Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \longmapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall\, x \in I,\ f_0(x) = 1$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n\,!}\,(x\,\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.

2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.

3. Étudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\,\ln(t)$.

4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.

5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I.

6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

6.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.

8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on a : $J = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 2

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\,|\,)$ et la norme $\|\ \|$.

On note id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose non inversible et non nul.

1.1. Citer le **théorème spectral**.

1.2. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

1.3. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j\in[\![0,k]\!]}$ avec :

$$k \geqslant 1,\ \ \lambda_0 = 0\ \text{ et }\ 0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|.$$

Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

1.4. Montrer que $\mathrm{id}_E = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

1.5. Prouver que l'on a pour tout couple (i, j) de $[\![0, k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

1.6. Démontrer que : $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \, p_j$.

1.7. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé

2.1. Montrer que l'on a : $f \circ f^I = p$.
En déduire que : $\forall\, (x, y) \in E^2, \Big(f(x) = p(y) \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\Big)$.

2.2. Soit y un vecteur de E.
Montrer que l'on a : $\forall\, x \in E, \left(\|f(x) - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\right)$.

3. Application à un exemple

On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique, non nul et non inversible.

3.2. Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A.

3.3. En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
On note pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathscr{B}$.

3.4. Justifier que l'on peut écrire A sous la forme : $A = 2\, M_1 + 4\, M_2$.

3.5. Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.

3.6. Démontrer que : $\forall\, x \in E$, $p_2(x) = (x|v_2)\, v_2$.

3.7. Déterminer la matrice M_2.

4. En déduire la matrice associée à f^I relativement à la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2 - t}$,
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2 - t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.
2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.
3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.
5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(S = n)$.
6. **Calculs d'espérances et de variances**
   - **6.1.** Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   - **6.2.** En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
   - **6.3.** Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.
   - **6.4.** En déduire la variance de la variable aléatoire Y.
   - **6.5.** Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \big(1, X-1, X(X-1), ..., X^{n-1}(X-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ**
   - **2.1.** Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
   - **2.2.** Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$
   - **3.1.** Justifier que l'application ψ est linéaire.
   - **3.2.** Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, ..., X^{n+1})$.
   - **3.3.** Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.
   - **3.4.** Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   - **4.1.** Donner la dimension de $\mathcal{H}$.
   - **4.2.** Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$.
     Démontrer que la famille $(\psi_0, ..., \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.
   - **4.3.** Déterminer les composantes de φ dans cette base.

FIN

CORRECTION

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \longmapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall\, x \in I,\ f_0(x) = 1$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n\,!}\,(x\,\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$

1. Le seul problème est en zéro et on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\,\ln(x) = 0$.

2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.

Soit $x \in I$.

• Si $x = 0$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(0) = 1$

• Si $x \in]0,1]$, on reconnaît le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \exp(u)$ appliquée à $u = -x\,\ln(x)$, qui est valable pour tout $x > 0$.

Et finalement : la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge vers la fonction f.

3. Par produit, la fonction φ est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $t \in]0,1]$, $\varphi'(t) = 1 + \ln(t)$. D'où :

- La fonction φ est décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

- Elle est croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 1\right]$ avec $\varphi(1) = 0$.

4. • $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\varphi(t)}{t} = -\infty$ et il y a au point O une tangente verticale.

• $\varphi'(1) = 1$ et au point $(1,0)$, la tangente est parallèle à la première bissectrice.

5. Pour tout entier naturel n et tout $t \in I$, $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n\,\varphi^n(t)}{n\,!}$.

On a donc pour tout entier naturel n : $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\|\varphi\|_\infty^n}{n\,!} = \dfrac{(\mathrm{e}^{-1})^n}{n\,!}$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\|\varphi\|_\infty^n}{n\,!}$ étant convergente (série exponentielle), la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I

6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

6.1. Pour tout réel x, la fonction $h : t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a :

• $h(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$,

• $h(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $\displaystyle\int_0 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1 - x < 1$, c'est-à-dire $x > 0$.

On conclut : L'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par une intégration par parties, $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$. Cette intégration par parties est justifiée car la limite en $+\infty$ de $t^n\mathrm{e}^{-t}$ existe et que l'on manipule des fonctions intégrables.

