Autres Écoles – MP - MPI

Algèbre

1400. [IMT] Quel est le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = f$?

1401. [IMT] Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1402. [CCINP] Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels deux à deux distincts.
a) Soit $b_1, \ldots, b_{n+1}$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(a_k) = b_k$.
b) Expliciter L_k l'unique polynôme de la question précédente lorsque $b_i = 1$ si $i = k$, 0 sinon.

c) Montrer que, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $X^p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k^p L_k$.

1403. [Navale] Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec les matrices de rang 1.

1404. [IMT] On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \sin(i+j)$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et en déduire $\det(A)$. *Ind.* On pourra considérer $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$.

1405. [IMT] Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telles que $\mathrm{rg}(f \circ g) = 2$.
Calculer $\mathrm{rg}\, f$ et $\mathrm{rg}\, g$.

1406. [IMT] ***a)*** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-m \\ m-2 & 0 & 1 \\ 2m & m-2 & m-2 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de M en fonction de m.

b) Résoudre le système $\begin{cases} 2y + (2-m)z = 2-m \\ (m-2)x + z = 1 \\ 2mx + (m-2)y + (m-2)z = m-2 \end{cases}$.

1407. [CCINP] Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
a) On suppose u nilpotent. Prouver que $u^n = 0$.
b) On suppose que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
c) Résoudre l'équation $X^2 = A$.

1408. [IMT] Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det\left(I_n + XX^T\right) = 1 + X^T X$.

1409. [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Expliciter P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
b) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$ et $\Delta = P^{-1}XP$.
i) Calculer $\Delta^2 + \Delta$.

ii) Montrer que D et Δ commutent. En déduire que Δ est diagonale.
c) Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 + X = A$.

1410. [CCINP] Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur.
a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ à l'aide du lemme des noyaux.
b) i) Montrer l'équivalence suivante :
(i) $u \circ p = p \circ u$, (ii) $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.
ii) Quel lien existe-t-il entre $\mathrm{rg}(p)$ et $\mathrm{Tr}(p)$?
c) Tout endomorphisme f vérifiant $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est-il nécessairement un projecteur ?

1411. [Navale] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = \dim E$.

1412. [IMT] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $u^3 + u = 0$.
a) Pour $x \in \mathrm{Im}\, u$, calculer $u^2(x)$.
b) On note v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Im}\, u$. Montrer que v est un isomorphisme.
c) Montrer que $\mathrm{rg}\, u$ est pair.

1413. [IMT] Soient u et v deux endomorphismes nilpotents et non nuls de $\mathbb{R}^n$ qui commutent. On note $\tilde{v}$ l'endomorphisme induit par v sur $\mathrm{Im}(u)$.
a) Montrer que l'endomorphisme $\tilde{v}$ est bien défini et en déduire que $\mathrm{rg}(v \circ u) < \mathrm{rg}(u)$.
a) Soient $A_1, ..., A_n$ des matrices nilpotentes d'ordre n commutant deux à deux. Montrer que leur produit est nul.

1414. [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$. La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?

1415. [IMT] Soient $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

1416. [CCINP] Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $f^2 = 0$.
a) Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de f.
b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
c) Montrer que si deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient $M_1^2 = M_2^2 = 0$, alors elles sont semblables.

d) Montrer que deux matrices carrées quelconques mais semblables ont le même rang.
e) Deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $M_1^2 = M_2^2 = 0$ sont-elles nécessairement semblables ?

1417. [CCINP] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
b) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

1418. [CCINP] Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $a^2+b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.
a) Calculer MM^T et en déduire $\det M$.
b) i) On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Montrer que $\operatorname{rg} M = 4$.
ii) On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} M = 2$.
c) Étudier la diagonalisabilité de M.

1419. [IMT] ***a)*** Montrer que $P = X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle et qu'elle est strictement positive.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

1420. [IMT] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - 2\,,\mathrm{Tr}(M)A$.
a) Montrer que f est un endomorphisme.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante de bijectivité de f_A.
c) Dans le cas de non bijectivité, montrer que f_A est un projecteur.
d) L'endomorphisme f_A est-il diagonalisable ?

