S_n, \forall 1 \leq i \leq n, Q_p(z_i^p) = 0$.

ii) Conclure que les racines non nulles de P sont de module 1.

1197. * Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier premier impair. On note $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers.

a) i) Rappeler la définition de la comatrice.

ii) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut ± 1 .

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$ et que $A = \frac{1}{p}(M - I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M = I_n$.

c) Déterminer un majorant des cardinaux des sous-groupes finis de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$.

1198. a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 .

b) Pour $a \in \mathbb{Z}$, soient $T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, calculer $T_b S_a T_b^{-1}$.

c) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $M^2 = I_2$. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $PMP^{-1} \in \{S_0, S_1\}$.

d) Existe-t-il $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $S_1 = QS_0Q^{-1}$?

1199. a) Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton et le prouver dans le cas diagonalisable. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

b) i) Montrer que $\chi_A(B)$ et $\chi_B(A)$ sont inversibles.

ii) Montrer que, pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AD - DB = C$.

c) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

i) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont semblables.

ii) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les matrices A et B pour que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1200. Soient $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \in E$, $\Phi_A : M \in E \mapsto AM$ et $\Psi_A : M \in E \mapsto MA$.

a) Déterminer la trace et le déterminant de Φ_A .

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $P(\Phi_A)$ et $P(\Psi_A)$.

c) On suppose A diagonalisable. Que dire de Φ_A et Ψ_A ?

1201. a) Rappeler les définitions de morphisme de groupes et d'ordre d'un élément.

On appelle représentation de degré n un morphisme de groupes de S_3 dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) Soit f une représentation de S_3 . Soit σ un élément de S_3 . Montrer que $f(\sigma)$ est diagonalisable. Montrer que l'image de f est entièrement déterminée par l'image de la transposition $(1\ 2)$ et du cycle $(1\ 2\ 3)$.

c) Donner les représentations de degré 1.

d) Donner un exemple de représentation de degré 3.

1202. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs et telle que la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1.

a) Montrer que 1 est valeur propre de M puis que toute valeur propre complexe de M vérifie $|\lambda| \leq 1$.

b) On suppose que tous les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M de module 1.

c) Montrer que $\text{Ker}(M - I_n)^2 = \text{Ker}(M - I_n)$.

1203. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désigne par μ_A son polynôme minimal.

a) Montrer que tout idéal de $\mathbb{C}[X]$ est de la forme $PC[X]$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) Pour $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, on note $\mu_{A,x}$ le générateur unitaire de l'idéal annulateur ponctuel $\{P \in \mathbb{C}[X], P(A)x = 0\}$. Montrer qu'il existe $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mu_{A,x} = \mu_A$.

c) Soit A une matrice diagonale par blocs dont la diagonale vaut (A_1, A_2) où A_1 et A_2 sont des matrices de Frobenius (compagnon) et $\chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2} = 1$. Montrer que A est semblable à une matrice de Frobenius.

1204. a) Définir l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$.

b) Soit $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = \exp(A)$.

c) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = \exp(P(B))$.

d) Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $M = I_n + A$ avec A nilpotente. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

1205. ★ a) Justifier la définition de l'exponentielle de matrice.

b) Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$.

c) Considérons une matrice A diagonalisable. Calculer $\exp(A)$ en utilisant des matrices de passage. Montrer que $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

d) Dans cette question, on admet l'existence et l'unicité de la décomposition de Jordan-Dunford. En notant $D + N$ la décomposition de Jordan-Dunford de A , montrer que la décomposition de $\exp(A)$ est $\exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$.

1206. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

a) Montrer que, pour tout hyperplan H de E , il existe $a \in E$ tel que $H = \text{Vect}(a)^\perp$.

b) Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que $\langle x_i, x_j \rangle = \alpha$ pour tous $i \neq j$, où α est un réel strictement négatif fixé. Déterminer α .

c) Montrer l'existence d'une telle famille.

