CONCOURS COMMUN INP 2020

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 FILIÈRE MP

MUSTAPHA LAAMOUM

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE 1.

Q. 1
- A est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée : ils existent une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P\ D\ {}^tP$.
- Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1 \\ X-4 & X-2 & -1 \\ X-4 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

Donc $\chi_A(X) = (X-4)(X-1)^2$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1,4\}$.
- Base orthonormée de vecteurs propres :

On a $E_4(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On sait que $E_1(A) = E_4(A)^{\perp}$ donc $\dim E_1(A) = 2$, soit (V_2, V_3) une base orthonormée de $E_1(A)$, on prend $V_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, V_3 est orthogonal à V_2 et à V_3 donc $V_1 = V_2 \wedge V_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- $A = P\ D\ {}^tP$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$,

et $P^{-1} = {}^tP$

Q. 2 Soit $B = P\ \Delta\ {}^tP$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Q. 3 On a par récurrence $A^n = P\ D^n\ {}^tP$ avec $D = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve $P\ D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}2^{2n}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \dfrac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}2^{2n}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}2^{2n}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}2^{2n} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}2^{2n} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3}2^{2n} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}2^{2n} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3}2^{2n} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}2^{2n} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}2^{2n} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3}2^{2n} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3}2^{2n} + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Q. 4

- A est diagonalisable donc son polynôme minimal, π_A , est scindé à racines simples , les racines de π_A sont les valeurs propres de A donc $\pi_A(X) = (X-1)(X-4)$.
- Division euclidienne de X^n par $\pi_A(X)$: $\exists\ Q$, $R \in \mathbb{R}[X]$, vérifiant : $X^n = Q(X)\pi_A(X) + R(X)$ avec $\deg(\mathbb{R}) < 2$ ($R(X) = aX + b$) .

  On a alors $A^n = Q(A)\pi_A(A) + R(A) = R(A)$, $4^n = R(4)$ et $1 = R(1)$, ce qui donne :
  $\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ 4a+b=4^n \end{array}\right.$, ce qui donne $a = \dfrac{4^n-1}{3}$ et $b = \dfrac{4-4^n}{3}$ et $A^n = \dfrac{4^n-1}{3}A + \dfrac{4-4^n}{3}I_3$

EXERCICE 2.

Q. 5 $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé : soit la suite de matrice $M_k = \dfrac{1}{k}I_n$ on a $M_k \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M_k \underset{k\to+\infty}{\to} O_n$, $O_n \notin GL_n(\mathbb{R})$.

Q. 6 On a $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \det(M) \neq 0\}$, soit $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\varphi(M) = \det(M)$, on a φ continue (car c'est une fonction polynomiale des coefficients de M) et $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \varphi(M) \in \mathbb{R}^*\} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$. De plus $\mathbb{R}^*$ est le complémentairede $\{0\}$ qui est un fermé donc $\mathbb{R}^*$ est un ouvert par suite $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue .

Q. 7 On a $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement $\lambda \notin Sp_{\mathbb{R}}(M)$.

- Si $Sp_{\mathbb{R}}(M) = \varnothing$ ou $Sp_{\mathbb{R}}(M) = \{0\}$ on peut prendre $\rho = 1$.

  Si $Sp_{\mathbb{R}}(M) \neq \varnothing$ ou $Sp_{\mathbb{R}}(M) \neq \{0\}$ soit $\rho = \min\{|\lambda|\,/\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(M)\ , \lambda \neq 0\}$ .On a $\rho > 0$ car $Sp_{\mathbb{R}}(M)$ est fini. Finalement $\forall\lambda \in]0,\rho[$, $\lambda \notin Sp_{\mathbb{R}}(M)$ donc $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $k > N \Rightarrow \dfrac{1}{k} < \rho$ (car $\dfrac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$) , donc si $k > N$ alors $M - \dfrac{1}{k}I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M - \dfrac{1}{k}I_n \underset{k\to+\infty}{\to} M$ d'où $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Q. 8 Soit A, B dans $M_n(\mathbb{R})$.