1421. [Navale] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par f.
b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable.
c) Que dire de l'énoncé de la question précédente si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

1422. [Navale] Soient $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $A \wedge B = 1$ et que B est scindé à racines simples. On écrit $B = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)$. On note $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto R$ où R désigne le reste de la division euclidienne de AP par B.
a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-ce un isomorphisme ?
b) Montrer que 0 est valeur propre de ϕ. Déterminer le sous-espace propre associé.
c) Prouver que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k = \prod_{i \neq k}(X - x_i)$ est vecteur propre de ϕ.

d) L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

1423. [IMT] On considère l'endomorphisme $T : (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto (w_n)$ où $w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Déterminer les éléments propres de T.

1424. [Saint-Cyr] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u_1 + \cdots + u_n = \mathrm{id}$ et $u_i \circ u_j = 0$ pour tous $i \neq j$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $f = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.
a) Calculer u_i^2 pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire f^2 puis f^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
b) Justifier la diagonalisabilité de f.

1425. [CCINP] ***a)*** Énoncer le lemme de décomposition des noyaux.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal : $\pi_f = (X^2 + 1)(X^2 + 4)$.
b) Montrer qu'il existe $x, y \in E$ non nuls tels que : $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
c) On suppose que $\dim E = 4$. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

1426. [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que $\det A = 1$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.
a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
b) On note α et β les deux racines complexes de χ_A. Montrer que : $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\alpha = \overline{\beta}$, $|\mathfrak{Re}\,\alpha| \in \{0, 1/2, 1\}$.
c) Montrer que $A^{12} = I_2$.
d) Montrer que $G = \{A^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un groupe cyclique.

1427. [CCINP] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.
a) Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M, toute valeur propre de M est racine de P.
b) On suppose M symétrique.
i) Montrer que M diagonalisable.
ii) Montrer que $\mathrm{Tr}(M)\det(M) \neq 0$.
c) On suppose M non symétrique. Montrer que M est diagonalisable.
d) Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

1428. [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$.
a) Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A, montrer que $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(B)$
b) Si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, montrer que $\dim \mathcal{C}(A) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m(\lambda)^2$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ.

1429. [CCINP] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.
a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}N = \mathrm{Sp}N^T$.
b) Soient $U, V \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$. Montrer que : $UV^T \neq 0$.

c) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que, pour tous $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Sp} A \times \operatorname{Sp} B$, $\alpha + \beta \in \operatorname{Sp} \Phi$.
d) Soient $\lambda \in \operatorname{Sp} \Phi$ et M un vecteur propre associé.
i) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(\lambda I_n - B)$.
ii) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \operatorname{Sp} A \times \operatorname{Sp} B$ tel que : $\lambda = \alpha + \beta$.

1430. [Navale] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) On suppose que 0 est la seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $AM - MB = 0$. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $AN - NB$.
b) On suppose que $\operatorname{Sp} A \cap \operatorname{Sp} B = \emptyset$. Montrer que 0 est la seule matrice vérifiant $AM - MB = 0$.
c) Cela reste-t-il vraie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1431. [CCINP] ***a)*** Rappeler l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien E, lorsque l'on dispose d'une base orthonormée de F.
b) On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite d'équation $6x = 4y = z$.

1432. [IMT] Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
a) Montrer que $\langle \ , \ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
b) Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto \sin^2(x)$ sur $\operatorname{Vect}(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x))$.

1433. [IMT] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer en fonction des coefficients de M la distance de M à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1434. [IMT] Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien. Donner la matrice de la rotation R autour de la droite D d'équation $x - y + z = x + y + z = 0$ et telle que $R(e_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

1435. [Navale] Soient E un espace euclidien et F un sous-espace de E. Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et p la projection orthogonale sur F. Montrer que $p \circ u$ est autoadjoint si et seulement si F est stable par u.

