1.2 Mathématiques 1 - filières MP et MPI

1.2.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème portait sur une intégrale de Dirichlet généralisée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt$$

qui était utilisée dans la dernière partie pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire.

Le sujet comprenait quatre parties qui ne sont pas indépendantes, mais il y avait beaucoup de questions fermées, ce qui permettait d'avancer en admettant les résultats non démontrés. Une proportion significative de candidats qui a traité la dernière partie quasiment in extenso, en ayant plus ou moins sauté des questions antérieures.

La longueur et la difficulté étaient raisonnables, les points étaient répartis régulièrement dans tout le sujet. Nous avons obtenu une moyenne brute très convenable, un écart-type satisfaisant et un bon étalement des notes, qui ont permis de classer correctement les candidats. Quelques candidats ont obtenu la note maximale et il y a eu une proportion non négligeable de notes supérieures à 15.

Les correcteurs ont observé une dégradation de la présentation des copies par rapport aux années précédentes. L'interdiction des effaceurs et autres ne justifie pas les torchons.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe A.

1.2.2 Conclusion

Dans les recommandations aux futurs candidats, on peut commencer par la précision de la rédaction. Quand le sujet est, comme celui-ci, relativement abordable, il ne faut pas oublier des hypothèses en appliquant un théorème et il faut être très précis dans leur vérification.

Rappelons qu'appliquer un théorème en mathématiques ne se réduit pas à citer le nom d'un mathématicien ou d'un théorème, mais à vérifier certaines hypothèses et à en déduire des conclusions.

Ensuite, quand il y a des calculs, comme c'était le cas ici, la copie ne doit pas servir de brouillon. Les correcteurs sont conscients que l'interdiction des effaceurs et autres dispositifs crée une difficulté, mais il faut que les candidats comprennent qu'il n'y a pas de bénéfice du doute à leur profit : la consigne est très claire, si on ne peut pas lire ou s'il faut chercher les résultats au milieu de gribouillages, les points destinés à la question ne sont pas attribués au candidat.

A Mathématiques 1 MP/MPI

À la première question, beaucoup de candidats ont oublié de mentionner la continuité de la fonction, qui demandait d'ailleurs un minimum de justification en vérifiant que le dénominateur ne s'annulait pas. Une autre erreur fréquente consistait à utiliser une relation de comparaison sans prendre le module, ce qui revenait à une inégalité entre nombres complexes.

Il s'agissait, à la question suivante, d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. Le théorème était en général bien connu et l'indication fournissait une aide importante. Les erreurs se situaient en général dans les majorations, avec, comme à la question précédente, quelques inégalités entre nombres complexes.

De manière surprenante, il y a eu un nombre assez important de candidats qui ont utilisé le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour déterminer la dérivée de la fonction g, alors qu'il s'agissait d'un produit de fonctions dérivables.

La question 4 était, comme de nombreuses autres, fermée, et elle a été l'occasion de pas mal de tentatives d'escroqueries. Il vaut mieux éviter, cela se repère en général facilement. Ici par exemple, si l'argument $g(-\theta) = g(\theta)$ n'apparaissait pas, il était peu probable que la démonstration soit correcte.

Le défaut à la question suivante a été le manque de justification, dans les cas extrêmes on avait le changement de variable et l'expression finale, recopiée sans le moindre calcul intermédiaire. Ces utilisations des résultats donnés par l'énoncé relèvent tout de même d'une certaine naïveté.

À la question 6, la méthode était indiquée, le théorème de convergence dominée était en général bien connu, mais sa mise en place a été rarement parfaite.

La question 7 consistait simplement à utiliser les résultats des questions précédentes ; elle a été souvent bien traitée.

Les correcteurs ont été surpris par le nombre d'abandons à la question suivante. Le résultat était, encore une fois, donné, et l'intervalle d'intégration donnait des renseignements précieux sur la méthode à utiliser.

Les questions 9 et 10 ont été très mal traitées. La différence avec les questions précédentes, c'est que le théorème auquel on pensait en premier ne s'appliquait pas, ou du moins pas directement : la série des intégrales de la valeur absolue des fonctions intégrées est divergente, donc ce théorème d'inversion, qui ne donne qu'une condition suffisante, est inopérant. La meilleure solution consistait à faire un contrôle de reste, technique à laquelle on peut penser en présence d'une série alternée. En s'acharnant sur l'application du théorème, on arrivait à des solutions compliquées et rarement correctes.

Les questions 11 et 12 ne présentaient pas de difficultés, il suffisait d'utiliser à bon escient les résultats des questions précédentes.

À la question 13, on faisait une intégration par parties sur une intégrale généralisée. On avait montré avant que l'intégrale convergeait, donc montrer que la partie intégrée tendait vers zéro permettait de justifier l'intégration par parties et de conclure.

La question 14, purement technique, n'a pas posé de problème à ceux qui ont eu le temps de l'aborder.

La question suivante consistait, comme aux questions 9 et 10, à inverser une somme et une intégrale, mais cette fois on pouvait appliquer directement un théorème du cours puisqu'on intégrait sur un segment une série normalement convergente. La question a été peu abordée, probablement par manque de temps, mais ceux qui l'ont tentée l'ont en général réussie.

La question 16 se traite sans grande difficulté en utilisant la question précédente, la question 17 est classique, elle demande tout de même une bonne maîtrise de la manipulation de la formule du binôme de Newton. Le résultat de la question étant donné, certains candidats l'ont obtenu avec des calculs faux.

Il suffisait ensuite de compiler les résultats des questions 13 et 17 pour traiter la question 18.

Les questions de 14 à 18 ont été en fait peu abordées, les candidats étant attirés par la quatrième partie peut-être parce qu'elle portait sur les probabilités.

La question 19 est une des mieux réussies du sujet, aussi bien pour les calculs que pour leur justification.

Sous réserve de ne pas oublier d'arguments, la question suivante ne posait pas de gros problèmes et a été bien réussie, de même que la suivante. On peut noter de bonnes performances sur le raisonnement par récurrence, le très classique oubli de l'initialisation était assez rare.

À la question 22, beaucoup de candidats ont été déroutés par le préliminaire pourtant assez simple, mais l'ont utilisé correctement pour terminer la question.

On revenait ensuite sur des intégrales, avec une convergence et un changement de variable, il n'y avait rien de compliqué, mais beaucoup ont manqué de temps pour en arriver là.

À la question suivante, on faisait le lien entre les probabilités et l'intégrale de Dirichlet généralisée et la question 25 se limitait à l'utilisation de la question 18.

Nous avons vu sur certaines copies la question 25 traitée en sautant toutes les questions à partir de la question 13 ; on voit là l'excellent travail de préparation à l'exploitation optimale d'un sujet qui est fait dans les classes préparatoires.