1207. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et deux familles $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ d'éléments de E . On note respectivement A et B les matrices représentatives des familles précédentes dans la base $\mathcal{B}$.

a) i) Exprimer les coordonnées et la norme d'un vecteur x de E à l'aide des éléments de $\mathcal{B}$.

ii) Exprimer les coefficients de A , B et $A^T B$ à l'aide de produits scalaires.

iii) On suppose ici que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E . Dédurre de la question précédente que l'on peut choisir $y_1, \dots, y_n$ de telle sorte que $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{i,j}$. Montrer que, ainsi choisis, $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de E .

b) On suppose ici que :

(i) $\forall i \in [1, n], \|x_i\| = 1$ et $\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle < 0$,

(ii) $\exists v \in E, \forall i \in [1, n], \langle x_i, v \rangle > 0$.

Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E .

1208. a) Rappeler le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

b) i) Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $M = OT$.

ii) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. Montrer que $|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\|$.

c) On suppose que le résultat précédent est vérifié pour des matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec le produit scalaire hermitien $((x_1, \dots, x_n), (w_1, \dots, w_n)) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k \overline{w_k}$.

Soit $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$. Trouver le maximum et les points réalisant le maximum de $f : (z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{D}}^n \mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|$.

1209. On note E l'ensemble des fonctions réelles, continues et de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

a) i) Définir la notion de fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

ii) Montrer que, pour $f, g \in E$, fg est intégrable et en déduire que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

b) Pour $(f, g) \in E^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} fg$.

i) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

ii) Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' \in E$. Montrer que $f' \in E$.

iii) Exprimer $\langle f', f' \rangle + \langle f, f'' \rangle, \langle f, f' \rangle, \langle f', f'' \rangle$ en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

c) On pose $A = \begin{pmatrix} \langle f, f \rangle & \langle f', f \rangle & \langle f'', f \rangle \\ \langle f, f' \rangle & \langle f', f' \rangle & \langle f'', f' \rangle \\ \langle f, f'' \rangle & \langle f', f'' \rangle & \langle f'', f'' \rangle \end{pmatrix}$.

Montrer que $\det(A) \geq 0$ et étudier le cas d'égalité.

1210. Soit E un espace vectoriel euclidien.

a) Montrer que toutes les valeurs propres d'une isométrie vectorielle de E sont de module 1.

b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont toutes les valeurs propres sont de module 1 et vérifiant : $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(u - \text{Id}_E)$ sont en somme directe.

1211. Pour tout $t \in]-1, 1[$, on note $\omega(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\omega(t) dt$.

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) On pose $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$. Montrer que ϕ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer ses valeurs propres.

d) Montrer qu'il existe une base de vecteurs propres de degrés échelonnés.

1212. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 2$ si $i = j$, $a_{i,j} = -1$ si $|i - j| = 1$ ou $|i - j| = n - 1$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

a) Montrer que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux.

b) Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.

c) Montrer que le spectre de A est inclus dans $[0, 4]$.

d) Lister les valeurs propres de A .

1213. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), I_n + M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

a) Montrer que $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.

b) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \Omega$.

On pose $f : M \in \Omega \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$.

c) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \Omega$, $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $f(f(M)) = M$.

d) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale J à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$ telle que $\det(M + J) \neq 0$.

Ind. On pourra faire une récurrence et comparer deux déterminants.

e) Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale J à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = Jf(A)$.

1214. Soient A une matrice réelle antisymétrique de taille n et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

a) i) Énoncer le théorème du rang.

i) On suppose A inversible. Montrer que n est pair.

ii) On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Que dire de f^* ?

b) i) Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ où A'' est inversible.

ii) En déduire que le rang de A est pair.

c) On suppose n pair et l'on prend une autre matrice antisymétrique B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces propres de AB sont de dimension supérieure à 2.

Ind. On pourra commencer par le sous-espace propre associé à la valeur propre nulle.

