X – Mathématiques B – MP-MPI – 2024

Un corrigé

Jérémy Larochette – Lycée Leconte de Lisle – La Réunion

Première partie

1a. Comme $q \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le théorème de Cauchy linéaire assure $\boxed{\text{l'existence de deux solutions}}$ $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ à (1) avec $(y_1(0), y_1'(0)) = (1,0)$ et $(y_2(0), y_2'(0)) = (0,1)$ (ainsi que leur unicité). On peut calculer leur wronskien en 0

$$y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) = 1 \neq 0$$

donc (y_1, y_2) est une base de solutions de l'équation homogène (1), $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est donc bien } \mathrm{Vect}(y_1,y_2).}$

1b. Soit $w : t \mapsto y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ le wronskien de nos deux solutions.
Alors w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $w'(t) = y_1'(t)y_2' + y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) - y_1'(t)y_2'(t) = 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, w est constant et comme $w(0) = 1$, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = 1.}$

---

2. Soit $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ solution de (1). Alors $\widehat{y} : t \mapsto y(t+T)$ est de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\widehat{y}'' : t \mapsto y''(t+T)$. La T-périodicité de q assure alors que $\boxed{\widehat{y} \text{ est solution de (1).}}$
Par **1a**, on a $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tel que $\widehat{y} = \lambda y_1 + \mu y_2$ et $\widehat{y}' = \lambda y_1' + \mu y_2'$.
En évaluant en 0 on tire $\lambda = y(T)$ et $\mu = y'(T)$ et donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t).}$

---

3. On a facilement $(c) \Longrightarrow (a)$, car si $y : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}u(t)$ est solution non nulle de (1), on a bien pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t+T) = \mu y(t)$.

Pour $(a) \Longrightarrow (c)$, partant d'une solution non nulle telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t+T) = \mu y(t)$, on pose

$$u : t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}y(t) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

et on vérifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t+T) = \mathrm{e}^{-\lambda t}y(t) = u(t)$ car $\mu = \mathrm{e}^{\lambda T}$ donc u est T-périodique et y est bien de la forme voulue.

Enfin, pour voir que $(a) \iff (b)$, on pose $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(y_1,y_2) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(y_1,y_2) \\ y & \longmapsto & \widehat{y} : t \mapsto y(t+T) \end{array}\right.$, endomorphisme de $\mathrm{Vect}(y_1,y_2)$ (avec la question **2**), et on remarque que $(a) \iff \mu \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.
Or, toujours avec **2**, $M = \mathrm{Mat}_{(y_1,y_2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$(a) \iff \chi_M(\mu) = 0 \iff \mu^2 - \mathrm{tr}(M)\mu + \det(M) = 0 \iff x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\,x + \underbrace{1}_{\textbf{1.b}} = 0 \iff (b)$$

Finalement, $\boxed{(a) \iff (b) \iff (c).}$

4a. $\mathrm{Sp}(M) = \{\mu_1, \mu_2\}$ avec $\mu_1 \neq \mu_2$. Donc M est diagonalisable avec $\mu_1 = \mathrm{e}^{\lambda T}$ et $\mu_2 = \dfrac{1}{\mu_1} = \mathrm{e}^{-\lambda T}$.
On a donc une base de l'espace $\mathrm{Vect}(y_1,y_2)$ des solutions de (1) constituée de vecteurs propres de φ donc de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}w_1(t) \\ f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}w_2(t) \end{array}\right.$$

avec $w_1, w_2 \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ T-périodiques, en utilisant **3** appliquée à $\mu_1 = \mathrm{e}^{\lambda T}$puis à $\mu_2 = \mathrm{e}^{-\lambda T}$.
Finalement, $\boxed{\text{toute solution de (1) est bien de la forme } \alpha f_1 + \beta f_2 \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.}$

4b. On suppose que $\mu_1 = \mu_2$. Alors le trinôme $x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\,x + 1$ est un carré parfait et vaut donc $(x \pm 1)^2$. On a donc bien $\boxed{\mu_1 = \mu_2 = \pm 1}$ et par **3**, on a une solution non nulle de (1) vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t+T) = \pm y(T)$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y(t+2T) = y(T).$$

$\boxed{\text{L'équation (1) admet donc dans tous les cas une solution non nulle } 2T\text{-périodique.}}$

Remarque : l'énoncé aurait bien sûr dû préciser qu'on cherche une solution ***non nulle****...*

Deuxième partie

5a. Soient $x_1, x_2 \in V$. Alors, avec $\gamma : t \mapsto x_1 + t(x_2 - x_1) \in \mathscr{C}^1([0,1])$

$$\begin{aligned}
\|h(x_2) - h(x_1)\| &= \left\| \int_0^1 \mathrm{d}h(\gamma(t))(\gamma'(t))\mathrm{d}t \right\| \\
&\leqslant \int_0^1 \|\mathrm{d}h(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\|\,\mathrm{d}t && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \int_0^1 \|\mathrm{d}h(\underbrace{x_1 + t(x_2 - x_1)}_{\in V \text{ convexe}})\|\|x_2 - x_1\|\mathrm{d}t \\
&\leqslant C\|x_2 - x_1\|
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant C\,\|x_2 - x_1\|.}$

5b. On utilise la question précédente. Pour cela, posons $h = f - \mathrm{Id}_E$.
Alors $h \in \mathscr{C}^1(U, E)$ et $\mathrm{d}h : x \mapsto \mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}\mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{d}f(x) - \mathrm{Id}_E = \mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(a)$ (l'application linéaire Id_E étant sa propre différentielle en tout point).

