Mines - Ponts - Maths 2 - MP/MPI

2024

Phénomène de seuil dans les graphes

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

1 - Remarquons que pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$,

Résultat classique sur les matrices de permutations

$$m_{\rho(i),\rho(j)} = \sum_{k,\ell \in [\![1,n]\!]} \delta_{\rho(i),k}\, m_{k,\ell}\, \delta_{\ell,\rho(j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\rho^{-1}(k)} \left[\sum_{\ell=1}^{n} m_{k,\ell}\, \delta_{\ell,\rho(j)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\rho^{-1}(k)} \left[M P_\rho\right]_{k,j}$$

$$= \left[P_{\rho^{-1}} M P_\rho\right]_{i,j}$$ où on note $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

Il reste à voir que $P_{\rho^{-1}} = P_\rho^{-1}$. En effet, si $i,j \in [\![1,n]\!]$,

$$\left[P_{\rho^{-1}} P_\rho\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(P_{\rho^{-1}}\right)_{i,k} \left(P_\rho\right)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\rho^{-1}(k)}\, \delta_{k,\rho(j)}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \rho(i) = \rho(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Plus généralement $P_\sigma \circ P_\rho = P_{\sigma\circ\rho}$

$$= \delta_{i,j} \quad \text{car } \rho \in \mathfrak{S}_n$$

$$= (I_n)_{i,j}$$

Donc $P_{\rho^{-1}} \times P_\rho = I_n$: P_ρ inversible à gauche, donc inversible

et $(P_\rho)^{-1} = P_{\rho^{-1}}$.

Autre méthode : considérer la base $(e_{\rho(1)}, \dots, e_{\rho(n)})$.

Finalement, $\boxed{M_\rho = (m_{\rho(i), \rho(j)})_{i,j} = P_\rho^{-1} M P_\rho \text{ est semblable à } M.}$

Soit $G = (S, A)$ graphe non vide, σ, σ' indexations de G.

$\sigma : [\![1, n]\!] \longrightarrow S$ et $\sigma' : [\![1, n]\!] \longrightarrow S$ bijections, donc

$\rho = \sigma^{-1} \circ \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ et d'après ce qui précède, $M_{G,\sigma}$ est semblable

à $\left[(M_{G,\sigma})_{\rho(i), \rho(j)}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$ avec

$$(M_{G,\sigma})_{\rho(i),\rho(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma \circ \rho(i), \sigma \circ \rho(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma'(i), \sigma'(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= (M_{G,\sigma'})_{i,j}.$$

Finalement, $\boxed{M_{G,\sigma} \text{ et } M_{G,\sigma'} \text{ sont semblables.}}$

2_ Théorème spectral : $\boxed{M_{G,\sigma} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ donc (ortho)\_diagonalisable.}}$

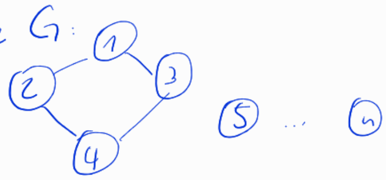
3_ Si $\mathrm{rg}(M_{G,\sigma}) = 1$, 0 est valeur propre de $M_{G,\sigma}$ d'ordre $n-1$.

Or $\chi_{M_{G,\sigma}}$ scindé (par 2) et $\mathrm{Sp}(M_{G,\sigma}) = 0$ est la somme des valeurs propres de $M_{G,\sigma}$ comptées avec multiplicité. $M_{G,\sigma}$ aurait une autre valeur propre, nulle elle aussi donc 0 serait valeur propre d'ordre n. Contradiction : $\boxed{\mathrm{rg}(M_{G,\sigma}) \neq 1.}$

4 – On suppose que les sommets non isolés de G forment un graphe étoilé à d branches et on choisit une indexation de G telle que le centre de l'étoile soit $\sigma(1)$ et les branches arrivent à $\sigma(2), \dots, \sigma(d+1)$.

Alors $M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & & & (0) & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}$ (avec d coefficients 1 sur la première ligne et d sur la première colonne) est de rang 2 et toute matrice d'adjacence de G, semblable à celle-ci (qu'1) $\boxed{\text{est de rang } 2}$.