1215. a) Rappeler la définition d'une matrice symétrique définie positive. Caractérisation à l'aide du spectre?

b) Montrer que l'exponentielle définit une bijection continue de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) Montrer que sa réciproque est continue.

1216. a) Rappeler la définition d'une matrice définie positive. Caractérisation à l'aide du spectre?

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

i) Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.

ii) Montrer son unicité. On la note $\sqrt{A}$.

Ind. Considérer les sous-espaces propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A .

c) i) Soient A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $XA^{-1}X = B$ admet une unique solution dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est : $A \# B = \sqrt{A} \sqrt{\sqrt{A^{-1}} B \sqrt{A^{-1}}} \sqrt{A}$ (moyenne géométrique de A et B).

ii) Montrer les relations : $A \# A = A$, $A \# B = B \# A$, $(A \# B)^{-1} = A^{-1} \# B^{-1}$.

1217. Soient E et F des espaces vectoriels euclidiens de dimensions respectives n et m .

a) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer qu'il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in F$, $\langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E$.

b) Montrer que u^*u est autoadjoint positif.

c) Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang r . Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$, $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathbb{R}^{++}$ tels que $(PMQ)_{i,i} = \sigma_i$ si $i \leq r$, les autres coefficients étant nuls.

1218. Soit E un espace euclidien.

a) Soit $s \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $s = r^2$.

b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in \text{Ker}(u)^\perp$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

i) Montrer que $\forall x, y \in \text{Ker}(u)^\perp$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

ii) Montrer que u^*u est le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(u)^\perp$.

1219. a) Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{sp}(M) \subset \mathbb{R}^+$.

b) Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^+)$ c'est-à-dire symétrique à coefficients positifs. Est-ce que toutes les valeurs propres de M peuvent être strictement négatives? Peut-on trouver M avec une unique valeur propre strictement positive?

c) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $X_1, \dots, X_n$ une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $B(\alpha) = \begin{pmatrix} A & \alpha X_n \\ \alpha X_n^T & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont valeurs propres de $B(\alpha)$ et exprimer les deux restantes en fonction de λ_n et α .

1220. Soient E un espace euclidien et u, v dans $\mathcal{S}(E)$ avec $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

a) Caractériser spectralement le fait que $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

b) Montrer qu'il existe un unique $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u + u \circ w = v$ puis que $w^* = w$.

c) A-t-on l'équivalence $v \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow w \in \mathcal{S}^{++}(E)$?

1221. a) Soit $M \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Montrer que le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\langle Mx, x \rangle \geq 0$.

b) Soient $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telles que $\sum_{i=1}^n M_i^T M_i = I_d$. On pose, pour $X \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$,

$\mathcal{L}(X) = \sum_{i=1}^n M_i^T X M_i$. Montrer que $\mathcal{L}$ préserve le caractère symétrique positif.

c) Donner $p \in \mathbb{N}$, $\Pi : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ morphisme d'algèbre vérifiant $\Pi(X^T) = \Pi(X)^T$ et $V \in \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{R})$ vérifiant $V^T V = I_d$ tels que $\forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(X) = V^T \Pi(X) V$. Pour $M, N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on note $M \geq N$ si et seulement si $M - N$ est symétrique positive.

d) Montrer $\mathcal{L}(X^T X) \geq \mathcal{L}(X^T) \mathcal{L}(X)$.

e) On suppose qu'il existe $\mathcal{K}$ du même type que $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{L} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \mathcal{L} = \mathcal{I}$. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(X^T X) = \mathcal{L}(X^T) \mathcal{L}(X)$.

Analyse

1222. a) Formuler et démontrer le cas d'égalité du théorème des accroissements finis. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines réelles des polynômes de $\mathcal{E}$.

b) i) Montrer que $A \setminus \{0\}$ est stable par $x \mapsto -x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

ii) Montrer que $A \cap]2, +\infty[= \emptyset$.

iii) Montrer que $A \subset]-2, -1/2[\cup \{0\} \cup]1/2, 2[$.

c) Montrer que $\bar{A} = [-2, -1/2] \cup \{0\} \cup [1/2, 2]$.