- Si $B \in GL_n(\mathbb{R})$:
  alors $A.B = B^{-1}(B.A).B$ donc $A.B$ est semblable à $B.A$ donc $\chi_{A.B} = \chi_{B.A}$. On a le même résultat si $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
- Si $A \notin GL_n(\mathbb{R})$ et $B \notin GL_n(\mathbb{R})$:

  Soit $\rho > 0$ tel que $\forall t \in]0,\rho[$, $B - tI_n \in GL_n(\mathbb{R})$. Donc si $t \in]0,\rho[$ alors $\chi_{A.(B-tI_n)} = \chi_{(B-tI_n).A}$.

  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on a donc $\det(\lambda I_n - A.(B - tI_n)) = \det(\lambda I_n - (B - tI_n).A)$ qui s'écrit :

  $\det(\lambda I_n - A.B - tA) = \det(\lambda I_n - BA - tA)$, l'application $M \to \det(M)$ est continue , on fait tendre t vers 0 on obtient alors $\det(\lambda I_n - A.B) = \det(\lambda I_n - BA)$. On a alors $\chi_{A.B}(\lambda) = \chi_{B.A}(\lambda)\ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$, d'où $\chi_{A.B} = \chi_{B.A}$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a $A.B = O_2$ et $B.A = B$ donc $\pi_{A.B}(X) = X$, $\pi_{B.A}(X) = X^2$.

Q. 9 On a $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(M) = \det(M)$ est continue et $\varphi(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$qui n'est pas connexe par arcs car les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

PROBLEME

Partie I - Exemples, propriétés

Q. 10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ soit $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ on a $u(x) = A.x = \begin{pmatrix} a+2b \\ -2a+b \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= (a+2b)^2 + (-2a+b)^2 \\ &= 5(a^2+b^2) \\ &= 5\|x\|^2 \end{aligned}$$

donc u est une similitude de rapport $\sqrt{5}$.

Q. 11 On a $M'(4,-3)$, $N'(6,-7)$, $P'(8,-6)$

On remarque les triangles MNP et $M'N'P'$ sont rectangle en N et N', $<\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}> = <\overrightarrow{N'M'}, \overrightarrow{N'P'}> = 0$

Donc $S(MNP) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{NM}\right\|\left\|\overrightarrow{NP}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{1} = 1$ et $S(M'N'P') = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{N'M'}\right\|\left\|\overrightarrow{N'P'}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+16}\sqrt{4+1} = 5.$

On a $S(M'N'P') = 5.S(MNP)$.

Q. 12
- Soit $u \in Sim(E)$ de rapport $k > 0$, et $x \in \ker(u)$, on a $\|u(x)\| = k\|x\| = 0$, donc $\ker(u) = \{0\}$, u est un endomorphisme bijectif donc il est bijectif.
  De plus on a $u^{-1} \in Sim(E)$ de rapport $\frac{1}{k}$.
- On a $Sim(E) \subset GL(E)$, $(GL(E), o)$ le groupe linéaire , $Sim(E) \neq \varnothing$ car $id_E \in Sim(E)$.
  Prenons u et v deux éléments de $Sim(E)$ de rapport$k_u > 0$ et $k_v > 0$, pour $x \in E$ on a :

$$\begin{aligned} \left\|uov^{-1}(x)\right\| &= \left\|u(v^{-1}(x))\right\| \\ &= k_u\left\|v^{-1}(x)\right\| \\ &= \frac{k_u}{k_v}\|x\| \end{aligned}$$

donc $uov^{-1} \in Sim(E)$, qui est donc un sous groupe de $GL(E)$.