On a, par continuité, $r > 0$ tel que $B(a, 2r) \subset U$ (qui est ouvert) et pour tout $x \in B(a, 2r)$, $\|\mathrm{d}h(x)\| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Par la question précédente, comme $B(a, 2r)$ est un ouvert convexe de E et par inégalité triangulaire, on a, pour tous $x_1, x_2 \in \overline{B(a, r)} \subset B(a, 2r)$,

$$\|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant \|f(x_1) - f(x_2) - x_1 + x_2\| = \|h(x_1) - h(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

et donc

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in \overline{B(a, r)}, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\,\|x_1 - x_2\|.}$$

5c. Soit $x \in B(a, r)$ et $h \in \ker(\mathrm{d}f(x))$ ie $\mathrm{d}f(x)(h) = 0_E$.
Comme $th \xrightarrow[t \to 0]{} 0_E$, on a $\varepsilon > 0$ tel que si $|t| \leqslant \varepsilon$, $a + th \in \overline{B(a, r)}$. Alors, si $0 < t \leqslant \varepsilon$,

$$\left\| \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \right\| \geqslant \frac{\|x + th - x\|}{2t} = \frac{\|h\|}{2} \quad \text{par } \mathbf{5b}$$

Mais $\dfrac{f(x + th) - f(x)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \mathrm{d}f(x)(h) = 0_E$, donc $\|h\| = 0$ puis $h = 0_E$.
Finalement, $\ker(\mathrm{d}f(x)) = \{0_E\}$ donc $\boxed{\text{l'application linéaire } \mathrm{d}f(x) \text{ est injective.}}$

6a. $g : \left| \begin{array}{ccc} \overline{B(a, r)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|y_0 - f(x)\|^2 \end{array} \right.$ est continue (car f et $\|\cdot\|$ le sont) sur le compact $\overline{B(a, r)}$ (fermé borné en dimension finie) donc admet un minimum atteint sur $\overline{B(a, r)}$ par théorème des bornes atteintes.

Or, si $\|x-a\| = r$,

$$\begin{aligned}
\|y_0 - f(x)\| &= \|y_0 - f(a) + f(a) - f(x)\| \\
&\geqslant \|f(a) - f(x)\| - \|y_0 - f(a)\| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\|x-a\| - \frac{r}{4} && \text{par 5b avec } a, x \in \overline{B(a,r)} \\
&\geqslant \|y_0 - f(a)\|
\end{aligned}$$

donc sur $S(a,r)$, $g(x) \geqslant g(a)$ avec $a \in B(a,r)$. $\boxed{\text{On a donc bien } x_0 \in B(a,r) \text{ en lequel le minimum de } g \text{ est atteint.}}$

6b.

Première tentative : La présence du carré de la norme dans la définition de g nous incite à nous intéresser au cas particulier de la norme euclidienne dont on sait différentier le carré.

En effet, si $\varphi : x \mapsto \|x\|^2 = (x|x)$, par bilinéarité du produit scalaire, φ est différentiable en tout point et pour tous $(x,h) \in E^2$, $\mathrm{d}\varphi(x)(h) = (h|x) + (x|h) = 2(x|h)$ (se voit aussi en développant $\varphi(x+h)$).

Or, ici, $g = \varphi \circ (y_0 - f)$, donc, x_0 étant un point critique de g par condition nécessaire d'extremum local sur l'ouvert $B(a,r)$,

$$0_{\mathscr{L}(E)} = \mathrm{d}g(x_0) = \mathrm{d}\varphi(y - f(x_0)) \circ (-\mathrm{d}f(x_0))$$

et pour tout $h \in E$,

$$-2\Big(y_0 - f(x_0)\Big|\mathrm{d}f(x_0)(h)\Big) = 0.$$

Comme, par **5.c**, comme $x_0 \in B(a,r)$, $\mathrm{d}f(x_0) \in \mathrm{GL}(E)$ (endomorphisme injectif en dimension finie), en choisissant $h_0 = [\mathrm{d}f(x_0)]^{-1}(y_0 - f(x_0))$, on obtient

$$-2\|y_0 - f(x_0)\|^2 = 0$$

$\boxed{\text{et donc } y_0 = f(x_0).}$

Mais la norme n'est pas euclidienne a priori. On pourrait utiliser un argument d'équivalence des normes (réaliser le minimimum d'une norme, c'est réaliser le minimum de toutes les autres) pour s'y ramener mais cela ne semble pas être l'idée du sujet (quoi que ?).