1223. Soient E un espace normé et $T : E \rightarrow E$ une application affine (au sens où $T - T(0)$ est linéaire).

a) Montrer que, pour tous $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$, $T(tx + (1-t)y) = tT(x) + (1-t)T(y)$.

b) Soit C une partie de E compacte, convexe, non vide et telle que $T(C) \subset C$. Montrer que T admet un point fixe dans C .

1224. Soit $A = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $\|P\|_A = \max_{0 \leq k \leq n} |P(a_k)|$. On pose $d_{n,A} = \inf_{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \|X^n - P\|_A$.

a) Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(b_0, \dots, b_n)$ de réels tel que $X^n - P = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{j \neq k} (X - a_j)$. Montrer que $\sum_{k=0}^n b_k = 1$.

c) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\prod_{j \neq k} |a_k - a_j| \geq \frac{n!}{\binom{n}{k}}$.

d) Montrer que $\|X^n - P\|_A \geq \frac{n!}{2^n}$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

e) Calculer $d_{n,A}$.

1225. Soient $a < b$ des réels fixés. On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On fixe enfin un entier $n \geq 0$ et $f \in E$, et on pose $m = d(f, \mathbb{R}_n[X])$.

a) On pose $C = \{g \in \mathbb{R}_n[X] ; \|f - g\|_\infty \leq m + 1\}$. Montrer que C est compact et non vide. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $m = \|f - p\|_\infty$.

b) Montrer que l'équation $|f(x) - p(x)| = m$ admet au moins $n + 2$ solutions.

c) En déduire que p est unique.

1226. Notons $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme ∞ . Pour

$f \in \mathcal{C}$, notons $Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$ si $x \in [0, 1[$ et $Af(1) = 0$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ soit convergente. La démontrer.

b) Justifier que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, Af est correctement définie.

c) Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, $Af \in \mathcal{C}$.

d) Montrer que A est un endomorphisme continu de $\mathcal{C}$; calculer sa norme subordonnée.

e) Étudier la dérivabilité de Af pour une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1227. a) Soient E et E' deux espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E, E')$.

Montrer que u est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0.

On considère désormais l'espace $E = \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

Pour φ forme linéaire sur E , on pose $N(\varphi) = \sup\{|\varphi(f)|, f \in S_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1)\} \in [0, +\infty]$.

b) Calculer $N(\varphi)$ avec $\varphi : f \mapsto \int_{-1}^0 f - \int_0^1 f$.

1228. Soit (λ_n) une suite de réels positifs strictement croissante telle que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$ et la série de terme général $\frac{1}{\lambda_n}$ diverge. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $Q_0 : x \mapsto x^m$ et, pour tout n ,

$$Q_{n+1} : x \mapsto (\lambda_{n+1} - m) x^{\lambda_{n+1}} \int_x^1 Q_n(t) t^{-(1+\lambda_{n+1})} dt.$$

a) Rappeler le théorème de Weierstrass.

b) Montrer que la suite (Q_n) est bornée sur $[0, 1]$ et que, pour tout n , $\|Q_n\|_\infty \leq \prod_{j=1}^n \left|1 - \frac{m}{\lambda_j}\right|$.

En déduire que (Q_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

c) Montrer que, toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions appartenant à $\text{Vect}\{x \mapsto x^{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\}$.

1229. a) Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

Soit C une partie convexe compacte non vide d'un espace euclidien E .

b) Soit $x \in E$.

i) Montrer l'existence et unicité d'un vecteur $p(x) \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - p(x)\|$.

ii) Soit $y \in C$. Montrer que $y = p(x)$ si et seulement si $\forall c \in C, \langle x - p(x), c - p(x) \rangle \leq 0$.

c) Montrer que l'application p définie dans ce qui précède est continue.