Soit le graphe G :



$$M_{G,id} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ est de rang 2, pas du type précédent.

---

5 – G' copie de G donc on a $\sigma : S' \longrightarrow S$ bijection telle que

$$\{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A. \quad (*)$$

Soit σ' indexation de G'. Alors $\sigma' : [\![1, n]\!] \longrightarrow S'$ bijection

donc $\rho = \sigma \circ \sigma' : [\![1, n]\!] \longrightarrow S$ bijection donc indexation de G

et $\{\sigma'(i), \sigma'(j)\} \in A' \iff \{\underbrace{\sigma \circ \sigma'}_{\rho}(i), \underbrace{\sigma \circ \sigma'}_{\rho}(j)\} \in A$ par $(*)$

donc $M_{G', \sigma'} = M_{G, \rho}$ donc $\boxed{\chi_{G'} = \chi_G}$.

---

6 – On sait que, si σ est une énumération de G, $\chi_G = \chi_{M_{G,\sigma}}$ et

$\boxed{a_{n-1} = -\mathrm{tr}(M_{G,\sigma}) = 0}$ car le graphe est sans boucle.

Puis, dans la formule du déterminant

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Dans $\chi_G = \det(XI_n - M_{G,\sigma})$, on obtient un terme en X^{n-2} ssi on choisit σ ayant exactement $n-2$ points fixes, donc $\sigma = (i\ j)$ transposition.

Ainsi $$a_{n-2} = \sum_{\sigma=(ij)\in \mathfrak{S}_n} \overset{=-1}{\varepsilon(\sigma)}\left(-\delta_{\{i,\underset{j}{\sigma(i)}\}\in A}\right)\times\left(-\delta_{\{j,\underset{i}{\sigma(j)}\}\in A}\right)$$

où $\delta_{\{i,j\}\in A} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i,j\}\in A \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

$$= -\sum_{\substack{\{i,j\}\in\mathcal{P}([\![1,n]\!]) \\ i\neq j}} \delta_{\{i,j\}\in A}$$

$$\boxed{a_{n-2} = -|A|}$$

---

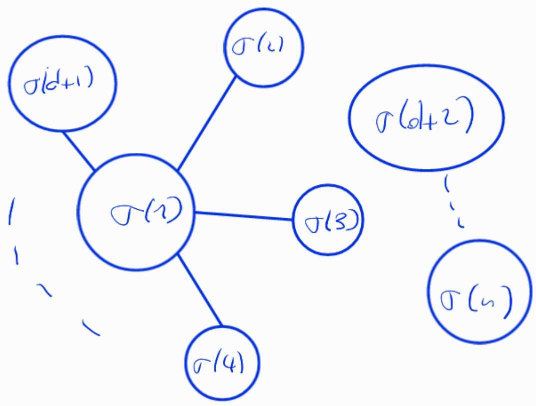
7. Par 4, si G étoilé à d branches hors sommets isolé, $\mathrm{rg}(M_{G,\sigma}) = 2$ et $M_{G,\sigma}$ diagonalisable (qu2) donc 0 racine d'ordre $n-2$ de χ_G.

Ainsi, on a $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\chi_G = X^{n-2}(X^2 + a_{n-1}X + a_{n-2})$

Par 6., $$\boxed{\chi_G = X^{n-2}(X^2 - |A|) = X^{n-2}(X^2-d).}$$

Alors $$\boxed{\mathrm{Sp}(M_{G,\sigma}) = \{0, -\sqrt{d}, \sqrt{d}\}.}$$

Prenons σ tel que le graphe soit



$$M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\ 1 & \ddots & & & (0) & \\ \vdots & & 0 & & & \\ 1 & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors les sous-espaces propres de dimensions respectives $n-2$, 1 et 1 sont

$$\boxed{E_0(M_{G,\sigma}) = \mathrm{Ker}(M_{G,\sigma}) = \mathrm{Vect}\underbrace{\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\-1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \leftarrow (d+1)^e, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ (d+2)^e, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right]}_{n-2 \text{ vecteurs libres.}}}$$