Deuxième tentative : On traite le cas général mais en gardant l'idée de la direction du vecteur

$$h_0 = [\mathrm{d}f(x_0)]^{-1}(y_0 - f(x_0)).$$

On écrit, pour t suffisamment petit (en particulier $t \in [0,1]$), $f(x_0 + th_0) = f(x_0) + t\mathrm{d}f(x_0)(h_0) + t\varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\|y_0 - f(x_0 + th_0)\| &= \|y_0 - f(x_0) - t\mathrm{d}f(x_0)(h_0) - t\varepsilon(t)\| \\
&= \|(1-t)(y_0 - f(x_0)) - t\varepsilon(t)\| \\
&\leqslant (1-t)\|y_0 - f(x_0)\| + t\|\varepsilon(t)\|
\end{aligned}$$

Si $y_0 \neq f(x_0)$, pour t suffisamment proche de 0, $\|\varepsilon(t)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$ et donc

$$\|y_0 - f(x_0 + th_0)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$$

avec $x_0 + th_0 \in \overline{B(a,r)}$ (toujours pour t assez petit), donc $g(y_0 - f(x_0 + th_0)) < \min g$ ce qui est contradictoire.

$\boxed{\text{Et donc } y_0 = f(x_0).}$

Troisième tentative : On peut aussi s'en sortir en utilisant non seulement la direction du h_0 de la première tentative, mais aussi le résultat trouvé (et sans utiliser de différentielle mais en comprenant l'utilité de la norme est au carré), avec $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(x_0+th_0)-g(x_0)}{t} + 2\|y_0-f(x_0)\|^2\right| &= \frac{1}{t}\left|\|y_0-f(x_0+th_0)\|^2 - \|y_0-f(x_0)\|^2 + 2t\|y_0-f(x_0)\|^2\right| \\
&= \frac{1}{t}\left|\|y_0-f(x_0+th_0)\|^2 + (2t-1)\|y_0-f(x_0)\|^2\right| \\
&= \frac{1}{t}\left|\|y_0-f(x_0+th_0)\|^2 - \left\|\sqrt{1-2t}(y_0-f(x_0))\right\|^2\right| \\
&= \frac{1}{t}\left|\|y_0-f(x_0+th_0)\| - \left\|\sqrt{1-2t}(y_0-f(x_0))\right\|\right| \cdot \left|\|y_0-f(x_0+th_0)\| + \left\|\sqrt{1-2t}(y_0-f(x_0))\right\|\right| \\
&\leqslant \frac{1}{t}\left\|\sqrt{1-2t}(y_0-f(x_0)) - y_0 + f(x_0+th_0)\right\| \cdot \left(\|y_0-f(x_0+th_0)\| + \left\|\sqrt{1-2t}(y_0-f(x_0))\right\|\right)
\end{aligned}$$

Or $\sqrt{1-2t} = 1 - t + \mathrm{o}(t)$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\left\|\sqrt{1-2t}(y_0-f(x_0)) - y_0 + f(x_0+th_0)\right\| &= \frac{1}{t}\|(1-t+\mathrm{o}(t))(y_0-f(x_0)) - y_0 + f(x_0+th_0)\| \\
&= \left\|\frac{f(x_0+th_0)-f(x_0)}{t} - (y_0-f(x_0)) + \mathrm{o}(1)(y_0-f(x_0))\right\| \\
&\xrightarrow[t\to 0]{} \|\mathrm{d}f(x_0)(h_0) - (y_0-f(x_0))\| = 0
\end{aligned}$$

et comme $\|y_0-f(x_0+th_0)\| + \left\|\sqrt{1-2t}(y_0-f(x_0))\right\| \xrightarrow[t\to 0]{} 2\|y_0-f(x_0)\|$ par continuité, on en déduit que

$$\frac{g(x_0+th_0)-g(x_0)}{t} \to -2\|y_0-f(x_0)\|^2 = 0$$

car x_0 est un point critique, ce qui permet de retrouver $\boxed{y_0 = f(x_0).}$

7a. $\boxed{W = B\left(f(a), \frac{r}{4}\right) \text{ est ouvert de } E}$ en tant que boule ouverte.

Puis $f^{-1}(W)$ est un ouvert de U comme image réciproque d'un ouvert par une application continue, et comme U est ouvert lui-même, $f^{-1}(W)$ est un ouvert de E. Enfin, comme la boule ouvert $B(a,r)$ est un ouvert de E, $\boxed{V = f^{-1}(W) \cap B(a,r) \text{ est un ouvert de } E.}$

7b. $\boxed{f_{|V} \text{ est continue}}$ car f l'est. Soit $y_0 \in W$. Alors $\|y_0 - f(a)\| \leqslant \frac{r}{4}$ et par **6**, on a $x_0 \in B(a,r)$ tel que $y_0 = f(x_0) \in W$ donc $x_0 \in V = f^{-1}(W) \cap B(a,r)$ donc $y = f_{|V}(x_0)$ et $\boxed{f_{|V} \text{ est surjective.}}$

$\boxed{\text{L'injectivité de } f_{|V}}$ est une conséquence immédiate de **5.b** : si $x_1, x_2 \in V \subset \overline{B(a,r)}$, $\|f(x_1) - f(x_2)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ donc $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Reste à voir que $\boxed{\left(f_{|V}\right)^{-1} \text{ est continue.}}$ On montre pour cela qu'elle est lipschitzienne.