1230. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \{|\lambda| ; \lambda \in \text{Sp}(A)\}$. On munit $\mathbb{C}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|$ d'opérateur associé.

a) L'application $A \mapsto \rho(A)$ est-elle une norme?

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$.

c) Montrer que, pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N(A^k)^{1/k} \rightarrow \rho(A)$.

1231. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on définit $T(f)$ pour tout $f \in E$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-t|} f(t) dt$$

a) i) Rappeler le théorème de Heine.

ii) Montrer que f est uniformément continue.

b) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ puis que T est continu.

c) Déterminer sa norme d'opérateur.

1232. Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on pose $\|M\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|$.

a) i) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme et que $\forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

ii) Définir $\exp(A)$ et montrer que $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

b) On pose $K = \max(\|A\|, \|B\|)$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \|A^n - B^n\| \leq nK^{n-1} \|A - B\|$.

c) Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{A/n} e^{B/n})^n$.

1233. a) i) Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.

ii) On note X une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de X convergent vers la borne inférieure de X . Réciproquement, prouver que si une suite de X converge vers un minorant m de X , alors m est la borne inférieure de X .

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_\alpha = \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \det(M) \geq \alpha\}$ pour $\alpha > 0$. On souhaite prouver que, si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\inf_{M \in S_\alpha} \operatorname{tr}(AM) = n(\alpha \det(A))^{1/n}$. Prouver ce résultat lorsque

$A = I_n$ puis lorsque $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

c) Est-ce toujours le cas lorsque $\alpha = 0$?

1234. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[-1, 1]$.

a) Montrer la continuité du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que le déterminant admet un maximum α sur $\mathcal{A}$.

c) Montrer que le maximum est atteint en une matrice inversible A de déterminant strictement positif et à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

d) Montrer que $\alpha \leq n^{n/2}$ avec égalité si et seulement si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales pour le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$.

1235. a) Montrer que les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont ses convexes.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Γ_n l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\{0, 1\}$. Justifier l'existence de $a_n = \max_{M \in \Gamma_n} \det(M)$ et étudier son comportement quand $n \rightarrow +\infty$.

c) On note C_n l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $[0, 1]$. Montrer que $\det(C_n) = [-a_n, a_n]$.

1236. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(\omega_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite d -périodique.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $S_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda + \omega_k}{k}$.

a) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

La réciproque est-elle vraie?

b) Montrer qu'il existe au plus un complexe λ tel que la suite $(S_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

c) i) Montrer l'existence de $\Omega, \alpha \in \mathbb{C}$ tels que $S_{(m+1)d}(0) - S_{md}(0) = \frac{\Omega}{md} + \frac{\alpha}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$ quand $m \rightarrow +\infty$.

ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que la suite $(S_n(\lambda))$ converge.

1237. Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n$ où $\sum |v_n|$ converge.

a) Étudier la convergence de $a_{n+1} - a_n$ où $a_n = \ln(n^\alpha u_n)$. En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}$.

a) On prend $u_n = n^{-n} n! e^n$. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim K\sqrt{n}$.

b) On suppose maintenant que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge, et que si $\alpha < 1$ alors elle diverge.

1238. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $d_n = \operatorname{card}\{p \in \llbracket 1, n \rrbracket ; p \mid n\}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $f(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} d_k$.

a) Cours : comparaison série-intégrale. L'utiliser pour montrer l'équivalent $H_n \sim \ln n$.

b) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

c) Déterminer le deuxième terme du développement asymptotique de f .

1239. a) i) Énoncer le théorème de Rolle.

ii) Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Montrer que le théorème reste vrai pour $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et admettant en a et b une même limite finie.

b) On définit la fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$.

i) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} f(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

ii) Quel est le degré de P_n ?

iii) Que dire du nombre de zéros de $f^{(n)}$?