Sachant que $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$, on obtient par récurrence sur n : $\Gamma(n+1) = n\,!$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$, on pose donc, comme l'indique l'énoncé : $u = -\ln(t)$.

La fonction $t \mapsto -\ln(t)$ réalise une bijection de classe C^1 de $]0, 1[$ sur $]0, +\infty[$ et $J_n = \dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n\,\mathrm{e}^{-(n+1)u}\,\mathrm{d}u$.

Le changement de variable affine $v = (n+1)u$ donne alors $J_n = \dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\,v^n\,\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$ et donc, $J_n = \dfrac{1}{n\,!}\cdot\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}\cdot\Gamma(n+1) = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

8. D'après la question **5.**, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I. D'après le théorème d'intégration d'une limite uniforme sur un segment, on a :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 f_0(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$$

On peut aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme. En effet :

• Les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$, et donc intégrables.

• La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers la fonction f qui est continue sur I.

• $\displaystyle\int_I |f_n| = \int_I f_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ converge puisque $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi, le théorème d'intégration terme à terme s'applique.

9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^n} - J\right| = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$.

Or, on a : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^n} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{N^n} = \frac{1}{N^{N+1}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^N(N-1)}$.

Mais $7 \times 8^8 > 10^8$, donc : pour $N \geqslant 8$, on a : $\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^n} - J \right| < 10^{-8}$.

Exercice 2.

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\,|\,)$ et la norme $\|\,\|$.
On note id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose non inversible et non nul.

1.1. Tout endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien admet une base orhonormale de vecteurs propres.

1.2. Comme f est non inversible et E est de dimension finie, f n'est pas injective. Donc 0 est valeur propre.

Supposons par l'absurde que 0 soit la seule valeur propre de f : comme f est diagonalisable (théorème spectral) sa matrice dans une base de vecteurs propres serait nulle et par suite, f serait nulle, ce qui n'est pas.

Ainsi, f possède au moins une valeur propre non nulle.

1.3. Soient $x \in \mathrm{Ker}(f)$: $f(x) = 0$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists\, t \in E$ tel que $y = f(t)$,.

Alors : $(x|y) = (x|f(t)) = (f(x)|t) = 0$ ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux et donc, en somme directe.

Le Théorème du rang prouve alors qu'ils sont supplémentaires dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j \in [\![0,k]\!]}$ avec :

$$k \geqslant 1,\ \ \lambda_0 = 0 \ \text{ et } \ 0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|.$$

Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

1.4. D'après le Théorème Spectral, E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f :

$$E = \bigoplus_{j=0}^{k} E_j.$$

Ainsi :

$\forall\, x \in E$, il existe de façon unique des $x_j \in E_j$, $j \in [\![0,k]\!]$ orthogonaux deux à deux tels que $x = \sum_{j=0}^{k} x_j$, ce qui signifie que $\mathrm{id}_E = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

1.5. Soient $x \in E$, $(i, j) \in [\![0, k]\!]^2$, $i \neq j$.

Alors : $p_i(p_j(x)) = p_i(x_j) = 0$ puisque les sous-espaces E_j sont orthogonaux.

Ainsi : $\forall\,(i, j) \in [\![0, k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

1.6. On sait que (question **1.1.4.**) : $\mathrm{id}_E = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j$.

En composant par f, on obtient : $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (f \circ p_j)$.

Or pour tout x de E, $(f \circ p_j)(x) = f(x_j) = \lambda_j\, x_j = \lambda_j\, p_j(x)$, ce qui prouve que $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \lambda_j\, p_j$.

1.7. Comme

- $\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$ (question **1.1.3.**),
- $\mathrm{Ker}(f) = E_0$,
- $(E_0)^{\perp} = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} E_j$ (Théorème spectral),

on obtient que $\mathrm{Im}(f) = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k} E_j$ et par suite, $p = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\, p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé.

2.1. On a : $f \circ f^I = \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \lambda_j\, p_j\right) \circ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i}\, p_i\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}\, (p_j \circ p_i) = \sum_{j=1}^{k} p_j = p$

Soient x et y dans E.