Soit $y_1, y_2 \in W$ et $x_1 = \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_1), x_2 = \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_2) \in V \subset \overline{B(a,r)}$. Alors, grâce à la question **5.b**,

$$\left|\left(f_{|V}\right)^{-1}(y_1) - \left(f_{|V}\right)^{-1}(y_2)\right| = \|x_1 - x_2\| \leqslant 2\|f(x_1) - f(x_2)\| = 2\|y_1 - y_2\|.$$

Ainsi, $\boxed{f_{|V} \text{ un homéomorphisme de } V \text{ sur } W.}$

Troisième partie

8a. Par caractérisation des sous-groupes, connaissant la structure d'algèbre de $\mathbb{C}[A]$:

- $(\mathbb{C}[A])^* \subset \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ par définition.
- $I_n = A^0 = I_n^{-1} \in (\mathbb{C}[A])^* \neq \emptyset$.
- Soit $B, C \in (\mathbb{C}[A])^*$. Alors
$$\underbrace{B}_{\in\mathbb{C}[A]\cap\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \times \underbrace{C^{-1}}_{\in\mathbb{C}[A]\cap\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \in \mathbb{C}[A]\cap\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
et
$$\left(BC^{-1}\right)^{-1} = CB^{-1} \in \mathbb{C}[A]$$
donc $BC^{-1} \in (\mathbb{C}[A])^*$.
- Des polynômes en A commutent toujours.

Finalement, $\boxed{(\mathbb{C}[A])^* \text{ est un sous-groupe abélien de } (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \times).}$

Remarque : c'est aussi une conséquence immédiate de la question suivante.

8b. Par définition, $(\mathbb{C}[A])^* \subset \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}(\mathbb{C})$. Soit $B \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}(\mathbb{C})$. Montrons que $B^{-1} \in \mathbb{C}[A]$.
On a classiquement que B^{-1} est un polynôme en B : il suffit de considérer un polynôme annulateur non nul de B (il en existe, par exemple π_B). Notons le
$$a_k B^k + a_{k+1}B^{k+1} + \cdots + a_p B^p = 0_n$$
avec $a_k \neq 0$ et $k < p$. Alors
$$B^{-1} = -\frac{a_{k+1}}{a_k} I_n - \cdots - \frac{a_p}{a_k} B^{p-k-1}$$
et comme $B \in \mathbb{C}[A]$, $B^{-1} \in \mathbb{C}[A]$.
Finalement, $\boxed{(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$

---

9. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\exp\left(\lambda A^p\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} A^{pk}$ est une limite de polynômes en A. Or $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, donc est fermé et donc $\exp\left(\lambda A^p\right) \in \mathbb{C}[A]$.
On sait par ailleurs que $\exp\left(\lambda A^p\right)$ est inversible d'inverse $\exp\left(-\lambda A^p\right) \in \mathbb{C}[A]$ pour la même raison.
Ainsi, $\exp\left(\lambda A^p\right) \in (\mathbb{C}[A])^*$.
Puis, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, les $a_k A^k$ commutant deux à deux,
$$\exp(P(A)) = \exp\left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right) = \prod_{k=0}^{p} \underbrace{\exp\left(a_k A^k\right)}_{\in(\mathbb{C}[A])^*} \in (\mathbb{C}[A])^*$$
par **8a**. On a montré que $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*.}$

10a. Si $(t, a), (t', a') \in]0, 1[\times \mathbb{R}$ tels que $Z_a(t) = Z'_a(t')$ alors
$$t + iat(1-t) = t' + \mathrm{i}a't'(1-t')$$
donc, par unicité des parties réelle et imaginaire, $t = t'$ et $at(1-t) = a't'(1-t')$ et comme $t(1-t) = t'(1-t') \neq 0$, $a = a'$. $\boxed{\text{D'où l'injectivité.}}$

10b. $M_1, M_2 \in (\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ d'après **8b**.
On a déjà que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $M(t) \in \mathbb{C}[A]$ (espace vectoriel).
Remarquons alors que si $t \in]0, 1[$, $Z_a(t) \neq 0$ et
$$\begin{aligned}
M(t) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}) &\iff M_1 M_2^{-1} - \frac{Z_a(t) - 1}{Z_a(t)} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\
&\iff \frac{Z_a(t) - 1}{Z_a(t)} = 1 - \frac{1}{Z_a(t)} \notin \mathrm{Sp}\left(M_1 M_2^{-1}\right) \\
&\iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\left(M_1 M_2^{-1}\right) \setminus \{1\},\ Z_a(t) \neq \frac{1}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Comme $\left\{\dfrac{1}{1-\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}\left(M_1 M_2^{-1}\right) \setminus \{1\}\right\}$ est fini, et comme $(t,a) \in]0,1[\times \mathbb{R} \mapsto Z_a(t)$ est injective (question **10a**), $\boxed{\text{on peut choisir } a \text{ afin que ce soit toujours le cas}}$: il suffit qu'il soit strictement supérieur à

$$\max\left\{a \in \mathbb{R},\ \exists t \in]0,1[, 1 - \frac{1}{Z_a(t)} \in \mathrm{Sp}\left(M_1 M_2^{-1}\right)\right\}$$

si cet ensemble – toujours fini – est non vide, et quelconque sinon.

10c. Le cas échéant, $\left|\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & (\mathbb{C}[A])^* \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}\right.$ est un chemin continu reliant $M_2 = M(0)$ et $M_1 = M(1)$.