1240. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues de A dans $\mathbb{R}$.

a) Pour $n = 1$ et A un segment, montrer que $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ si et seulement si $f \in \mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$ est stable par composition. Est-il stable par produit?

c) Soit $T \in \mathbb{R}^{++}$ et f une fonction continue et T -périodique. Montrer que $f \in \mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$.

1241. Soient E l'espace vectoriel des suites réelles et Δ l'endomorphisme de E défini par : pour $u \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $[\Delta(u)]_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Démontrer le théorème des accroissements finis.

b) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in]n, n+p[$ tel que $[\Delta^p u]_n = f^{(p)}(x)$.

1242. a) Soient I un intervalle non vide et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $a \in I$, l'application $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable, de dérivée f .

Pour $h > 0$, soit $W_h = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x+h}^{x+2h} f(t) dt = 2 \int_x^{x+h} f(t) dt \right\}$.

b) Montrer que, pour tout $h > 0$, W_h est un espace vectoriel de dimension infinie.

c) Existe-t-il des fonctions non bornées appartenant à W_h ?

1243. On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit la suite (f_n) de fonctions de E par $f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t) dt$.

a) Énoncer le théorème de dérivation terme à terme.

b) On se place dans le cas où f est constante. Montrer que la suite (f_n) et la série $\sum f_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$. Y a-t-il convergence uniforme?

c) On revient au cas général.

i) Montrer la convergence simple de la suite (f_n) et de la série $\sum f_n$.

ii) Montrer que l'application $T : f \in E \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est un automorphisme de l'espace vectoriel E .

1244. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n(x) = \frac{1}{(1+x) \cdots (1+x^n)}$.

a) Étudier la convergence simple de (g_n) sur $\mathbb{R}^+$.

b) Étudier la convergence uniforme de (g_n) sur $[1, +\infty[$ et sur tout segment.

1245. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité, $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \lambda(d)$.

a) Montrer que, si m et n sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$ et $\Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $\Lambda(n)$.

c) Montrer que, si $|z| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}$.

1246. a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, montrer que la suite $\left(\sum_{k=-n}^n \frac{1}{x-k} \right)_{n \geq 1}$ converge. On note $f(x)$

sa limite.

b) Montrer que f est continue et 1-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

c) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, exprimer $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ en fonction de $f(x)$.

d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x) = \pi \cotan(\pi x)$.

1247. a) Retrouver le développement en série entière de la fonction arctan et montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Montrer que $\left| \pi - S_n + (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \right| \leq \frac{1}{n^3}$.

1248. a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner $R > 0$ tel que : $\forall x \in]-R, R[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. Que

vaut $\binom{\alpha}{n}$?

b) Soit $\beta > 0$. Montrer que $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\beta}{k}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

c) Soit $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{R}^2$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{\alpha + \alpha'}{n} = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \binom{\alpha}{p} \binom{\alpha'}{q}$.

d) Soit $0 < x < y$. Montrer que $(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n}$.

e) Montrer que $2^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n}$ pour tout $\alpha > -1$.

1249. a) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière qui converge sur $]-\alpha, \alpha[$, avec $\alpha > 0$. Montrer que sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$.

b) Est-ce que toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert contenant 0 est développable en série entière au voisinage de 0 ?

c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert contenant 0. Montrer qu'elle est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si :

$$\exists (\alpha, M, A) \in (\mathbb{R}^{++})^3, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha, \alpha], |f^{(n)}(x)| \leq M A^n n!.$$

1250. Soient $R > 0$ et $\mathcal{A}_R$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ développables en série entière de rayon $\geq R$.

a) Montrer que $\mathcal{A}_R$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre pour des lois que l'on précisera.

b) Déterminer les morphismes d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.

c) Soit Φ un morphisme d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que δ est une Φ -dérivation si δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et si : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \delta(PQ) = \Phi(P)\delta(Q) + \Phi(Q)\delta(P)$. Déterminer les Φ -dérivations.

d) Déterminer les morphismes d'algèbres Φ de $\mathcal{A}_R$ dans $\mathbb{R}$, puis les Φ -dérivations de $\mathcal{A}_R$.