Car $\begin{vmatrix} -1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$M_{G,\sigma} - \sqrt{d}\, I_n = \begin{pmatrix} -\sqrt{d} & 1 & \cdots & 1 & & & \\ 1 & \ddots & & & & (0) & \\ \vdots & & -\sqrt{d} & & & & \\ 1 & & & -\sqrt{d} & & & \\ & (0) & & & \ddots & & \\ & & & & & -\sqrt{d} \end{pmatrix}$$

On remarque que dans cette matrice, $\sqrt{d}\, C_1 + C_2 + \dots + C_{d+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow (d+1)^e \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \in E_{\sqrt{d}}(M_{G,\sigma})$ qui est de dimension 1 (valeur propre simple) donc $\boxed{E_{\sqrt{d}}(M_{G,\sigma}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (d+1)^e}$

De même, $M_{G,\sigma} + \sqrt{d}\, I_n = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & 1 & \cdots & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & & & & & \\ & (0) & & & & \sqrt{d} \end{pmatrix}$

$$\sqrt{d}\, C_1 - C_2 - \dots - C_{d+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $\boxed{E_{-\sqrt{d}}(M_{G,\sigma}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (d+1)^e}$

8- On peut considérer une énumération de G $\sigma : [\![1, n_1+n_2]\!] \longrightarrow S_1 \sqcup S_2$

où $n_1 = |S_1|$, $n_2 = |S_2|$, $S_1 = \{\underbrace{\sigma(1), \dots, \sigma(n_1)}_{= S_1}\}$ $S_2 = \{\underbrace{\sigma(n_1+1), \dots, \sigma(n_1+n_2)}_{= S_2}\}$

Soit $\sigma_1 : \begin{vmatrix} [\![1, n_1]\!] \longrightarrow S_1 \\ i \longmapsto \sigma(i) \end{vmatrix}$ et $\sigma_2 : \begin{vmatrix} [\![1 \,;\, n_2]\!] \longrightarrow S_2 \\ i \longmapsto \sigma(n_1+i) \end{vmatrix}$

Ce sont des énumérations de G_1 et G_2 et

$$M_{G,\sigma} = \left(\begin{array}{c|c} M_{G_1,\sigma_1} & (0) \\ \hline (0) & M_{G_2,\sigma_2} \end{array}\right)$$

Alors, si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\chi_G(\lambda) = \left|\begin{array}{c|ccc} \lambda I_{n_1} - M_{G_1,\sigma_1} & \begin{matrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ & (0) \\ \hline \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \quad (0) & \lambda I_{n_2} - M_{G_2,\sigma_2} \end{array}\right|$$

Notons $\begin{cases} A_1^{(\lambda)} = \lambda I_{n_1} - M_{G_1,\sigma_1} \\ A_2^{(\lambda)} = \lambda I_{n_2} - M_{G_2,\sigma_2} \end{cases}$

Développons par rapport à la première colonne :

désigne $A_1^{(\lambda)}$ sans la i^e ligne et la $1^{ère}$ colonne

$$\chi_G(\lambda) = \sum_{i=1}^{n_1} (-1)^{i+1} \left[A_1^{(\lambda)}\right]_{i,1} \times \left|\begin{array}{c|c} \left[A_1^{(\lambda)}\right]_{[\![1,n_1]\!]\setminus\{i\}\times[\![2,n_1]\!]} & (*) \\ \hline (0) & A_2(\lambda) \end{array}\right|$$

$$- (-1)^{n_1+2} \left|\begin{array}{cc|c} \left[A_1^{(\lambda)}\right]_{[\![1,n_1]\!]\times[\![2,n_1]\!]} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & (0) \\ \hline (0) & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} & \left[A_2^{(\lambda)}\right]_{[\![2,n_2]\!]^2} \end{array}\right|$$