1436. [CCINP] On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $\det(M)$.
b) Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les sous-espaces propres de M.
c) Montrer que M est diagonalisable.
d) Trouver un polynôme annulateur de M. Qu'en dire ?
e) Trouver $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

1437. [CCINP] Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$. On note $g = \mathrm{id} - f$ et h le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\, g$.
a) Montrer que $(\mathrm{Im}\, g)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, g$.
b) Soit $x \in E$. Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h(x)$.

1438. [CCINP] ***a)*** Montrer que $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soient $M, N \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(M^T N) \leqslant n$.
c) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
i) Montrer que $\mathrm{tr}((AB)^2) \leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2)$.
ii) Montrer que $\mathrm{tr}((AB + BA)^2) \leqslant 4\sqrt{\mathrm{tr}(A^4)}\sqrt{\mathrm{tr}(B^4)}$.

1439. [IMT] Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $XX^TX = -I_n$.
a) Montrer que $X \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
b) Déterminer X.

1440. [CCINP] Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.
a) Déterminer les éléments de $\mathcal{S}^+(E) \cap \mathcal{O}(E)$.
b) Montrer la stabilité de $\mathcal{S}^+(E)$ par addition. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est-il un espace vectoriel ?
c) Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer l'existence de $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = v^2$.
d) En déduire que pour tous $u, v \in \mathcal{S}^+(E)$, $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

Analyse

1441. [IMT] Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et u une suite d'éléments de E telle que $\forall x \in E, (\|u_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.
b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1442. [Navale] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on note $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f|$. Une suite (f_n) d'éléments de E est dite de Cauchy si : $\quad \forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant n, N_1(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$.
a) Vérifier que N_1 est bien une norme sur E.
b) Prouver que toute suite convergente au sens de N_1 est de Cauchy.
c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$. Montrer que (f_n) est de Cauchy.
Converge-t-elle au sens de N_1 ?

1443. [IMT] Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $t > 0$. On note $\mathcal{B}$ la base $\left(\dfrac{e_1}{t}, \ldots, \dfrac{e_n}{t^n}\right)$.
a) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sim}(N)$ la classe de similitude de N. Montrer que la matrice N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathrm{Sim}(N)$.

1444. *Saint-Cyr*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note (E_n) l'équation $x^n + x - 1 = 0$.
a) Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$, notée par la suite x_n.
b) Montrer que (x_n) est croissante et majorée. Qu'en déduire ?
c) `[Python]` Afficher les 100 premières valeurs approchées de (x_n) en procédant par dichotomie.
d) `[Python]` Représenter graphiquement les valeurs et conjecturer la limite.
e) Démontrer cette conjecture.

1445. [IMT] Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On note (E_n) l'équation $\mathrm{e}^x = nx$, où $x \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, (E_n) admet exactement deux solutions, notées par la suite α_n et β_n avec $\alpha_n < \beta_n$.
b) Montrer que $\alpha_n > 0$ pour tout $n \geqslant 3$.
c) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$.
d) Déterminer la limite de (α_n).
e) Donner un équivalent simple de α_n en $+\infty$.
f) Donner un développement asymptotique à deux termes de α_n.

1446. [IMT] On note I_n l'intervalle $]2n\pi, 2n\pi + \pi/2[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\sin(x) = \mathrm{e}^{-x}$ admet une unique solution dans I_n, notée par la suite x_n. Qu'en est-il sur $\mathbb{R}^+$?
b) Montrer que $x_n \to +\infty$.
c) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n.

1447. [Navale] Soit (u_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0. Montrer que cette suite possède une sous-suite décroissante.

1448. [CCINP] ***a)*** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

1449. [IMT] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : t \mapsto \ln t - \arctan t - n\pi$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $g_n(x_n) = 0$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{n\pi} < x_n$. En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{x_n}$.

1450. [Navale] Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On suppose que $\sum u_n$ est convergente. Montrer que $\sum \dfrac{u_n}{n}$ est une série convergente.