1251. a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, a, \delta > 0$ vérifiant $|f^{(n)}(x)| \leq C a^n n!$ pour tous $n \geq 0$ et $x \in [-\delta, \delta]$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

c) Étudier la réciproque.

1252. Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0, telle que $f(0) \neq 0$. Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

1253. Soit $f : t \in [0, \pi/2[\mapsto -\ln(\cos(t))$.

a) Montrer que $f(t) \geq t^2/2$ pour tout $t \in [0, \pi/2[$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

i) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} x^\alpha \cos^n \left(\frac{\pi x}{2\sqrt{n}} \right) dx$.

ii) Donner un équivalent de $I_n = \int_0^1 x^\alpha \cos^n \left(\frac{\pi x}{2} \right) dx$.

1254. a) Rappeler le théorème de convergence dominée.

b) Montrer que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

d) On pose $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

e) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

f) Montrer que $\frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(x+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}$, où γ est la constante d'Euler.

1255. a) Rappeler la formule de Stirling.

b) Donner un équivalent de $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n} dx$ quand $n \rightarrow +\infty$.

c) On pose $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$.

i) Ensemble de définition ?

ii) Développer F en série entière au voisinage de 0.

iii) Trouver un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 1.

1256. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique. Soient $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : X' = -AX + B$. On suppose que l'ensemble $S = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; AU = B\}$ est non vide.

a) Montrer que les valeurs propres de A sont positives.

b) Quelles sont les solutions constantes de (E) ?

c) Soient X et Y deux solutions de (E) . Montrer que $t \mapsto \|X(t) - Y(t)\|$ est décroissante. En déduire que toute solution est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

d) Soit X une solution de (E) . Montrer que $X(t)$ admet une limite X_∞ quand t tend vers $+\infty$.

e) Montrer que $\|X(0) - X_\infty\| = \inf_{U \in S} \|X(0) - U\|$.

1257. a) Montrer que toute série numérique absolument convergente est convergente.

On définit $s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ pour tout complexe z et $\phi(z) = |s(z)|$.

b) Est-ce que s est bornée sur $\mathbb{C}$? Le cas échéant, donner un majorant de ϕ .

c) Mêmes questions sur $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$.

d) Montrer que ϕ admet deux extrema sur D et trouver les points où ils sont atteints.

1258. Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$.

a) Montrer que f est de classe C^1 , et calculer sa différentielle.

b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\dim \text{Ker } df(A)$ en fonction du rang de A .

1259. Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$.

a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, calculer $\nabla f(x)$.

b) Montrer que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ et montrer que $f(\omega) = \min\{f(x) ; x \in \mathbb{R}^n\}$.

c) Soit $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(x_j)_{j \geq 0}$ une suite telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x_{j+1} = x_j - \gamma \nabla f(x_j)$. Montrer que, pour $j \in \mathbb{N}$, $x_{j+1} - \omega = (I_n - \gamma A)(x_j - \omega)$.

d) Montrer que, pour γ bien choisi, $(x_j)_{j \geq 0}$ converge vers ω indépendamment du choix de x_0 . Comment choisir γ pour que la vitesse de convergence soit la meilleure possible ?

1260. a) i) Soit G un ensemble non vide. Rappeler les conditions sur la loi $*$ pour que $(G, *)$ soit un groupe.

ii) Rappeler la définition de la différentielle d'une application en un point. Faire le lien avec les dérivées partielles dans le cas C^1 .

b) Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$, d'élément neutre noté e . On suppose que $f : (x, y) \mapsto x * y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_2 f(x * y, e) = \partial_2 f(x, y) \times \partial_2 f(y, e)$. En déduire que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\partial_2 f(y, e) > 0$.

c) Montrer qu'il existe un C^1 -difféomorphisme φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Géométrie

