Exercice 1

1. Soit y une fonction dérivable sur J ; on pose $z = |x|^\alpha y = (\varepsilon x)^\alpha y$ où ε est le signe de x sur J (une constante) ; z est dérivable sur J, $y = (\varepsilon x)^{-\alpha} z$ et $y' = -\varepsilon\alpha(\varepsilon x)^{\alpha-1} z + (\varepsilon x)^\alpha z'$. Alors
$$xy' + \alpha y = 0 \iff x\,|x|^\alpha\, z' = 0 \iff z' = 0 \iff z \text{ est constante.}$$
Les solutions sur l'intervalle J (ne contenant pas 0) de l'équation $xy' + \alpha y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C.\,|x|^{-\alpha}$, avec C constante réelle.

2. (a) On ne devrait pas parler de solutions d'une équation différentielle sur I qui n'est pas un intervalle. Ici, nous imaginerons qu'il s'agit de juxtaposer une solution sur $]-\infty, 0[$ et une solution sur $]0, +\infty[$, calculées dans la première question.
   (b) Comme $|x|^{-\alpha} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, la seule "solution" sur I est la fonction nulle.

3. $\mathcal{E}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus sur $\mathbb{R}$. Sur tout intervalle J ne contenant pas 0, le coefficient de y' ne s'annule pas ; si $x_0 \in J$ et si $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution de $\mathcal{E}$ sur J vérifiant $y(x_0) = y_0$. En juxtaposant la solution de $\mathcal{E}$ sur $]-\infty, 0[$ vérifiant $y(-1) = a$ et la solution de $\mathcal{E}$ sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = b$, on obtient la "solution" f souhaitée.

4. La différence de deux "solutions" de $\mathcal{E}$ sur I ayant une limite finie en 0 est une "solution" de $xy' + \alpha y = 0$ sur I ayant une limite finie en 0 ; donc est la fonction nulle d'après la question 2.b. D'où l'existence d'au plus une "solution" de $\mathcal{E}$ sur I ayant une limite finie en 0.

5. (a) f est (indéfiniment) dérivable terme à terme sur $]-R, R[$: $f'(x) = \sum_0^{+\infty} i\, a_i x^{i-1}$. f est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-R, R[$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_0^{+\infty} i\, a_i x^i + \alpha \sum_0^{+\infty} a_i x^i = \sum_0^{+\infty} \beta_i x^i$, *i.e.* $\sum_0^{+\infty} (i\, a_i + \alpha a_i) x^i = \sum_0^{+\infty} \beta_i x^i$.
   Par unicité du développement en série entière, f est solution de $\mathcal{E}$ sur $]-R, R[$ si et seulement si
   $$\forall i \in \mathbb{N},\ (i+\alpha) a_i = \beta_i \ \textit{i.e.}\ a_i = \frac{\beta_i}{i+\alpha}.$$
   Avec cette suite (a_i), $\left|a_i x^i\right| \sim \left|\frac{\beta_i}{i} x^i\right|$; donc la série entière $\sum a_i x^i$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{\beta_i}{i} x^i$, donc que la série entière dérivée $\sum \beta_i x^i$. Donc $R = +\infty$.
   (b) Comme $R > 0$ et grâce au travail par équivalences au 5.a, on peut conclure directement : il existe une unique solution de $\mathcal{E}$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$: la fonction $g : x \mapsto \sum_0^{+\infty} \frac{\beta_i}{i+\alpha}$.
   (c) D'après la question 4., la fonction g précédente (sa restriction à I) est l'unique "solution" de $\mathcal{E}$ sur I ayant une limite finie en 0.

6. (a) La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1} \mathrm{e}^t$ est continue sur $]0, x]$, (positive,) équivalente en 0 à $t \mapsto t^{\alpha-1}$, qui est intégrable sur $]0, x]$ $(\alpha - 1 > -1)$; donc $t \mapsto t^{\alpha-1}\mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]0, x]$, donc l'intégrale $\int_0^x t^{\alpha-1} \mathrm{e}^t\, dt$ converge.
   (b) Comme $t \mapsto t^{\alpha-1}\mathrm{e}^t$ est continue sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto \int_0^x t^{\alpha-1}\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t + \int_1^x t^{\alpha-1}\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto x^{\alpha-1}\mathrm{e}^x$; donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et
   $$h'(x) = x^{-\alpha}.x^{\alpha-1}\mathrm{e}^x - \alpha x^{-\alpha-1} \int_0^x t^{\alpha-1}\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t.$$
   On en déduit que $\forall x > 0,\ xh'(x) + \alpha h(x) = \mathrm{e}^x$.
   (c) Pour $x > 0$, $\left|\int_0^x t^{\alpha-1}(\mathrm{e}^t - 1)\, \mathrm{d}t\right| \leq \sup_{t\in[0,x]} |\mathrm{e}^t - 1| \int_0^x t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t = \sup_{t\in[0,x]} \left|\mathrm{e}^t - 1\right| \frac{x^\alpha}{\alpha}$.
   Donc $\left|h(x) - \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\sup_{t\in[0,x]} |\mathrm{e}^t - 1|}{\alpha}$, *i.e.* $\left|h(x) - \frac{1}{\alpha}\right| \leq \frac{\sup_{t\in[0,x]} |\mathrm{e}^t - 1|}{\alpha}$.
   Comme l'exponentielle est continue en 0, $\sup_{t\in[0,x]} |\mathrm{e}^t - 1| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\alpha}$.