Par définition, $\boxed{(\mathbb{C}[A])^* \text{ est connexe par arcs.}}$

11a. On utilise la partie 2 : on peut toujours voir les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : \exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]$ (où $\mathbb{C}[A]$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).
Vérifions qu'il s'agit d'une application de classe $\mathscr{C}^1$.
Soient $M, H \in \mathbb{C}[A]$. Rappelons que ce dernier est commutatif. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\exp(M+H) = \exp(M)\exp(H) &= \exp(M)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k = \exp(M)\left(I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right) \\ &= \exp(M) + \exp(M)H + \exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\end{aligned}$$

avec $H \mapsto \exp(M)H$ linéaire et, si on choisit une norme $\|\cdot\|$ d'algèbre (on peut, elles sont toutes équivalentes),

$$\left\|\exp(M)\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\| \leqslant \|\exp(M)\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^k}{k!} \leqslant \|H\|^2\|\exp(M)\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^{k-2}}{(k-2)!} = \|H\| \times \underbrace{\|H\| \cdot \|\exp(M)\| \cdot \mathrm{e}^{\|H\|}}_{\longrightarrow 0 \text{ lorsque } H \to 0_n}$$

donc $\exp(M)\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k = \mathrm{o}(H)$. On en déduit que exp est différentiable en M et $\mathrm{d}\exp(M) : H \mapsto \exp(M)H$.
Reste à voir que $M \mapsto \mathrm{d}\exp(M)$ est continue sur $\mathbb{C}[A]$, ce qui est une conséquence de la continuité de exp, en utilisant la norme d'opérateur associée à une norme d'algèbre sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[A]$:

$$\|\mathrm{d}\exp(M) - \mathrm{d}\exp(M_0)\| \leqslant \|\exp(M) - \exp(M_0)\| \xrightarrow[M \to M_0]{} 0.$$

Finalement, exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{C}[A]$. De plus, $\mathrm{d}\exp(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[A]} : H \mapsto H$.
La partie 2 nous fournit alors $r > 0$ et $U = \exp^{-1}(V) \cap B(0_n, r)$ et $V = B\left(I_n, \frac{r}{4}\right)$ des $\boxed{\text{ouverts de } \mathbb{C}[A] \text{ contenant}}$ respectivement $\boxed{0_n \text{ et } I_n}$ tels que $\boxed{\exp : U \to V \text{ soit bijective et bicontinue.}}$

11b. Soit $C \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Alors $C = \exp D$ où $D \in \mathbb{C}[A]$. On reprend le r de la question précédente et on pose $\varepsilon = \dfrac{r}{4}$.
Posons $\varepsilon' = \|C\|\varepsilon > 0$ car $C \neq 0_n \notin \exp(\mathbb{C}[A])$. Si $M \in B(C, \varepsilon') \subset \mathbb{C}[A]$, $\|C - M\| < \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\|C^{-1}\|}$ donc, avec $\|\cdot\|$ norme d'algèbre,

$$\left\|I_n - C^{-1}M\right\| < \varepsilon$$

avec $C^{-1} = \exp(-C) \in \mathbb{C}[A]$ par **9** et $M \in \mathbb{C}[A]$ donc $C^{-1}M \in \mathbb{C}[A]$.
Alors $C^{-1}M \in B(I_n, \varepsilon) = V = \exp(U) \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.
On a donc $E \in \mathbb{C}[A]$ tel que $C^{-1}M = \exp(E)$ donc

$$M = \exp(D)\exp(E) = \exp(D+E) \in \exp(\mathbb{C}[A])$$

car $D, E \in \mathbb{C}[A]$ commutent. On vient de démontrer que $B(C, \varepsilon') \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.
Ainsi, $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est un ouvert de } \mathbb{C}[A].}$

---

12. On a déjà que $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*$ (question **9**).
Soit $C \in (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$. On montre que $C\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert content C et contenu dans $(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ qui sera bien un voisinage de C, ce qui permet de conclure.
En effet, si $D \in \exp(\mathbb{C}[A])$, $C\exp(D) \in (\mathbb{C}[A])^*$ (par **9** et **8a**) et $C\exp(D) \notin \exp(\mathbb{C}[A])$ sinon

$$C = [C\exp(D)]\exp(-D) \in \exp(\mathbb{C}[A])$$

(on rappelle que toutes les matrices commutent), ce qui est exclu. Ainsi,

$$C = C\exp(0_n) \in C\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A]).$$

Puis, d'après **11b**, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ inclus dans $(\mathbb{C}[A])^*$ donc un ouvert de $(\mathbb{C}[A])^*$, et

$$C\exp(\mathbb{C}[A]) = \left\{D \in (\mathbb{C}[A])^*,\ C^{-1}D \in \exp(\mathbb{C}[A])\right\} = h^{-1}\left(\exp(\mathbb{C}[A])\right)$$

où $h : D \mapsto C^{-1}D$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $C\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $(\mathbb{C}[A])^*$.
Finalement, $(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert comme voisinage de chacun de ses points, donc $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est un fermé de } (\mathbb{C}[A])^*.}$

Remarque : on a même plus précisément que les classes à gauche pour le sous-groupe $H = \exp(\mathbb{C}[A])$ du groupe $(\mathbb{C}[A])^*$ forment une partition, ce qui permet d'écrire

$$(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{C \in (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} C\exp(\mathbb{C}[A])$$

les $C\exp(\mathbb{C}[A])$ étant les classes d'équivalences de la relation d'équivalence $D \sim C \iff D \in C\exp(\mathbb{C}[A])$, ce qui permet de voir $(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ comme réunion d'ouverts.