1451. [IMT] Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$. Nature de $\sum u_n$? de $\sum (-1)^n u_n$?

1452. [CCINP] ***a)*** Soient $a, b > 0$. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2} + t^{1/2}}$.
On effectuera le changement de variable $u = \sqrt{t}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.
c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $2 \arctan \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant R_n \leqslant 2 \arctan \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
d) Déterminer un équivalent simple de R_n quand n tend vers $+\infty$.

1453. [CCINP] Soient $a < b$ et $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
a) Soit $h \in E$ positive et telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que $h = 0$.
b) Montrer que $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b fg$ définit un produit scalaire sur E.
c) Majorer $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1454. [Navale] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose $f > 0$.
a) On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + xg(t))\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
b) On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b |f(t) + xg(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$. La conclusion reste-t-elle vraie avec seulement $f \geqslant 0$?

1455. [IMT] Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xn}}{n}$.
a) Préciser l'ensemble de définition réel D de S.
b) Calculer $S(x)$ pour tout $x \in D$.
c) Quelles sont les limites de S aux bornes de D ?
d) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

1456. [IMT] On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + n^2}$.
a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Calculer $g''(x)$ et en déduire une équation différentielle vérifiée par g.
c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

1457. [IMT] Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

1458. [IMT] Montrer que $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

1459. [IMT] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-x\sqrt{n})$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) Déterminer un équivalent simple en 0 de f.

1460. [Navale] Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n : x \mapsto \frac{x}{(1+n^2x)^2}$. Étudier la convergence simple puis uniforme de $\sum u_n$ et $\sum u_n'$ sur $\mathbb{R}^+$.

1461. [IMT] Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} nxe^{-nx^2}$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Étudier les modes de convergence de cette série de fonctions.
c) Donner une expression simplifiée de $f(x)$.

1462. [IMT] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$.
a) Étudier la convergence simple de la série sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
b) Étudier la convergence uniforme de la série.
c) La série converge-t-elle uniformément sur l'intervalle $]1, +\infty[$?

1463. [CCINP] On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.
b) La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$? Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
d) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
e) Étudier la convergence uniforme sur $[1, +\infty[$.

1464. [CCINP] ***a)*** Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum \mathrm{e}^{-nx}$ converge-t-elle ?
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
c) Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$.
d) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

1465. [CCINP] Déterminer les développements en série entière de $x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$ et $x \mapsto \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en 0.

1466. [IMT] Rayon de convergence et somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

1467. [CCINP] ***a)*** Donner le rayon de convergence de $S : x \mapsto \sum (-1)^n \ln(n) x^n$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1+x} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

d) Calculer cette limite à l'aide de la formule de Wallis : $\dfrac{2}{\pi} = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$.

1468. [CCINP] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant n! 4^{n+1}$.

b) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Donner l'intervalle de définition de f et montrer que, sur cet intervalle, $f'(x) = f(x)^2$.

c) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

d) Donner une expression de u_n.

1469. [CCINP] Soit (a_n) une suite réelle convergente de limite $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n} x^n$.

b) Rappeler le développement en série entière de $\ln(1-x)$ et son rayon de convergence.

c) Rappeler la définition de la convergence de (a_n) vers a.

d) On note f la somme de la série entière susmentionnée. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un majorant de $\left|\dfrac{f(x)}{\ln(1-x)} + a\right|$ de limite ε quand x tend vers 1^-. En déduire la convergence et la limite de $\dfrac{f(x)}{\ln(1-x)}$ ainsi qu'un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1^-.

1470. [CCINP] On pose $a_0 = a_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ et $u_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

a) Montrer que $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$ puis que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) i) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet un point fixe dans $[1/2, 1]$.

ii) Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

c) Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

i) Préciser le rayon de convergence de S.
ii) Prouver que $S(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$.
iii) En déduire une expression explicite de a_n.

1471. [IMT] Soit $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini.
a) Montrer que pour $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, \mathrm{d}t$.
b) Montrer que si f est bornée alors elle est constante.