(d) Comme $F : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$: $F(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{i!} x^i$, en reprenant le raisonnement des questions 2.b, 4 et 5.c, on démontre l'unicité d'une solution de $\mathcal{E}$ sur $]0, +\infty[$ ayant une limite finie en 0^+ ; cette solution est la restriction à $]0, +\infty[$ de l'unique solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Donc $\forall x > 0,\ h(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{(i+\alpha) i!} x^i$.

Exercice 2

1. (a) f est une fonction polynôme !

   (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3x_0^2 - 3(1 + y_0^2)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -6x_0 y_0$.

   (c) Si $x_0 = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) < 0$.

   Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_0 = 0 \\ 3x_0^2 - 3(1 + y_0^2) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_0 = 0 \\ x_0^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_0 = 0 \\ x_0 = \pm 1 \end{array} \right.$.

   (d) $f(1+h, k) = -2 + 3(h^2 - k^2) + h^3 - 3hk^2 = -2 + 3(h^2 - k^2) + o(h^2 + k^2)$ au voisinage de $(0, 0)$. Comme la forme quadratique $(h, k) \mapsto 3(h^2 - k^2)$ n'est ni positive, ni négative, f admet en $(1, 0)$ un col, mais pas d'extremum local.

   Autre méthode : $f(1, k) = -2 - 3k^2 + o(k^2)$; donc $k \mapsto f(1, k)$ admet un minimum local en 0 ; de même, $f(1+h, 0) = -2 + 3h^2 + o(h^2)$; donc $h \mapsto f(1+h, 0)$ admet un minimum local en 0. Donc f n'admet pas d'extremum local en $(1, 0)$.

   (e) $f(-x, y) = -f(x, y)$; donc f n'admet pas d'extremum local en $(-1, 0)$.

   (f) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, si f admet un extremum local, c'est nécessairement en un point critique de f. Donc f n'admet pas d'extremum local.

2. (a) Le disque D est la boule unité fermée pour la norme euclidienne usuelle. C'est une partie fermée et bornée, donc compacte (en dimension finie). Comme g est continue sur D, g admet un maximum A et un minimum a sur D.

   (b) Si g atteint l'un de ses extrema en un point intérieur à D, alors, en ce point, f admet un extremum local. Comme f n'admet pas d'extremum local, g atteint ses extrema sur le bord de D, *i.e.* sur C.

   (c) On paramètre C par $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, t décrivant $[-\pi, \pi]$.

   $\forall t \in [-\pi, \pi], g(\cos t, \sin t) = 4\cos^3 t - 6\cos t$. On est donc amené à étudier la fonction ϕ définie sur $[-1, 1]$ par $\phi(u) = 4u^3 - 6u$.

   $\phi'(u) = 12u^2 - 6$ s'annule en $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ... on dresse le tableau de variation de ϕ ... le maximum de ϕ est atteint en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et il vaut $2\sqrt{2}$; le minimum de ϕ est atteint en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et il vaut $-2\sqrt{2}$.

   On en déduit que le maximum de g sur C (donc sur D) est atteint quand $\cos t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, *i.e.* aux points $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ et qu'il vaut $A = 2\sqrt{2}$ ...

   (d) ... et que le minimum de g sur C (donc sur D) est atteint quand $\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *i.e.* aux points $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ et qu'il vaut $a = -2\sqrt{2}$.

Exercice 3

1. Vérification laissée au lecteur !
2. J_n est de rang 1 et v appartient à l'image de J_n. Donc (v) est une base de l'image.
   D'après le théorème du rang, le noyau de J_n est de dimension $n - 1$.
3. $J_n^2 = J_n$.

4. J_n est symétrique réelle, donc diagonalisable.

   Si $n \geq 2$, 0 est valeur propre associée au noyau, qui est de dimension $n-1$, donc de multiplicité 1 (J_n diagonalisable).