13a. Soit

$$f = \mathbf{1}_{(\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} : M \in (\mathbb{C}[A])^* \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } M \in \exp(\mathbb{C}[A]), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\boxed{f(M_1) = 0 \text{ et } f(M_2) = 1.}$
Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert par **11b** donc on a un voisinage de M sur lequel f est nulle, donc f est continue en M.
Soit $M \in (\mathbb{C}[A])^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert par **12** donc on a un voisinage de M sur lequel f vaut constamment 1, donc f est continue en M.
Ainsi $\boxed{f : (\mathbb{C}[A])^* \to \{0,1\} \text{ est bien continue.}}$

13b. Comme $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs **10c** et f est continue, $f\left((\mathbb{C}[A])^*\right)$ est un connexe par arc de $\{0,1\}$ sans être constante, ce qui est contradictoire. C'est donc (avec **9**) que $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*.}$

---

14. On a déjà $\exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Réciproquement, par **13b**, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors $A \in (\mathbb{C}[A])^* = \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right)$.
Finalement, $\boxed{\exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$

Quatrième partie

15. Soit $\mathscr{S}$ l'espace des solutions dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de (2) : il s'agit d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n d'après le théorème de structure du cours.
Puis, comme dans la première partie, par T-périodicité de A, $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & \mathscr{S} \\ Y & \mapsto & \widehat{Y} : t \mapsto Y(t+T) \end{array} \right.$ automorphisme de $\mathscr{S}$, de réciproque $Y \mapsto \left(\check{Y} : t \mapsto Y(t-T)\right)$ dont le spectre est non vide (sur $\mathbb{C}$) et ne contient pas 0 : on a donc $\mu \in \mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathbb{C}^*$ et $Y \not\equiv 0$ vecteur propre associé, tel que $\boxed{\varphi(Y) = \mu Y.}$

16a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $\lambda_1 Y_1(t) + \cdots + \lambda_n Y_n(t) = 0_{\mathbb{C}^n}$, alors $\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_n Y_n$ est solution du problème de Cauchy formé par (2) et la condition initiale $Y(t) = 0$. Par l'unicité du théorème de Cauchy linéaire, on en déduit que $\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_n Y_n \equiv 0$, puis, par indépendance, que tous les λ_i sont nuls.
Ainsi, les colonnes de $M(t)$ sont libres et $\boxed{M(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$
De plus, $M'(t) = \left(Y_1'(t) \middle| \cdots \middle| Y_n'(t)\right) = \left(A(t)Y_1(t) \middle| \cdots \middle| A(t)Y_n(t)\right)$ donc $\boxed{M'(t) = A(t)M(t).}$

16b.

Première approche : Il y a une solution astucieuse qui consiste à remarquer que les

$$\widehat{Y_i} : t \mapsto Y_i(t+T)$$

sont également solutions de (2), ce qui, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, permet de trouver des coordonnées $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ telles que $\widehat{Y_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} Y_i$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t+T) = M(t)A$ où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

On a donc bien que $\boxed{A = (M(t))^{-1} M(t+T) \text{ est indépendante de } t \in \mathbb{R}.}$

Seconde approche : On peut aussi répondre à la question de manière brutale en dérivant $g : t \mapsto (M(t))^{-1} M(t+T)$.
Pour cela, différentions $\psi : M \mapsto M^{-1}$.
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $M + H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\|\cdot\|$ norme d'algèbre.
En choisissant H tel que $\left\|M^{-1}H\right\| < 1$ (il suffit que $\|H\| < \dfrac{1}{\|M^{-1}\|}$)

$$(M+H)^{-1} = \left(I_n + M^{-1}H\right)^{-1} M^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-M^{-1}H\right)^k\right) M^{-1} = M^{-1} - \underbrace{M^{-1}HM^{-1}}_{\text{linéaire en } H} + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \left(-M^{-1}H\right)^k\right) M^{-1}$$

avec $\left\|\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \left(-M^{-1}H\right)^k\right) M^{-1}\right\| \leqslant \|M^{-1}\| \sum_{k=2}^{+\infty} \|M^{-1}H\|^k = \dfrac{\|M^{-1}\| \, \|M^{-1}H\|^2}{1 - \|M^{-1}H\|} \leqslant \|H\| \underbrace{\dfrac{\|M^{-1}\|^3 \|H\|}{1 - \|M^{-1}H\|}}_{\xrightarrow[H \to 0]{} 0}$ donc

$$\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \left(-M^{-1}H\right)^k\right) M^{-1} = \mathrm{o}(H)$$

et $\mathrm{d}\psi(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.
On a alors $g : t \mapsto \psi(M(t))M(t+T)$ qui est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \mathrm{d}\psi(M(t))(M'(t))M(t+T) + \psi(M(t))M'(t+T) \\ &= -(M(t))^{-1} \underbrace{M'(t)(M(t))^{-1}}_{=A(t)} M(t+T) + (M(t))^{-1} \underbrace{M'(t+T)}_{=A(t)M(t+T)} = 0 \end{aligned}$$

avec la T-périodicité de A.
Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $\boxed{g \text{ est constante.}}$