Q. 13
- $u \in \mathcal{L}(E)$, $B = (e_1, .., e_n)$ b.o.n de E , si $x = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} y_i e_i$ alors
  $< x, y > = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} x_i y_i = {}^tX.Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = mat_{\mathcal{B}}(y)$.
  Posons $M = mat_{\mathcal{B}}(u)$.
- Si ${}^tM.M = I_n$ et $x \in E$ on a : $mat_{\mathcal{B}}(u(x)) = M.X$ donc

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= < u(x), u(x) > \\ &= {}^t(M.X).M.X \\ &= {}^tX.{}^tM.M.X \\ &= {}^tXX \\ &= < x, x > \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

Donc $u \in O(E)$.

- Si $u \in O(E)$.alors pour tout $x \in E$ on a $\|u(x)\| = \|x\|$ donc ${}^tX.{}^tM.M.X = {}^tXX$, on obtient alors ${}^tX.({}^tM.M - I_n).X = 0 \; \forall X \in \mathbb{R}^n$.

  On remarque que la matrice $A = {}^tM.M - I_n$ est symertique et réelle donc diagonalisable , si λ est une valeur propre de A et V un vecteur propre associé à λ alors :

$${}^tV.A.V = \lambda {}^tVV = 0$$

  $V \neq 0$ donc $\lambda = 0$, ce qui donne $Sp(A) = \{0\}$ donc $A = 0$,d'où ${}^tM.M = I_n$.

- Si $u \in Sim(E)$.de rapport k, alors pour tout $x \in E$ on a $\|u(x)\| = k\|x\|$ soit $\left\|\frac{1}{k}u(x)\right\| = \|x\|$ donc $\frac{1}{k}u \in O(E)$, on en déduit :

$$u \in Sim(E) \text{ de rapport } k > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k}u \in O(E)$$

  Donc $u \in Sim(E)$ de rapport $k > 0$ si et seulement si $\exists B$ b.o.n de E , $M = mat_{\mathcal{B}}(u)$ vérifie ${}^tM.M = k^2 I_n$.

Q. 14
- On vérifie que ${}^tA.A = 9I_3$, donc A est la matrice dans la base canonique de R^3 d'une similitude u de rapport 3.
- La matrice de la similitude u^{-1} est $\frac{1}{9}{}^tA$.
- Soit f de $O(E), u \in Sim(E)$ de raport 3 donc $u^{-1} \in Sim(E)$ de rapport $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}u \in O(E)$,$3u^{-1} \in O(E)$ par suite $u^{-1} \circ f \circ u = (3u^{-1}) \circ f \circ (\frac{1}{3}u) \in O(E)$ car $(O(E), \circ)$ est un groupe.

Q. 15
- $\Rightarrow$)Soit $u \in Sim(E)$ de rapport $k > 0$ et $S(0, r)$ la sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$.

  Soit $x \in S(0, r)$ on a $\|u(x)\| = k\|x\| = kr$ donc $u(x) \in S(0, kr)$ et $u(S(0, r)) \subset S(0, kr)$ (1)

  On a de même $u^{-1}(S(0, r)) \subset S(0, \frac{r}{k})$, donc $u^{-1}(S(0, kr)) \subset S(0, r)$ ce qui donne :
  $S(0, kr) = u(u^{-1}(S(0, kr))) \subset u(S(0, r))$ (2).
  Finalement de (1) et (2) on a :

$$u \in Sim(E) \;\Rightarrow u(\mathcal{S}(0, r)) = \mathcal{S}(0, kr)$$

- $\Leftarrow$) Supposons que $u \in L(E)$ transforme toute sphère de E en une sphère de E , donc $\exists r > 0$ tel que $u(S(0, 1)) = S(0, r)$.

  Soit $x \in E$, $x \neq 0$ posons $y = \frac{x}{\|x\|}$, on a $y \in S(0, 1)$ donc $u(y) \in S(0, r)$, c.a.d $\|u(y)\| = r$ ce qui donne $\|u(x)\| = r\|x\|$, cette relation est verifiée pour $x = 0$,donc $u \in Sim(E)$.