On a : $f(x) = p(y) \iff f(x) = f\left(f^I(y)\right) \iff f\left(x - f^I(y)\right) = 0 \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)$

Ainsi : $$\forall\,(x, y) \in E^2, \left(f(x) = p(y) \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\right).$$

2.2. Soit x et y deux vecteurs de E.

On a :

$\|f(x) - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff \|f(x) - y\| = \operatorname*{Inf}_{u \in \mathrm{Im}(f)} \|u - y\| \iff f(x) = p(y)$ puisque p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$

Donc, $\|f(x) - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)$ d'après la question précédente.

Finalement :

$$\forall\, x \in E,\ \left(\|f(x) - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\right)$$

3. Application à un exemple.

On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.1. • L'endomorphisme f est symétrique puisque sa matrice est symétrique dans une base orthonormale.

• f est non nul puisque $A \neq O_4$.

• Dans la matrice A, la colonne C_4 est l'opposée de la colonne C_2 et donc, $\text{rg}(A) \leqslant 3$ et f n'est pas inversible.

3.2. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable. Ainsi, 2 est valeur propre double de A si et seulement si $\dim(\text{Ker}(A - 2I_4)) = 2$.

On a : $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La recherche de $\text{Ker}(A - 2I_4)$ aboutit au système :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \quad ,$$

ce qui donne $\text{Ker}(A - 2I_a) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ qui est bien de dimension 2.

On pouvait aussi remarquer que les colonnes de $A - 2I_4$ vérifient : $C_3 = -C_1$, $C_4 = C_2$ et (C_1, C_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Il en résulte que $\text{rg}(A - 2I_4) = 2$ et donc que $\dim(\text{Ker}(A - 2I_4)) = 2$, ce qui prouve que 2 est valeur propre d'ordre 2 de A.

3.3. Faisons le bilan sur les valeurs propres de la matrice A :

• 0 est valeur propre,

• 2 est valeur propre d'ordre 2,

• A est diagonalisable puisque symétrique réelle.

Il manque donc une valeur propre. On la note λ.

En utilisant la trace de A, on peut écrire : $\text{tr}(A) = 8 = 0 + 4 + \lambda \Longrightarrow \lambda = 4$

Conclusion : 0 est valeur propre simple, 2 est valeur propre double et 4 est valeur propre simple.

On note pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathscr{B}$.

3.4. D'après la question **1.6.**, on peut écrire que $f = 0\,p_0 + 2\,p_1 + 4\,p_2$, ce qui donne en écriture matricielle : $A = 2\,M_1 + 4\,M_2$.

3.5. On a : $A - 4\,I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

La recherche de $E_2 = \mathrm{Ker}(A - 4I_4)$ aboutit au système :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 3y + t = 0 \\ y + 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $E_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$ où $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur de norme 1.

On pouvait aussi remarquer que les colonnes de $A - 4I_4$ vérifient $C_3 = C_1$ et facilement, la famille (C_1, C_2, C_4) est libre.

On en déduit que $\mathrm{rg}(A - 4\,I_4) = 3$ et donc, $\dim(E_2) = 1$.

De façon plus précise, $E_2 = \mathrm{Vect}(v_2)$ où $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.6. Soit $x \in E$.

On peut écrire : $x = (x|v_2)\,v_2 + (x - (x|v_2)\,v_2)$.

- le vecteur $(x|v_2)\,v_2$ appartient à E_2.
- $(x - (x|v_2)\,v_2) = (x|v_2) - (x|v_2)\,||v_2||^2 = 0$ puisque v_2 est normé.

Conclusion : $p_2(x) = (x|v_2)\,v_2$.

3.7. Pour écrire la matrice M_2 de p_2 dans la base $\mathscr{B}$, on détermine les images des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$:

$p_2(e_1) = \left(e_1 \middle| \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3)\right)\,(e_1 - e_3) = \dfrac{1}{2}(e_1 - e_3)$

$p_2(e_2) = 0$

$p_2(e_3) = \left(e_3 \middle| \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3)\right)\,(e_1 - e_3) = -\dfrac{1}{2}(e_1 - e_3)$

$p_2(e_4) = 0$

et par suite : $M_2 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. D'après la question 1.7., on a $f^I = \dfrac{1}{2}\,p_1 + \dfrac{1}{4}\,p_2$.

ce qui donne matriciellement en notant B la matrice de f^I dans la base $\mathscr{B}$: $B = \dfrac{1}{2}\,M_1 + \dfrac{1}{4}\,M_2$.