Noté $D(\lambda)$

Minor $(i,1)$ de $A_1(\lambda)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n_1} (-1)^{i+1} \left[A_1^{(\lambda)}\right] \times \Delta_{i,1}^{(\lambda)} \times \det(A_2(\lambda))\right.$$

$$\left. + (-1)^{n_1+1} \underbrace{\left| \left[A_1(\lambda)\right]_{[\![1,n_1]\!]\times[\![2,n_1]\!]} \; \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right|}_{\text{dvt \% } C_{n_1}} \times \det\left(\left[A_2(\lambda)\right]_{[\![2,n_2]\!]^2}\right)\right)$$

$$= \det(A_1(\lambda)) \det(A_2(\lambda)) - \cancel{(-1)^{n_1+1}}\,\cancel{(-1)^{n_1+1}} \det\left(\left[A_1(\lambda)\right]_{[\![2,n_1]\!]^2}\right) \times \det\left(\left[A_2(\lambda)\right]_{[\![2,n_2]\!]^2}\right)$$

Or $\det(A_1(\lambda)) = \chi_{G_1}(\lambda)$, $\det(A_2(\lambda)) = \chi_{G_2}(\lambda)$,

et $G_1 \setminus s_1$ admet comme matrice d'adjacence $\left[M_{G_1,\sigma_1}\right]_{[\![2,n_1]\!]^2}$

donc $\chi_{G_1\setminus s_1}(\lambda) = \det\left(\left[A_1(\lambda)\right]_{[\![2,n_1]\!]^2}\right)$ et, de même,

$$\chi_{G_2\setminus s_2}(\lambda) = \det\left(\left[A_2(\lambda)\right]_{[\![2,n_2]\!]^2}\right)$$

Autre méthode : multilinéarité

donc $\boxed{\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1\setminus s_1} \times \chi_{G_2\setminus s_2}}$

9. On applique la question précédente avec G_1 et G_2 étoiles à d_1 et d_2 branches respectivement, de centre s_1 et s_2. La double étoile G vérifie bien les hypothèses. De plus, dans $G_1 \setminus s_1$ et $G_2 \setminus s_2$, tous les sommets sont isolés, donc leurs matrices d'adjacence sont toujours nulles.

Ainsi, avec 7,

$$\chi_G = \chi_{G_1}\chi_{G_2} - \chi_{G_1\setminus s_1}\chi_{G_2\setminus s_2}$$
$$= X^{d_1-1}(X^2-d_1)X^{d_2-1}(X^2-d_2) - X^{d_1}X^{d_2}$$
$$= X^{d_1+d_2-2}\left(X^4-(d_1+d_2)X^2+d_1d_2\right) - X^{d_1+d_2}$$

$$\boxed{\chi_G = X^{d_1+d_2+2} - (d_1+d_2+1)X^{d_1+d_2} + d_1d_2X^{d_1+d_2-2}}$$

Comme 0 est racine d'ordre d_1+d_2-2 et comme la matrice d'adjacence est diagonalisable par 2 donc, par théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(M_{G,\sigma}) = d_1+d_2+2-\dim(E_0(M_{G,\sigma}))$$
$$= d_1+d_2+2-(d_1+d_2-2)$$

donc $\boxed{\mathrm{rg}(M_{G,\sigma}) = 4}$.

---

10. Les $X_{\{i,j\}}$ étant indépendants, la relation (1) donne

$$\mathbb{P}(\{G\}) = \prod_{\{i,j\}\in A}\mathbb{P}(X_{\{i,j\}}=1)\times\prod_{\{i,j\}\notin A}\mathbb{P}(X_{\{i,j\}}=0)$$

ie $\boxed{\mathbb{P}(\{G\}) = p_n^{\,a}\times q_n^{\,N-a}}$.

Nb de parties A à a éléments de l'ensemble de paires d'entiers de $[\![1,n]\!]$.