Partie II - Assertions équivalentes

Q. 16
- $\Rightarrow$) $u \in Sim(E)$ de rapport $k > 0 \Rightarrow \frac{1}{k}u \in O(E)$ donc $u = (kid_E)\, o \left(\frac{1}{k}u\right)$.
- $\Leftarrow$) Si $u = (\alpha id_E)\, o\, (v)$ et $v \in O(E)$ $\alpha \neq 0$,alors $\|u(x)\| = |\alpha|\,\|v(x)\| = |\alpha|\,\|x\|$ donc $u \in Sim(E)$.

Q. 17
- On a ${}^tAA = 5I_2$, A est la matrice d'une similitude de rapport $\sqrt{5}$, on ecrit $A = \sqrt{5}I_2.\frac{\sqrt{5}}{5}A$ avec $\frac{\sqrt{5}}{5}A \in O_2(\mathbb{R})$.

On a $det(\frac{\sqrt{5}}{5}A) = 1$ donc $\frac{\sqrt{5}}{5}A$ est la matrice d'une rotation .

Q. 18
- On a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2$ donc $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x \mid y\rangle$.

- $\Rightarrow$) u est une similitude de rapport k , donc pour $(x,y) \in E^2$

$$\begin{aligned}
\langle u(x) \mid u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) \\
&= \frac{k}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\
&= k^2 \ \langle x \mid y\rangle
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) On a pour $(x,y) \in E^2$ $\langle u(x) \mid u(y)\rangle \ = k^2 \ \langle x \mid y\rangle$, en particulier pour $x = y$ ce qui donne u est une similitude de rapport k.

Q. 19

- Si $\langle x \mid y\rangle = 0$ et $\langle u(x) \mid u(y)\rangle \ = k^2 \ \langle x \mid y\rangle$ donc $\langle u(x) \mid u(y)\rangle \ = 0$.
- Soit u un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
  Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on a $\langle e_i + e_j \mid e_i - e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \langle e_i \mid e_j\rangle \ + \langle e_j \mid e_i\rangle - \|e_j\|^2 = 0$.
  Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $\langle e_i + e_j \mid e_i - e_j\rangle = 0$ donc $\langle u(\ e_i + e_j) \mid u(e_i - e_j\ )\rangle = 0$, ce qui donne
  $\|u(e_i)\|^2 - \langle u(e_i), u(e_j)\rangle + \langle u(e_j), u(e_i)\rangle - \|e_j\|^2 = 0$ d'où $\|u\,(e_j)\| = \|u\,(e_i)\|$.
- Soit k la valeur commune prise par tous les $\|u\,(e_i)\|$ .Pour $i \in [[1,n]]\,, \|u\,(e_i)\| = k$ et $\|e_i\| = 1$ donc $\|u\,(e_i)\| = k\,\|e_i\|$.
  Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ donc $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ et

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i), \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \langle u(e_i), u(e_j)\rangle
\end{aligned}$$

si $i \neq j$ alors $\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = 0$ donc

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|u(e_i)\|^2 \\
&= k^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= k^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ce qui démontrer que u est une similitude de rapport k .

Q. 20

- Soit $u : E \to E$ et pour tout $(x,y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y)\rangle = k^2 \langle x \mid y\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle u(\alpha x + \beta y) - \alpha u(x) - \beta u(y) u(z)\rangle &= \langle u(\alpha x + \beta y) \mid u(z)\rangle - \alpha \langle u(x) \mid u(z)\rangle - \beta \langle u(y) \mid u(z)\rangle \\
&= \langle \alpha x + \beta y \mid z\rangle - \alpha \langle x \mid z\rangle - \beta \langle y \mid z\rangle
\end{aligned}$$

donc c'est vrai pour $z = \alpha x + \beta y$, $z = x$ et $z = y$ ce qui donne $\|u(\alpha x + \beta y) - \alpha u(x) - \beta u(y)\| = 0$ d'où $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$ et $u \in L(E)$.
- $u \in L(E)$ et $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x) \mid u(y)\rangle = k^2 \langle x \mid y\rangle$ donc $u \in Sim(E)$ d'apres Q18.