1472. [Navale] Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_0 + \cdots + a_n$. On suppose que $\sum a_n$ converge. Soient $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ et $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} t^n$.
a) Déterminer le rayon de convergence de f et g.
b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f'(t) = g'(t) - g(t)$ et $\displaystyle\int_0^t f(u)e^{-u}\, \mathrm{d}u = (g(t) - f(t))e^{-t}$.
c) En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-u}\, \mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1473. [IMT] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n |\ln(1-t)|^\alpha\, \mathrm{d}t$.
a) Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale I_n converge-t-elle ?
b) Déterminer la limite de (I_n).
c) La série $\sum I_n$ converge-t-elle ?

1474. [IMT] On cherche à déterminer un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\, \mathrm{d}x$.
On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\, \mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\, \mathrm{d}t$.
a) Montrer que $I = J$.
b) Calculer $I + J$.
a) En déduire I.
c) Effectuer le changement de variable $t = n^{4/3}x$ dans l'expression de I_n.
d) Déterminer la limite de $(n^{5/3} I_n)$. En déduire un équivalent de I_n.

1475. [CCINP]Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}$.
a) Justifier la définition de I_n.
b) Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n I_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer la somme de cette série.

1476. [CCINP] On donne $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a) Déterminer le rayon de convergence et la limite en 1 de $f : x \mapsto \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

b) Déterminer le rayon de convergence de $g : x \mapsto \sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Exprimer g à l'aide de $\ln$. Donner les limites en en 1 et 0 de $x \mapsto \ln(x)\, g(x)$.

c) Soient a et b deux réels, $0 < a < b < 1$. Montrer que $\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

d) Montrer que $\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n\geqslant 0}\int_a^b \ln(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x$.

e) Calculer $\int_a^b \ln(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x$.

f) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

1477. [IMT] Soit $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n\,\mathrm{d}x$.
a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
b) Calculer $I_n + I_{n+2}$.
c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. *Ind.* On fera apparaître un télescopage.
d) Retrouver directement ce résultat.

1478. [CCINP] On pose, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,p} = \int_0^1 x^n(\ln x)^p\,\mathrm{d}x$.
a) Justifier l'existence de $a_{n,p}$ et calculer cette expression.
b) On considère $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{a_{n,p}}$. Justifier son existence et calculer sa valeur.
c) La famille $\left(\frac{1}{a_{n,p}}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

1479. [IMT] En se ramenant à une équation différentielle, calculer $\int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1480. [IMT] ***a)*** Déterminer le domaine de définition D_F de $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
c) En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D_F$.

1481. [Navale] Soit $x > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\mathrm{d}t$ est > 0.

1482. [CCINP] Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\exp(-xt^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Domaine de définition de f ?
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
c) Donner une expression simplifiée de $f(x)$. On donne $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1483. [Navale] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
a) Exprimer G en fonction de F.
b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

1484. [IMT] Soit $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2 - 2i\pi xt)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f puis simplifier l'expression de $f(x)$.

1485. [CCINP] On considère l'équation différentielle : $(E) : y' - 2xy = 1$.
a) Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière vérifiant $y(0) = 0$.
b) Résoudre sous forme intégrale le problème de Cauchy $(y' - 2xy = 1,\ y(0) = 0)$.
c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1486. [IMT] Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que l'équation différentielle $x' - ax = h$ a une unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$.
a) Déterminer les solutions développables en série entière de : $4xy'' + 6y' + y = 0$.
Soient $(E) : x^{(3)} + 2x'' - x' - 2x = 0$. Soit G l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^3$ de (E).
b) Montrer que $G \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Soit $\Delta : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mapsto f'$.
c) Déterminer un polynôme P tel que $G = \mathrm{Ker}\, P(\Delta)$.
d) Montrer que $G = \mathrm{Ker}\,(\Delta^2 - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(\Delta + 2\mathrm{id})$.
f) Résoudre (E).