Alors $$\mathbb{P}(\Omega_n) = \sum_{G\in\Omega_n}\mathbb{P}(\{G\}) = \sum_{a=0}^{N}\binom{N}{a}p_n^{\,a}q_n^{\,N-a}$$

$$\underset{\text{binôme}}{=} (p_n + q_n)^N = \boxed{1}.$$

Partie II – Une première fonction de seuil

11 – D'après le cours, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(X > k)}_{\geqslant 0} \geqslant \mathbb{P}(X > 0).$$

Autre argument possible, avec la définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X>0).$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{P}(X > 0).}$

Ou encore, avec Markov,

$$\mathbb{P}(X>0) = \mathbb{P}(X \geqslant 1) \leq \mathbb{E}(X).$$

---

12 – On suppose que $\mathbb{E}(X) \neq 0$. Comme $|-\mathbb{E}(X)| \geqslant \mathbb{E}(X)$, on a bien

$$(X=0) \subset \left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathbb{E}(X)\right) \text{ donc}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0) \leqslant \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathbb{E}(X)) \underset{\substack{\text{inégalité de} \\ \text{B-T}}}{\leqslant} \frac{\mathbb{V}(X)}{(\mathbb{E}(X))^2}}$$

---

13 – $A_n(\Omega_n) = [\![0, N]\!]$.

Soit $a \in [\![0, N]\!]$. $\displaystyle \mathbb{P}(A_n = a) = \sum_{\substack{G=(S,A)\in\Omega_n \\ |A| = a}} \mathbb{P}(\{G\})$

$$\underset{10}{=} \binom{N}{a} p_n^a q_n^{N-a}.$$

Nombre de graphes à a arêtes.

Donc $\boxed{A_n \sim \mathcal{B}(N, p_n).}$

14_ On suppose que $p_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors $n^2 p_n \to 0$

Par 11 (avec $A_n \in L^2$), $0 \leq \mathbb{P}(A_n > 0) \leq \mathbb{E}(A_n) = N \times p_n = \frac{n(n-1)}{2} p_n \sim \frac{n^2 p_n}{2} \to 0$

donc $\boxed{\mathbb{P}(A_n > 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$

15_ On suppose que $\frac{1}{n^2} = o(p_n)$ ie $\frac{1}{n^2 p_n} \to 0$.

Alors $\mathbb{P}(A_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(A_n = 0) = 1 - (1-p_n)^N$

$$\text{avec } 0 \leq \mathbb{P}(A_n = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(A_n)}{(\mathbb{E}(A_n))^2} = \frac{N p_n q_n}{(N p_n)^2} = \frac{1-p_n}{N p_n}$$

(12, $N p_n \neq 0$)

$$= \frac{2}{n(n-1)}\left[\frac{1}{p_n} - 1\right]$$

$$\sim \frac{2}{n^2 p_n} - \frac{2}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\mathbb{P}(A_n = 0) \longrightarrow 0$ et $\boxed{\mathbb{P}(A_n > 0) \longrightarrow 1.}$

16_ Ainsi la propriété $\boxed{\mathcal{P}_n = (A_n > 0)}$ possède comme fonction de seuil $\boxed{\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \geq 2}}$.

« avoir au moins une arête »

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

17_ En tant que variable aléatoire de Bernoulli,

$$\mathbb{E}(X_H) = \mathbb{P}(X_H = 1) = \mathbb{P}(H \subset G)$$

Or $(H \subset G) = \bigcap_{\{i,j\} \in A_H} (X_{\{i,j\}} = 1)$ (comme $S_G = [\![1,n]\!]$, on a bien $S_H \subset S_G$)

donc, par indépendance,

$$\boxed{\mathbb{E}(X_H) = \prod_{\{i,j\} \in A_H} \mathbb{P}(X_{\{i,j\}} = 1) = p_n^{a_H}.}$$

---

18 _ $\mathcal{C}_0 = \{H = (S_H, A_H),\ H \text{ copie de } G_0,\ S_H \subset [\![1,n]\!]\}$.

$$= \bigsqcup_{\substack{S \subset [\![1,n]\!] \\ |S| = s_0}} \underbrace{\{H = (S, A_H),\ H \text{ copie de } G_0\}}_{= \mathcal{C}_S}$$

On montre que $|\mathcal{C}_S| = c_0$. Comme $|S| = |S_0'| = s_0$, on a une bijection $\sigma : S \to S_0'$. Alors

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_S & \longrightarrow & \mathcal{C}_{S_0'} \\ G = (S, S_H) & \longmapsto & (S_0', \{\{\sigma(s), \sigma(t)\}, \{s,t\} \in A_H\}) \end{array} \right.$$

(copie de G par σ)

est bien définie, bijective, de réciproque

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{S_0'} & \longrightarrow & \mathcal{C}_S \\ G & \longmapsto & \text{copie de } G \text{ par } \sigma^{-1} \end{array} \right.$$

Donc $|\mathcal{C}_S| = |\mathcal{C}_{S_0'}| = c_0$.