Or $M_1 = \dfrac{1}{2}\,A - 2\,M_2$ et donc, $B = \dfrac{1}{4}\,A - \dfrac{3}{4}\,M_2$,

ce qui donne : $B = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

Exercice 3.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour $|t| < 1$ on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$.
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$,

1. On peut écrire que : $\forall\, t \in]-1,1[,\ G_X(t) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1-\frac{t}{2}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{t}{2}\right)^n$ puisque $\dfrac{t}{2} \in \left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[\subset]-1,1[$

2. D'après le cours, le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$ est :

$$\frac{\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}-1).....(\frac{1}{2}-(n-1))}{n\,!}\,t^n = \frac{1(-1)(-3).....(-(2n-3))}{2^n\,n\,!}\,t^n = \frac{(-1)^{n-1}\,1.3.....(2n-3)}{2^n\,n\,!}\,t^n$$

3. Pour tout $t \in]-1,1[$, on peut écrire :

$$G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t} = 2 - \sqrt{2}\,\sqrt{1-\frac{t}{2}}.$$

On pose alors $u = \dfrac{t}{2}$: comme $|u| < 1$, on peut appliquer les résultats de la question précédente et :

$$\sqrt{1-u} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,1.3.....(2n-3)}{2^n\,n\,!}\left(-\frac{t}{2}\right)^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3.....(2n-3)}{2^{2n}\,n\,!}\,t^n$$

et finalement : $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1.3.....(2n-3)}{2^{2n}\,n\,!}\,t^n$

4. En utilisant les coefficients de $G_X(t)$ et $G_Y(t)$, on obtient :

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
- $\mathbb{P}(Y = 0) = 2 - \sqrt{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y = n) = \sqrt{2}\,\dfrac{1.3.....(2n-3)}{2^{2n}\,n\,!}$

5. Comme X et Y sont indépendantes, on a pour tout $t \in]-1,1[$: $G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t)$

Soit : $\forall\, t \in]-1,1[,\ G_{X+Y}(t) = \dfrac{2}{2-t} - \dfrac{1}{\sqrt{2-t}} = \dfrac{1}{1-\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^{-1/2}$.

D'après le cours, le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^{-1/2}$ est :

$$\frac{-\frac{1}{2}\,(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-(n-1))}{n\,!}\,u^n = \frac{(-1)(-3)...(-(2n-1))}{2^n\,n\,!}\,u^n = \frac{(-1)^n\,1.3.....(2n-1)}{2^n\,n\,!}\,u^n$$

$$= \frac{(-1)^n\,(2n)\,!}{2^n\,n\,!\,2.4.....2n}\,u^n = \frac{(-1)^n\,(2n)\,!}{2^{2n}\,(n\,!)^2}\,u^n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}u^n$$

Ainsi, en posant $u = \dfrac{t}{2}$ et en utilisant les développements connus du cours :

$$\forall\, t \in]-1,1[,\ G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\left(-\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{3n+1/2}}\binom{2n}{n}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^n$$

On en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X+Y=n) = \frac{1}{2^n}\left[1-\frac{1}{2^{2n+1/2}}\binom{2n}{n}\right]$$

Remarque : on pouvait aussi répondre à cette question en utilisant la formule $\mathbb{P}(X+Y=n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$, puis en utilisant les résultats de la question **4.**.

6. Calculs d'espérances et de variances

6.1. D'une part, la variable aléatoire $X+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, d'après la question **4.**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X+1=n) = \mathbb{P}(X=n-1) = \dfrac{1}{2^n}$. Ainsi, la variable aléatoire $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

6.2. Il en résulte que $\mathbb{E}(X+1) = 2$ et $\mathbb{V}(X+1) = 2$. Donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X+1)-1 = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 2$.

6.3. D'après le cours, $\mathbb{E}(Y) = \lim\limits_{t\to 1^-} G_Y'(t) = \dfrac{1}{2}$ puisque $G_Y'(t) = \dfrac{1}{2\,\sqrt{2-t}}$

De $G_Y''(t) = \dfrac{1}{4(2-t)^{3/2}}$, on tire $\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \lim\limits_{t\to 1^-} G_Y''(t) = \dfrac{1}{4}$.