1487. [CCINP] Soient $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, P (resp. I) le sous-espace des fonctions paires (resp. impaires) de E.
a) Montrer que $E = P \oplus I$.
b) Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = \mathrm{ch}\, x$.
c) Trouver les fonctions $f \in E$ telles que $f''(x) - f(-x) = \mathrm{ch}\, x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1488. [CCINP] ***a)*** Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\frac{2}{\pi}t \leqslant \sin(t) \leqslant t$.
b) Montrer que $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
c) Majorer F sur $\mathbb{R}^*$ et en déduire sa limite en $+\infty$.

d) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer explicitement $F'(x)$.

1489. [IMT] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. À quelle condition sur a la suite $(a^n A^n)$ converge-t-elle vers une limite non nulle ?
a) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $A^2 = 0$. Dimension du commutant de A ?
b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
i) Sans calcul, montrer que A est diagonalisable.
ii) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
iii) Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

1490. [CCINP] Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{2x^2 + xy^2 + 6x^2y^2}{(x^2+y^2)^a}$.
a) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?
b) La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
c) Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

1491. [IMT] Étudier les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy + 1$.

Probabilités

1492. [IMT] Dans une urne comportant n boules numérotées de 1 à n, on tire trois boules simultanément et on note X le plus petit numéro tiré. Déterminer $X(\Omega)$ puis les probabilités $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$, $\mathbf{P}(X = n)$.

1493. [Navale] Les clients A_1, A_2 et A_3 arrivent à deux guichets au temps 0. Le client A_3 doit donc attendre. On note X_i la durée de passage de A_i au guichet. On note aussi Y l'instant auquel A_1 ou A_2 libère son guichet et Z l'instant auqel A_3 part du guichet.
Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont indépendantes et suivent chacune la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.
a) Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2. Déterminer la loi de Y.
b) Déterminer la loi de Z.
c) Calculer $\mathbf{E}(Z)$.

1494. [Navale] Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, indépendantes et suivant la même loi. On pose $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$, $Y_1 = X_1/U$ et $Y_2 = X_2/U$.
a) Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi.
b) Montrer que Y_1 et Y_2 admettent un moment à tout d'ordre et calculer $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$.
c) Montrer que T/U admet un moment à tout d'ordre et calculer $\mathbf{E}(T/U)$.
d) Exprimer $\mathbf{V}(T/U)$ en fonction de $\mathbf{V}(Y_1)$.

1495. [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ où X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la probabilité que A soit diagonalisable.

1496. [IMT] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = X/Y$.
a) Montrer que $Z \leqslant X$ puis montrer que Z admet une espérance et une variance.
b) Calculer $\mathbf{E}(Z)$.
c) Donner la loi de Z.

1497. [IMT] On se donne trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, X_2, X_3)$.

1498. [IMT] Soit $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.
a) Donner le rayon de convergence R de cette série entière .
b) Calculer $S(t)$ sur $]-R, R[$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, $\forall t \in [-1,1], G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) Que vaut λ ?
d) Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
e) Calculer l'espérance et la variance de X.

1499. [CCINP] Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles admettant une variance. On introduit la matrice $S = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et l'application définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par :
$\forall U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(U) = \dfrac{1}{\|U\|^2} \mathbf{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right)$.
a) Montrer que S est diagonalisable.
b) Prouver que pour tout $U \in \mathbb{R}^n$, $U^T S U = \mathbf{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right)$.
c) On ordonne les valeurs propres de S dans l'ordre décroissant : $\lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$. Soit $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
i) Montrer que $U^T S U \leqslant \lambda_1 \|U\|^2$.
ii) En déduire que $f(U) \leqslant \lambda_1$. Prouver que cette inégalité est une égalité si et seulement si U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1.
d) i) Soit $a \in]0,1[$. On choisit ici $S = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de S.
ii) En déduire $\displaystyle\max_{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(U)$ et donner les vecteurs U pour lesquels ce maximum est atteint.