CCINP 2023

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE – FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES 1

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

EXERCICE I

Q1.
- N est une fonction à valeurs réelles (et positives mais c'est aussi une conséquence de ce qui suit).
- **Homogénéité** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

donc, en passant au max, $N(\lambda A) = |\lambda|\, N(A)$.
- **Inégalité triangulaire** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(|a_{i,j}| + |b_{i,j}|\right) = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant N(A) + N(B)$$

donc, en passant au max, $N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$.
- **Séparation** Si $N(A) = 0$, alors, les termes étant tous positifs, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$, donc pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,j}| = 0 = a_{i,j}$ et $A = 0_n$.

Donc $\boxed{N \text{ est bien une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

Q2. Soit $X \in S$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $i \in [\![1, n]\!]$.

$$|[AX]_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\, \|X\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant N(A)$$

donc, en passant au maximum, $\boxed{\|AX\|_\infty \leqslant N(A).}$

Donc $\{\|AX\|_\infty\,,\ X \in S\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par $N(A)$, d'où $\boxed{\text{l'existence } \sup_{X \in S} \|AX\|_\infty.}$

Q3. Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X = 0_{n,1}$ et $\boxed{\|AX\|_\infty = 0 \leqslant |||A|||\, \|X\|_\infty.}$

Soit $X \neq 0_{n,1}$ et $\dfrac{X}{\|X\|_\infty} \in S$, donc, par homogénéité et définition de $|||A|||$,

$$\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = \left\|A \frac{X}{\|X\|_\infty}\right\| \leqslant |||A|||$$

donc $\boxed{\|AX\|_\infty \leqslant |||A|||\;\|X\|_\infty.}$

Q4. Avec la question **Q2**, $N(A)$ majore $\{\|AX\|_\infty\,,\ X \in S\}$ donc $|||A||| \leqslant N(A)$.

Soit $i_0 \in [\![0,n]\!]$ tel que $N(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$ et $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $x_j = \mathrm{sgn}(a_{i_0,j})$ valant 1 si $a_{i_0,j} > 0$, -1 si $a_{i_0,j} < 0$ et 0 si $a_{i_0,j} = 0$.

Si $A = 0_n$, alors $N(A) = 0 = |||A|||$ car pour tout $X \in S$, $\|AX\|_\infty = 0$.

Sinon, $X_0 \in S$ et $\|AX_0\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|$ avec pour tout $i \neq i_0$,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant N(A)$$

et pour $i = i_0$,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = N(A)$$

donc $\|AX_0\|_\infty = N(A) \leqslant |||A|||$.

Finalement, $\boxed{N(A) = |||A|||.}$

Q5. On a $\boxed{|||A||| = N(A) = \max(3,8,6) = 8.}$

EXERCICE II

Q6. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et $g' : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$.

Donc g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il s'agit donc d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty, +\infty[\ni 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } \mathrm{e}^{-x} = x \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}.}$

Q7. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - \mathrm{e}^{-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 4y$$

Donc (x,y) est un point critique si et seulement si $x = 2y = \mathrm{e}^{-x}$.

En notant x_0 l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$, $\boxed{\text{le seul point critique de } f \text{ est } \left(x_0, \frac{x_0}{2}\right).}$

Q8. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \mathrm{e}^{-x}$$

$$\frac{\partial 2f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial 2f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

Donc la matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est $\begin{pmatrix} 2+\mathrm{e}^{-x_0} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ de déterminant $4\left(1+\mathrm{e}^{-x_0}\right) > 0$: ses deux valeurs propres sont de même signe donc $\boxed{f \text{ admet un extremum local en } (x_0, y_0).}$
De plus, la trace de cette matrice est positive, donc les valeurs propres le sont et

$$\boxed{\text{il s'agit d'un minimum local.}}$$

PROBLÈME

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. $f : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_*^+$ et

- $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha-1} = \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ avec $1-\alpha < 1$ donc, par comparaison de fonctions positives, la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ étant intégrable sur $]0,1]$, f l'est.
- $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x^{\alpha-2} = \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ avec $2-\alpha > 1$ donc, par comparaison de fonctions positives, la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, f l'est.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1] \text{ et sur } [1,+\infty[.}$

Q10. On effectue un changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ dans $J(\alpha)$:

$$J(\alpha) = -\int_1^0 \frac{y^{1-\alpha}}{1+1/y}\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_0^1 \frac{y^{-\alpha}}{y+1}\,\mathrm{d}y = I(1-\alpha)$$

Donc $\boxed{J(\alpha) = I(1-\alpha).}$

Q11. Soit $x \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^{\alpha-1}(-x)^n$ avec $|-x| \in]0,1[$. En reconnaissant une série géométrique convergente $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1}\frac{1}{1-(-x)} = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}.}$

Si la série de fonctions $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]0,1[$, alors la suite de fonction $(f_n)_n$ convergerait uniformément vers 0. Or $\|f_n\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0, ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]0,1[.}$$

Q12. On a $S_n(x) = x^{\alpha-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}(1-(-x)^{n+1})$.

H1 $\forall x \in]0,1[,\ S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ et f est continue par morceau sur $]0,1[$.