6.4. Puisque $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \mathbb{E}(Y(Y-1)) + \mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2$ on a : $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{2}$.

6.5. • Par linéarité, $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \dfrac{3}{2}$

• Comme X et Y sont indépendantes, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \dfrac{5}{2}$.

Exercice 4.

Dans tout l'exercice n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. La famille $\mathcal{B}$ est contituée de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Généralités sur φ

2.1. L'application φ est une application linéaire puisque l'intégrale est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2. Comme φ n'est pas nulle, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et d'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, donc de dimension n.

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.1. La linéarité de l'application ψ découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale.

3.2. Notons $C = (P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $P_k = X^k$.

D'après le cours, on sait que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(C))$.

Or pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\psi(P_k) = \displaystyle\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\,P_{k+1}$

On en déduit que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, ..., X^{n+1})$.

3.3. On remarque tout d'abord que pour tout polynôme P, 0 est racine de $\psi(P)$ et $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a immédiatement : $P \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) \iff$ 1 est racine de $\psi(P)$.

Ainsi, si $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$, alors 1 est racine de $\psi(P)$, et donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Réciproquement, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors 1 et 0 sont racines de $\psi(P)$, donc $\psi(P)$ est divisible par $X(X-1)$.

Comme $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.

Conclusion : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.

3.4. D'après la question précédente :

$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1)) \iff \exists (a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ telle que $\psi(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k\,X^k(X-1)$

Ainsi, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $P = (\psi(P))' = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k\,X^{k-1}((k+1)\,X-k) \in \mathrm{Vect}\Big(X^{k-1}((k+1)\,X-k)\Big)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

Comme $\Big(X^{k-1}((k+1)\,X-k)\Big)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est échelonnée en degré, c'est une famille libre, et comme $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n$, on en déduit que c'est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

4.1. D'après le cours, $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = n + 1$.

4.2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on appelle ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$.

On remarque que pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\psi_k(P_k) = 1$ et $\psi_k(P_j) = 0$ pour tout $j \neq k$.

Soient alors $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une famille de scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\, \psi_k = 0$ (forme linéaire nulle).

On applique à P_j, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et il reste $b_j = 0$, ce qui prouve que la famille $(\psi_0, ..., \psi_n)$ est libre.

Comme elle est constituée de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$, c'est une base de $\mathcal{H}$.

4.3. D'après la question précédente, il existe une unique famille $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de scalaires tels que : $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, \psi_k$.

Pour déterminer les a_k, il suffit d'évaluer en P_j et on obtient : $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\, \psi_k$.

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

- Une première remarque importante : les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur), **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que "il est trivial que ", " par une récurrence immédiate ", etc... rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

- Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MP.

Nous avons été déçus par le trop grand nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, d'analyse et qui espèrent venir à bout du sujet grâce à des recettes toutes faites.

Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont très rapidement abandonnés.

- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments bidons ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

• Commentaires exercice par exercice

Exercice 1

1. Le problème en 0 est souvent mal identifié ou mal réglé : la continuité en 0 n'entraîne pas la continuité sur $[0,1]$, puisque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, on peut prolonger f par continuité en 0, etc...

2. Beaucoup de candidats voient ici une série alternée en affirmant que « $x\ln(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$ », d'autres s'intéressent à la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de celle de la série de fonctions.

Les croissances comparées ne sont pas maîtrisées par un trop grand nombre de candidats.

3. Question simple, pas toujours proprement traitée. L'énoncé de la définition de φ en tant que fonction continue est rarement bien compris.

4. Souvent, la représentation graphique est fausse, il semble que les étudiants ne sachent plus effectuer correctement le tracé d'une courbe représentative d'une fonction avec ses tangentes : l'interprétation de $\lim_{t\to 0} \varphi'(t) = -\infty$ est souvent erronée.

5. De nombreuses confusions entre convergence normale et uniforme. Le lien entre la question **3.**

et cette question n'est pas toujours clairement mentionné. On voit trop souvent des normes infinies nulles ou négatives...