Finalement, $\boxed{|\mathcal{C}_0| = \binom{n}{s_0} \times c_0} \leq \frac{n^{s_0}}{s_0!} c_0$

Montrons que $c_0 \leq s_0!$

Or, avec la définition de la copie d'un graphe, le nombre de copies de G_0 ayant S_0' comme ensemble de sommet est majoré par le nombre de bijection $\sigma : S_0' \to S_0$

Autrement dit, $C_0 \leq |S_0'|! = s_0!$

Finalement, $\boxed{|\mathcal{C}_0| \leq n^{s_0}}$.

19_ On a, par définition, $X_n^0 = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} X_H$, donc, par linéarité,

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^0) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbb{E}(X_H) = \sum_{H \in \mathcal{C}_0} \mathbb{P}(H \subset G)}$$

$$\underset{17.}{=} \sum_{H \in \mathcal{C}_0} p_n^{a_H} \underset{a_H = a_0}{=} |\mathcal{C}_0| \, p_n^{a_0}$$

car H copie de G_0

donc $\boxed{\mathbb{E}(X_n^0) \underset{18}{\leq} n^{s_0} p_n^{a_0}}$.

20_ On suppose $p_n = o(n^{-\omega_0})$ et on se donne $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

<u>But</u> : $\mathbb{P}(X_n^\circ > 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Notons Y_n° la variable aléatoire telle que $Y_n^\circ(G) =$ nb de copie de H_0 contenues dans G.

Comme une copie de G_0 contient au moins une copie de H_0, $(X_n^\circ > 0) \subset (Y_n^\circ > 0)$

Or $\mathbb{P}(Y_n^\circ > 0) \underset{11}{\leq} \mathbb{E}(Y_n^\circ)$

$$\underset{19}{\leq} n^{S_{H_0}} p_n^{a_{H_0}}$$

$$= n^{a_{H_0} \omega_0} p_n^{a_{H_0}}$$

$$= \left(n^{\omega_0} p_n\right)^{a_{H_0}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

puis $0 \leq \mathbb{P}(X_n^\circ > 0) \leq \mathbb{P}(Y_n^\circ > 0)$,

donc $\boxed{\mathbb{P}(X_n^\circ > 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$ par encadrement.

21 – $\mathbb{E}((X_n^\circ)^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{H\in\mathcal{C}_0} X_H\right)^2\right)$

$H\cup H' = (S_H \cup S_{H'}, A_H \cup A_{H'})$

Non défini dans le sujet

$= \mathbb{E}\left(\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} X_H \times X_{H'}\right)$

$\begin{cases} H\subset G \\ H'\subset G \end{cases} \Leftrightarrow H\cup H' \subset G$

$= \mathbb{E}\left(\sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} X_{H\cup H'}\right)$

$= \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbb{E}(X_{H\cup H'}) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbb{P}(H\cup H' \subset G)$

$\underset{17.}{=} \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} p_n^{a_{H\cup H'}}$

on suppose...

avec $a_{H\cup H'} = |A_{H\cup H'}| = |A_H \cup A_{H'}|$

$= |A_H| + |A_{H'}| - |A_H \cap A_{H'}|$

$= 2a_0 - a_{H\cap H'}$

donc $\boxed{\mathbb{E}((X_n^\circ)^2) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbb{P}(H\cup H' \subset G) = \sum_{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}}$

---

22 – $s_{H\cap H'} = |S_H \cap S_{H'}| = 0 \Leftrightarrow S_H \cap S_{H'} = \emptyset$

[Dans ce cas, on a aussi nécessairement $A_H \cap A_{H'} = \emptyset$.]

alors $\displaystyle\sum_0 = \sum_{\substack{H,H'\in\mathcal{C}_0 \\ S_H\cap S_{H'}=\emptyset}} \mathbb{E}(X_{H\cup H'})$