H2 $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[,\ |S_n(x)| \leq 2x^{\alpha-1}$ et la fonction $\phi : t \mapsto \dfrac{2}{x^{1-\alpha}}$ est continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ comme fonction de Riemann avec $1-\alpha < 1$, donc intégrable sur $]0,1[$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I(\alpha)$.

Comme $\displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{\alpha+k-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $\boxed{I(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}}$.

Q13. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $I(\alpha) + J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

par ailleurs :

$$\begin{aligned}
I(\alpha)+J(\alpha) &= I(\alpha)+I(1-\alpha) && \text{d'après } \textbf{Q10}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{-\alpha+1+k}
\end{aligned}$$

on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme $p = k+1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha+p}\\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{-\alpha+n}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(-2\alpha)}{-\alpha^2+n^2}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{I(\alpha)+J(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} + 2\alpha\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}}$.

Q14. En posant $x = 0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q15. Soit $x > 0$, on note $\psi_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$, fonction continue (et positive) sur $]0, +\infty[$.

- $\psi_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ donc par équivalent avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_0^1 \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- $t^2\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\boxed{\Gamma \text{ est bien définie sur }]0, +\infty[.}$

Q16. On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par $g : (x, t) \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}\, e^{-xt}$

H1 Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
H2 Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \mapsto g(x, t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.)
H3 Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|g(x, t)| \leq \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1} = f(t)$ et f est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **Q9**.

Donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{\text{la fonction } f_\alpha \text{ est définie et continue sur } [0, +\infty[.}$$

Q17. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$, on conserve la notation de g de la question précédente que l'on définit cette fois sur $[a, b]\times]0, +\infty[$

H1 $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **Q16** (comme elle est positive, le fait que l'intégrale soit définie équivaut au fait que la fonction soit intégrable).

H2 $\forall t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x} : (x, t) \mapsto -\dfrac{t^\alpha}{t+1}e^{-xt}$.

H3 $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.)

H3 $\forall (x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq \dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-at}$ et $t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$, équivalente en 0 à t^α avec $\alpha < 1$ et est un $\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable par comparaison à des fonctions de Riemann sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$.

On peut donc conclure par théorème de dérivation que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Ceci étant pour tout a et b de $]0, +\infty[$, on en conclut que $\boxed{f_\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[,}$ et

$$\boxed{f_\alpha'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t.}$$

Q18. On applique cette fois-ci le théorème de convergence dominée généralisée

Soit $x > 0$, on note $g_x : t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ définie sur $]0, +\infty[$

H1 $\forall t \in]0, +\infty[$, $g_x(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} g(t) = 0$

H2 $\forall (x,t) \in (]0, +\infty[)^2$, $|g_x(t)| \leq f(t)$ et f est intégrable sur $]0, +\infty[$ (toujours **Q9**)

Donc par théorème de convergence dominée généralisée $\boxed{f_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0.}$

Q19. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$,

- $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha < 1$ donc, par équivalent et critère de Riemann, h est intégrable sur $]0, 1]$.
- $t^2 \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, h est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On montre ainsi que h est intégrable sur $]0, +\infty[$. On a donc, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, dt.$$

L'intégrale étant convergente, on en déduit que $\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Avec les calculs précédents et la linéarité de l'intégrale on a :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} + t^\alpha}{t+1} e^{-xt} \, dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} \, dt$$

on effectue le changement de variable $u = xt$

$$\boxed{f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{1}{x} \, du = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}}$$

Q21. Calcul préliminaire, on note $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, dt$

On a g qui est définie d'après la question **Q19** et de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$

g_α est donc de classe $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

et on a

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, dt + \Gamma(\alpha) e^x \left(-\frac{e^{-x}}{x^\alpha}\right) \\ &= g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g_\alpha \text{ est une solution particulière de l'équation différentielle } y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.}$

Considérons l'équation différentielle : $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ pour $x > 0$

L'équation sans second membre associée est $y' - y = 0$ dont les solutions sont $y(x) = k\,e^x$ où k est un réel.

Comme g_α est une solution particulière de l'équation les solutions de l'équation complète sont $y(x) = k\,e^x + g_\alpha(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

f_α étant solution de cette équation, on en déduit qu'il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = k\,e^x + g_\alpha(x)$.

Il reste à déterminer la valeur de k.

On a de l'équation précédente l'égalité $e^{-x} f_\alpha(x) = k + \Gamma(\alpha) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

En utilisant les résultats des questions **Q18** et **Q19**, on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ que $k = 0$.

On conclut ainsi que $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x).}$

Q22. En posant $x = 0$ dans l'égalité précédente, on aurait l'égalité souhaitée, mais l'égalité ne vaut que pour $x > 0$.

On sait d'après la question **Q8** que f_α est continue sur $[0, +\infty[$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_\alpha(0) &= \lim_{x \to 0^+} f_\alpha(x) \quad (\text{par continuité de } f_\alpha \text{ en } x = 0) \\ &= \lim_{x \to 0} g_\alpha(x) \quad (\text{car } f_\alpha = g_\alpha \text{ pour } x > 0) \\ &= \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'autre part, comme $f_\alpha(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\,\mathrm{d}t$, on obtient l'égalité demandée.

Q23. On sait d'après la question **Q6** que $f_\alpha(0) = \dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

avec l'égalité de la question précédente, on a donc

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

Q24. On pose $u = t^2$ dans l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, avec la question précédente et $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$

On en déduit que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive)

Et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

FIN