6. Cette question est très classique, nous regrettons qu'elle soit souvent mal rédigée tant pour l'ensemble de définition de la fonction Γ que pour le calcul de $\Gamma(n+1)$: oubli que la continuité de la fonction à intégrer est un préalable à tout travail ultérieur, problème pour étudier la convergence en 0, théorème d'intégration par parties sur un intervalle très peu cité correctement. Trop de candidats obtiennent que $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ et s'arrêtent là.

7. Les hypothèses du changement de variable sont ignorées et le calcul est rarement mené à son terme. Il est dommage que les étudiants négligent une telle question qui, avec des calculs menés correctement, devrait donner à tous les points impartis.

8. Les étudiants parlent du théorème d'intégration terme à terme, alors qu'il y en a deux dans le cours : au correcteur de choisir celui qui s'applique...et pourtant, l'énoncé avait bien préparé l'utilisation de celui du cours sur les séries de fonctions continues sur un segment.

9. Question presque jamais traitée...

Exercice 2

1.

1.1. Ce théorème très classique est trop souvent mal cité, avec des hypothèses incomplètes ou farfelues. Là encore, il est dommage que plus de la moitié des candidats n'ont qu'une vague idée de ce théorème.

1.2. Question rarement bien traitée : nous avons trop souvent vu : $f \in \mathscr{L}(E)$ et donc $f(0) = 0$ et par suite, 0 est valeur propre de f.

1.3. Confusion entre "être en somme directe" et "être supplémentaire". L'implication "orthogonaux $\Longrightarrow$ somme directe" ne semble pas automatique.

1.4. et **1.5.** Certains pensent traiter la question sans jamais évoquer que les espaces propres sont orthogonaux entre eux. Il y a beaucoup de confusion liée au fait que k est différent de n : trop de candidats supposent implicitement que f possède n valeurs propres simples.

1.6 et **1.7** Questions souvent rédigées de façon peu rigoureuse.

2.

2.1. Les candidats doivent réfléchir à ce qu'ils écrivent : par exemple, $f(p_i)$ n'a aucun sens...

Sinon, l'équivalence est en général bien traitée.

2.2. Le théorème de projection orthogonale ou le fait que la distance n'est atteinte qu'en un unique point ne sont que très rarement évoqués. Le mot "théorème" serait-il tabou ?

3.

3.1. Trop de candidats oublient de mentionner que leurs arguments sont valables uniquement parce que l'on se trouve dans une base orthonormale.

3.2. et **3.3.** Pour ceux qui ont calculé le polynôme caractéristique de la matrice A rappelons que celui-ci est de degré n lorsque A est de taille $n \times n$ et que tous les calculs pour l'obtenir doivent figurer sur la copie.

3.4. Pas de problème.

3.5. Beaucoup d'étudiants ont confondus E_2 et E_1 : l'énoncé disait pourtant clairement que l'on notait E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.

3.6. 3.7. et **4.** Questions peu traitées.

Exercice 3

1. Les correcteurs souhaitaient un DSE de $t \mapsto G_X(t)$ pour $t \in ...$: ils ont été très décus.

Comme dit un correcteur : le fait qu'une formule nécessite des hypothèses semble un mystère.

2. C'est du cours et en général su.

3. Pas de problème.

4. L'unicité n'est que très rarement justifiée (ou "par identification" !) et certains candidats trouvent même pour la variable aléatoire Y des probabilités négatives !

5. Question peu traitée, sans penser à G_S.

6. La loi géométrique est en général trouvée mais la variance reste méconnue. La encore des variances négatives sont obtenues sans remarque des candidats.

Exercice 4

1. De trop nombreux candidats n'arrivent pas à déterminer le nombre d'éléments de la famille $\mathscr{B}$ et ne connaissent pas la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.

2.1. Sans problème.

2.2. Souvent la dimension du noyau est fausse. Certains candidats parlent d'hyperplan en oubliant que la forme linéaire doit être non nulle.

3.

3.1. Rédaction souvent très approximative.

3.2. On remarque que la propriété $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), ..., \varphi(X^n))$ est très peu connue de la majorité des candidats.

3.3. et **3.4.** très peu traités et souvent avec un grand manque de rigueur.

4.

4.1. Même si la réponse à cette question est donnée dans la question suivante, le candidat se doit de donner une justification de tout ce qu'il écrit sur sa copie.

4.2. et **4.3.** Questions rarement traitées.