16c. La matrice précédente $A = (M(0))^{-1} M(T) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R},\ M(t+T) = M(t)A.}$
Avec **14**, on a $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\boxed{A = \exp(TB).}$

16d. Soit $\boxed{Q : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & M(t)\exp(-tB) \end{array}\right. \text{ continue car } M \text{ et } t \mapsto \exp(-tB) \text{ le sont.}}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Q(t+T) = M(t+T)\exp(-(t+T)B) = M(t)\exp(TB)\exp(-TB)\exp(-tB) = M(t)\exp(-tB) = Q(t)$$

donc $\boxed{Q \text{ est } T\text{-périodique.}}$

17a. Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $(MP)'(t) = M'(t)P = A(t)M(t)P$, les colonnes de MP sont solutions de (2) : $\boxed{Z_1, \dots, Z_n \in \mathscr{S}.}$
$M(0)P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donc $(Z_1(0), \dots, Z_n(0))$ est libre donc $(Z_1, \dots, Z_n)$ est libre et $n = \dim \mathscr{S}$, donc $\boxed{(Z_1, \dots, Z_n) \text{ est une base de } \mathscr{S}.}$

17b. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
M(t)P &= Q(t)\exp\left(tN + tP\Delta P^{-1}\right)P \\
&= Q(t)\exp(tN)\exp\left(tP\Delta P^{-1}\right)P && \text{car } N \text{ et } D = P\Delta P^{-1} \text{ commutent} \\
&= Q(t)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}N^i\right)P\exp(t\Delta)P^{-1}P \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}Q(t)N^iP\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{e}^{t\lambda_n}\end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}t^i\left(R_{i,1}(t)\middle| \quad\cdots\quad \middle|R_{i,n}(t)\right)\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{e}^{t\lambda_n}\end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1}t^i\mathrm{e}^{\lambda_1 t}R_{i,1}(t)\middle| \quad\cdots\quad \middle|\sum_{i=0}^{n-1}t^i\mathrm{e}^{\lambda_n t}R_{i,n}(t)\right)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ Z_k(t) = e^{\lambda_k t}\left(\sum_{i=0}^{n-1}t^iR_{i,k}(t)\right).}$

Par ailleurs, $\boxed{\text{les } R_{i,k} \text{ sont continues et } T\text{-périodiques}}$ car Q l'est et car $M \mapsto \frac{1}{i!}MN^iP$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie.

17c. On suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$. Soit Y une solution de (2).

On a alors $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ tel que $Y = \sum_{k=1}^{n}\mu_kZ_k$. Or

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall t \in \mathbb{R},\ |Z_k(t)| \leqslant \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(\lambda_k)t}\sum_{i=0}^{+\infty}t^i\,|R_{i,k}(t)|$$

avec $R_{i,k}$ bornée car continue et périodique (théorème des bornes atteintes sur $[0,T]$) et les $\mathfrak{Re}\,(\lambda_k) < 0$, donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ Z_k(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{Y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.}$

18a. $\lambda = \mathrm{i}\frac{2k\pi}{mT} \in \mathrm{Sp}(B)$ donc $1 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi} \in \mathrm{Sp}(\exp(mTB)) = \left\{\mathrm{e}^{mT\alpha},\ \alpha \in \mathrm{Sp}(B)\right\}$ (car on travaille sur $\mathbb{C}$, résultat du cours qui se retrouve en trigonalisant).
Soit C vecteur propre de $\exp(mTB)$ associé à la valeur propre 1 et $[Y : t \mapsto M(t)C] \in \mathcal{S}$ (combinaison linéaire des Y_i). Cette fonction n'est pas nulle car $C \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est inversible.
Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t+mT) = M(t+mT)C = Q(t+mT)\exp((t+mT)B)C = Q(t)\exp(tB)\underbrace{\exp(mTB)C}_{=C} = M(t)C = Y(t)$$

Donc $\boxed{Y \text{ est une solution non nulle } mT\text{-périodique de (2).}}$

18b. On a Y solution non nulle mT-périodique de (2). On peut écrire $Y = MC$ où $C \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = Q(t)\exp(tB)C$. Alors

$$Y(0) = Q(0)C = Y(mT) = Q(0)\exp(mTB)C.$$

Comme $Q(0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\exp(mTB)C = C$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(\exp(mTB))$.
Or, comme on le voit en trigonalisant (sur $\mathbb{C}$, on peut),

$$\mathrm{Sp}(\exp(mTB)) = \mathrm{Sp}\left(\exp(TB)\right)^m = \{\lambda^m,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(\exp(TB))\},$$

donc on a bien $\boxed{\mathrm{Sp}(\exp(TB)) \cap \mathbb{U}_m \neq \emptyset.}$

19. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme X est T'-périodique, X' l'est aussi et pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$A(t+kT')X(t) = A(t+kT')X(t+kT') = X'(t+kT') = X'(t) = A(t)X(t).$$

Comme de plus A est T-périodique, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$A(t+kT'+\ell T)X(t) = A(t)X(t).$$

Or $\mathbb{Z}T + \mathbb{Z}T'$ est un sous-groupe non nul de $(\mathbb{R},+)$ qui n'est pas discret, sinon aurait $a \in \mathbb{R}^*$ et $k, \ell \in \mathbb{Z}^*$ tels que $T = ka$ et $T' = \ell a$, donc $T' = \dfrac{\ell}{k} T \in \mathbb{Q}T$, ce qui est exclu.
On a donc, d'après le résultat admis, que $\mathbb{Z}T + \mathbb{Z}T'$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Or les applications continues $s \mapsto A(t+s)X(t)$ et $s \mapsto A(t)X(t)$ coïncident sur la partie dense $\mathbb{Z}T + \mathbb{Z}T'$, elles sont donc égales.
Finalement, $\boxed{\forall u, t \in \mathbb{R},\ A(u)X(t) = A(t)X(t).}$

20.