$\displaystyle = \sum_{\substack{H,H'\in\mathcal{C}_0 \\ S_H\cap S_{H'}=\emptyset}} p_n^{2a_0}$ (17)

Autre méthode :

$(H\subset G) \perp\!\!\!\perp (H'\subset G)$

car $\mathbb{P}(H\cup H'\subset G) = p_n^{2a_0}$

$= \mathbb{P}(H\subset G)\,\mathbb{P}(H'\subset G)$

donc $\mathbb{E}(X_H X_{H'}) = \mathbb{E}(X_H)\,\mathbb{E}(X_{H'})$

$= p_n^{2a_0} \times |\{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2,\ S_H\cap S_{H'}=\emptyset\}|$

$\leq p_n^{2a_0} \times |\mathcal{C}_0|^2$

donc $\boxed{\sum_0 \leq \left(\mathbb{E}(X_n^0)\right)^2 \text{ vu } 19.}$

---

23. Soit $k\in [\![1, s_0]\!]$.

$$\sum_k = \sum_{\substack{(H,H')\in\mathcal{C}_0^2 \\ s_{H\cap H'}=k}} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$$

$$= \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0 \\ s_{H\cap H'}=k}} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$$

Or si $H\subset G$ et $H'\subset G$, alors $H\cap H'\subset G$

donc $\frac{s_{H\cap H'}}{a_{H\cap H'}} \geq \omega_0$ donc $a_{H\cap H'} \leq \frac{s_{H\cap H'}}{\omega_0}$

donc, comme $p_n \in]0,1[$,

$$\Sigma_k \leq \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \sum_{\substack{H'\in\mathcal{C}_0 \\ s_{H\cap H'}=k}} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$$

$$\leq \sum_{H\in\mathcal{C}_0} |\{H'\in\mathcal{C}_0,\ s_{H\cap H'}=k\}| \times p_n^{2a_0}\, p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

Or choisir $H'\in\mathcal{C}_0$ tel que $|S_H \cap S_{H'}| = k$, c'est

- choisir $S_H \cap S_{H'}$ dans S_H : il y a $\binom{s_H}{k} = \binom{s_0}{k}$ choix possibles
- choisir $S_{H'} \setminus S_H$ dans $[\![1,n]\!] \setminus S_H$: il y a $\binom{n-s_H}{s_{H'}-k} = \binom{n-s_0}{s_0-k}$ choix possibles
- choisir une copie de G_0 ayant $S_{H'}$ comme sommets : il y a c_0 possibilités comme vu en 18.

Ainsi $|\{H'\in\mathcal{C}_0,\ s_{H\cap H'}=k\}| = \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0$

et $$\boxed{\Sigma_k \le \sum_{H\in \mathcal{C}_0} \underbrace{\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} C_0\, p_n^{2a_0}\, p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}}_{\text{ne dépend pas de } H}}$$

$$\le \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} C_0\, p_n^{2a_0}\, p_n^{-k/\omega_0}\, |\mathcal{C}_0|$$

24_ On suppose $1 \le q \le r$.

$$\binom{r}{q} r^{-q} = \frac{\overbrace{r(r-1)\ \dots\ (r-q+1)}^{q \text{ termes}}}{q!}\, r^{-q}$$

$$\ge \frac{(r-q+1)^q}{q!}\, r^{-q} = \frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{r}\right)^q$$

$$\boxed{\binom{r}{q} r^{-q} \ge \frac{1}{q!}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)^q}$$

Soit $k \in [\![1, s_0]\!]$.

$$\frac{\Sigma_k}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} \underset{18}{=} \frac{\Sigma_k}{p_n^{2a_0}\, \underbrace{|\mathcal{C}_0|^2}_{=\binom{n}{s_0} C_0}} \underset{23}{\le} \frac{\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} \times p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

Or, comme $1 \le s_0 \le n$ pour n assez grand,

$$\binom{n}{s_0} n^{-s_0} \ge \frac{1}{s_0!}\left(1-\frac{s_0-1}{s_0}\right)^{s_0} = \frac{1}{s_0!\, s_0^{s_0}}$$

