

ORAL BLANC N° 1 : MINES-PONTS

1 Avec préparation de 15 minutes

On appelle nombre de Fermat d'indice $n \in \mathbb{N}$ le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$. Montrer que $F_n \wedge F_m = 1$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

2 Sans préparation Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle ne prenant pas la valeur -1 . On définit

une suite $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant
$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^n (1 + u_k)}.$$

1. On suppose ici que $u_n \geq 0$ pour tout n . Quelle est la nature de la série de terme général v_n ? Calculer sa somme dans le cas où la série de terme général u_n diverge.
2. On suppose que $u_n = a^{2^n}$ où a est un élément fixé de $[0, 1[$. Calculer la somme de la série de terme général v_n .
3. Étudier la série de terme général v_n pour $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, puis pour $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

27 Mai 2025

ORAL BLANC N° 1 : MINES-PONTS

1 Avec préparation de 15 minutes

On appelle nombre de Fermat d'indice $n \in \mathbb{N}$ le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$. Montrer que $F_n \wedge F_m = 1$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

2 Sans préparation Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle ne prenant pas la valeur -1 . On définit

une suite $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant
$$v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=1}^n (1 + u_k)}.$$

1. On suppose ici que $u_n \geq 0$ pour tout n . Quelle est la nature de la série de terme général v_n ? Calculer sa somme dans le cas où la série de terme général u_n diverge.
2. On suppose que $u_n = a^{2^n}$ où a est un élément fixé de $[0, 1[$. Calculer la somme de la série de terme général v_n .
3. Étudier la série de terme général v_n pour $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, puis pour $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.