1261. a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On suppose que f admet un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$. Rappeler la valeur de $\nabla f(a)$ (avec démonstration).

b) Soit $\theta \in [0, \pi]$. Soient A et B du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ tels que $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} = \theta$. Exprimer l'aire de la lunule constituée des points extérieurs au disque unité et intérieurs au disque de diamètre $[AB]$.

c) Soient A, B et C trois points du cercle unité tels que les trois angles $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})}$, $\widehat{(\vec{OB}, \vec{OC})}$ et $\widehat{(\vec{OC}, \vec{OA})}$ soient dans $[0, \pi]$. Maximiser la somme des aires des trois lunules qu'ils définissent.

Probabilités

1262. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

a) Déterminer la loi de $\min(X, Y)$.

b) Montrer que $\min(X, Y)$ et $X - Y$ sont indépendantes.

1263. a) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

b) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et $Q = \varepsilon_1 X + \varepsilon_2$. Déterminer la probabilité que $Q(A)$ soit inversible.

c) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(u)$ soit diagonalisable et $Q'(u)$ inversible. Montrer que u est diagonalisable.

1264. La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est $F_X : t \mapsto \mathbf{P}(X \leq t)$.

a) Montrer que, pour une variable aléatoire X , F_X est croissante de limite 1 en $+\infty$.

Soient E un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans E et X une variable à valeurs dans E . On suppose que, pour tout $x \in E$, $\mathbf{P}(X_n = x) \rightarrow \mathbf{P}(X = x)$.

b) Montrer que $\sum_{x \in E} |\mathbf{P}(X_n = x) - \mathbf{P}(X = x)| \rightarrow 0$.

Ind. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérer une partie finie $I \subset E$ telle que $\mathbf{P}(X \in I) > 1 - \varepsilon$.

c) Montrer que (F_{X_n}) converge uniformément vers F_X .

1265. a) Soient p un réel > 1 et $q = \frac{p}{p-1}$.

i) Montrer que $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$.

ii) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. On suppose que $X \in L^p$ et $Y \in L^q$. Montrer que $XY \in L^1$ et que $\mathbf{E}(|XY|) \leq \mathbf{E}(X^p)^{1/p} \mathbf{E}(Y^q)^{1/q}$.

b) Soient maintenant deux réels tels que $1 \leq p < q$. Montrer que si $X \in L^q$, alors $X \in L^p$ et que $\mathbf{E}(X^p)^{1/p} \leq \mathbf{E}(X^q)^{1/q}$.

c) Soient $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables de Rademacher indépendantes et p un réel ≥ 1 . Montrer que, si $X \in \text{Vect}(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$, alors $\mathbf{E}(X^p)^{1/p} \leq C \sqrt{p} \mathbf{E}(X^2)^{1/2}$, où C est une constante absolue.

1266. a) En utilisant une comparaison série-intégrale, dont on rappellera le principe, donner

un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

b) On dit que $n \in \mathbb{N}^*$ est sans facteur carré s'il n'existe pas de $k \geq 2$ tel que k^2 divise n . Montrer que pour tout $i \geq 1$, i s'écrit d'une unique manière sous la forme $i = ma^2$, où $a \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ est sans facteur carré.

c) Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[[1, n]]$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & X \end{pmatrix}$. Soit p_n la probabilité que M ne soit pas inversible. Montrer que

$$p_n = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

1267. Une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires entières est dite transiente si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n \in A) < +\infty$.

a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \sim \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{i}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$? La suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ est-elle transiente?

b) Soient $p \in]0, 1[$ et $(R_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = 1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est-elle transiente?

1268. Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On suppose que $\mu = \frac{\ln 2}{|\ln q|}$ n'est pas un entier.

a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . Montrer qu'il existe un unique entier m tel que $\mathbf{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$.

a) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p . On pose $Y_n = 1_{X_n \geq m}$ et $S_n = Y_1 + \dots + Y_{2n-1}$ pour $n \geq 1$. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \geq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.