D'où $\dfrac{\Sigma_k}{(\mathbb{E}(X_n^0))^2} \leq \binom{S_0}{k}\binom{n-S_0}{S_0-k}\dfrac{S_0!\ S_0^{S_0}}{n^{S_0}} \times p_n^{-k/\omega_0}$

$$\leq \binom{S_0}{k}\frac{(n-S_0)^{S_0-k}}{(S_0-k)!} S_0!\, S_0^{S_0}\ \frac{p_n^{-1/\omega_0}}{n^{S_0}}$$

$$\sim \binom{S_0}{k}\frac{S_0!\ S_0^{S_0}}{(S_0-k)!}\left[\frac{1}{n^{\omega_0}p_n}\right]^{\frac{1}{\omega_0}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\boxed{\Sigma_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\mathbb{E}(X_n^0)\right)^2\right).}$

25_

$$0 \leq \mathbb{V}(X_n^0) = \mathbb{E}((X_n^0)^2) - \left(\mathbb{E}(X_n^0)\right)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{S_0}\Sigma_k - \left(\mathbb{E}(X_n^0)\right)^2$$

$$\underset{22}{\leq} \sum_{k=1}^{S_0}\Sigma_k \quad \text{nb fixe de } o\left(\left(\mathbb{E}(X_n^0)\right)^2\right) \text{ par } 24$$

donc $$\boxed{\frac{\mathbb{V}(X_n^\circ)}{\left(\mathbb{E}(X_n^\circ)\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

26_ $\mathcal{P}_n$: « contenir une copie de G_0 »
ie $\mathcal{P}_n = (X_n^\circ > 0)$

Si $p_n = o\left(n^{-\omega_0}\right)$, alors $\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par 20

et si $n^{-\omega_0} = o(p_n)$, alors, avec la question précédente et 12,

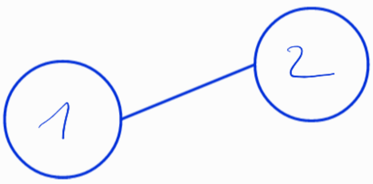
$$\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) = 1 - \mathbb{P}(X_n^\circ = 0)$$

avec $\mathbb{P}(X_n^\circ = 0) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X_n^\circ)}{\left(\mathbb{E}(X_n^\circ)\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\mathbb{P}(\mathcal{P}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$\boxed{\left(k^{-\omega_0}\right)_{k\geq 2} \text{ est bien une fonction de seuil pour } \mathcal{P}_n.}$

27_ Considérons un graphe G_0 à 2 sommets et une seule arête



Alors « contenir une copie de G_0 » revient à « contenir au moins une arête ».

$s_0 = 2, \quad a_0 = 1$

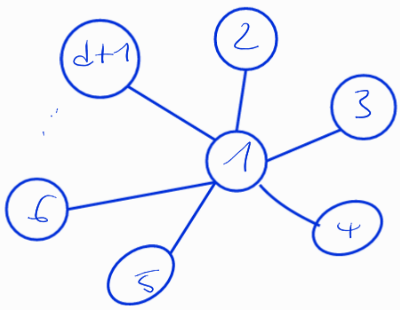
$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H} = \frac{s_0}{a_0} = 2$$

seul G_0 convient

Par 26, $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ admet comme fonction de seuil } \left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \geq 2}}$.

Puis, pour $\mathcal{P}_n$: « contenir l'étoile à d branches »

G_0 :



$s_0 = d+1$

$a_0 = d$

$$\omega_0 = \min_{\substack{H \subset G_0 \\ a_H \geq 1}} \frac{s_H}{a_H}$$

un tel sous-graphe contient 1 et p sommet parmi $2, \dots, d+1$

Son nombre d'arêtes est donc $\leq p$

donc $\frac{s_H}{a_H} \geq \frac{p+1}{p}$ atteint pour p arêtes.

$$= \frac{p+1}{p}$$

Donc $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ admet comme fonction de seuil } \left(\frac{1}{k^{\frac{p+1}{p}}}\right)_{k \geq 2}}$.

~ Fin ~