   1 est valeur propre et v est un vecteur propre associé. Comme l'espace est de dimension n et que J_n est diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n. Donc le sous-espace propre pour la valeur propre 1 est de dimension 1 et engendré par v ; et il n'y a pas d'autre valeur propre. La multiplicité de 0 vaut 1.

   On aurait pu utiliser également le polynôme annulateur $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ donné par la question 3 ou le fait que J_n représente un projecteur ...

5. (a) L'équation $\mathcal{E}$ s'écrit $x^n \det J_n = 0$. Si $n \geq 2$, $\det J_n = 0$, donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \mathbb{R}$. Si $n = 1$, $\det J_n = 1$ et $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{0\}$.

   (b) L'équation $\mathcal{E}$ s'écrit $\det(\mathrm{I}_n + xJ_n) = 0$. 0 n'est pas solution. Pour $x \neq 0$, $\mathcal{E}$ s'écrit $x^n \det(\frac{1}{x}\mathrm{I}_n + J_n) = 0$; donc x est solution si et seulement si $-\frac{1}{x}$ est une valeur propre de J_n, *i.e.* si et seulement si $x = -1$.

   Donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{-1\}$.

   (c) i. $J_n w$ s'écrit av, avec a réel. Si $(M + xJ_n)w = 0$, alors $Mw = -xav$, donc $w = -xaM^{-1}v$ et w est colinéaire à $M^{-1}v$.

   On en déduit que $M + xJ_n$ est inversible si et seulement si $M^{-1}v$ est dans le noyau de $M + xJ_n$.

   ii. $(M + xJ_n)w = 0 \iff v + xJ_n w = 0$. Or $J_n w$ est la combinaison des colonnes de J_n affectées des coordonnées de w, soit $\frac{\sigma}{n}v$.

   Donc $(M + xJ_n)w = 0 \iff v + x\frac{\sigma}{n}v = 0 \iff (1 + x\frac{\sigma}{n})v = 0 \iff 1 + x\frac{\sigma}{n} = 0$.

   Si $\sigma = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, w n'est pas dans le noyau de $M + xJ_n$, donc $M + xJ_n$ est inversible ; donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \emptyset$.

   Sinon, w est dans le noyau de $M + xJ_n$ si et seulement si $1 + x\frac{\sigma}{n} = 0$, donc $M + xJ_n$ n'est pas inversible si et seulement si $1 + x\frac{\sigma}{n} = 0$; donc $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \left\{-\frac{n}{\sigma}\right\}$.

   (d) i. $\det M = 0$ donc $0 \in \mathcal{S}_\mathcal{E}$.

   ii. x est solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si $x - b$ est solution de $\mathcal{F}$. Donc $x \mapsto x - b$ est une bijection de $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ sur l'ensemble des solutions de $\mathcal{F}$.

   iii. Sous l'hypothèse de la question précédente, d'après la question 5.c.ii, l'ensemble des solutions de $\mathcal{F}$ est de cardinal au plus égal à 1, donc $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est de cardinal au plus égal à 1. Comme $0 \in \mathcal{S}_\mathcal{E}$, $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{0\}$.

   Si, pour tout $b \in \mathbb{R}$, $M + bJ_n$ n'est pas inversible, alors $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \mathbb{R}$.

6. (a) On retranche à chaque colonne de $M + xJ_n$ d'indice au moins égal à 2 la colonne 1 (ce qui laisse inchangé le déterminant), puis on développe le déterminant de la matrice suivant la première colonne. On montre ainsi que $x \mapsto \det(M + xJ_n)$ est affine : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha + \beta x$.

   $\alpha = f(0) = \det M$.

   $\beta = f'(0)$.

   Comme $f = \det \circ \phi$ où $\phi(x) = M + xJ_n$, que det est de classe $\mathcal{C}^1$ (polynomiale) et que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$: $f'(0) = \mathrm{d}(\det)_{\phi(0)}(\phi'(0)) = \mathrm{d}(\det)_M(J_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_{i,j}(M) J_n[i,j] = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathrm{com}(M)[i,j] J_n[i,j] = \frac{\tau}{n}$, où τ est la somme des coefficients de la comatrice de M.

   (b) Si M n'est pas inversible, alors $f(x) = \frac{\tau}{n}x$. Si $\tau \neq 0$, alors $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \{0\}$, sinon, $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \mathbb{R}$.

   Si M est inversible, alors $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est vide si $\tau \neq 0$, est le singleton $\left\{-\frac{n \det M}{\tau}\right\}$ sinon.