- On suppose que (2) admet une solution T'-périodique X où $T' \notin \mathbb{Q}T$.
Alors, avec **19**, $\forall u, t \in \mathbb{R},\ A(u)X(t) = A(t)X(t) = X'(t)$.
Posons $V = \mathrm{Vect}\,(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, donc de dimension finie, et donc fermé.
Comme, pour $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{h}\big(X(t+h) - X(t)\big) \in V \xrightarrow[h \to 0]{} X'(t)$, on a, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $X'(t) = A(u)X(t) \in V$.
Donc V est un sous-espace stable par toutes les $A(u)$ pour $u \in \mathbb{R}$.
Si, de plus, la solution X n'est pas nulle, $V = \mathbb{C}^n$ vu l'hypothèse faite dans la question.
Posons $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.
Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $u \in \mathbb{R}$, $A(u)X(t_i) = X'(t_i)$ ne dépend pas de u, donc $u \mapsto A(u)$ est constante (par unicité d'une application linéaire dont on connaît l'image d'une base). Mais alors $A(u)$ ne devrait avoir aucun sous-espace stable non trivial et donc en particulier aucun vecteur propre (engendrant une droite stable), ce qui est contradictoire... sauf si $n = 1$.
Or, dans le cas où $n = 1$, l'équation devient scalaire $x'(t) = ax(t)$ et admet comme solutions les fonctions $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{at}$.
Or une telle fonction n'est non nulle périodique qu'à la seule condition que $a = 0$ (auquel cas elle est constante).
On a donc montré que (2) admet une solution non nulle T'-périodique avec $T' \notin \mathbb{Q}T$ si et seulement si $n = 1$ et $A : t \mapsto a = 0$.
- Puis, par la question **18b**, si (2) a une solution non nulle $\dfrac{m}{q}T$-périodique avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, elle est aussi mT-périodique donc d'après **18b**, $\exp(TB)$ possède une valeur propre de la forme $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{m}}$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Mais $\mathrm{Sp}(\exp(TB)) = \left\{\mathrm{e}^{\lambda T},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(B)\right\}$ et

$$\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{m}} = \mathrm{e}^{\lambda T} \iff \lambda T \equiv \frac{2\mathrm{i}k\pi}{m}\ [2\mathrm{i}\pi] \iff \exists p \in \mathbb{Z},\ \lambda = \frac{2\mathrm{i}(k+mp)\pi}{mT}$$

Donc B possède une valeur propre de la forme $\dfrac{2\mathrm{i}\ell\pi}{mT}$ où $\ell \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, **18a** nous dit que (2) a, sous cette même condition, une solution non nulle mT-périodique.
- Finalement, si les seuls sous-espaces stables par toutes les $A(t)$ sont triviaux, (2) a une solution non nulle périodique si et seulement si $\boxed{(n = 1 \text{ et } A : t \mapsto 0) \text{ ou } \mathrm{Sp}(B) \cap \frac{2\mathrm{i}\pi}{T}\mathbb{Q} \neq \emptyset.}$ (et, dans tous les cas, elle a alors une période dans $\mathbb{N}^*T$).

21. Les solutions de (3) s'écrivent $X : t \mapsto M(t)C + X_0(t) = Q(t)\exp(tB)C + X_0(t)$ par **16** et théorème de structure (avec A et b continues), où X_0 est une solution particulière (il en existe).

Analyse Si X est une solution T-périodique,

$$X(0) = Q(0)C + X_0(0) = X(T) = \underbrace{Q(T)}_{=Q(0)}\exp(TB)X + X_0(T)$$

donc $Q(0)[\exp(TB) - I_n]C = X_0(0) - X_0(T)$ puis, comme $1 \notin \mathrm{Sp}(\exp(TB))$, $\exp(TB) - I_n$ est inversible et

$$C = [\exp(TB) - I_n]^{-1}[Q(0)]^{-1}(X_0(0) - X_0(T))$$

d'où l'unicité sous réserve d'existence.

Synthèse Posons un tel C et $X : t \mapsto M(t)C + X_0(t)$.

Alors $X(0) = X(T)$ par construction de C. Puis $\widehat{X} : t \mapsto X(t+T)$ est dérivable

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{X}'(t) = X'(t+T) = A(t)X(t+T) + b(t) = A(t)\widehat{X}(t) + b(t)$$

par T-périodicité de A et b, donc X et $\widehat{X}$ sont solutions du problème de Cauchy formé par $Y' = AY + b$ et la condition initiale $Y(0) = X(0)$.

Par théorème de Cauchy linéaire, $\widehat{X} = X$ donc X est une solution de (3) T-périodique, d'où l'existence.

Finalement, $\boxed{\text{(3) possède une unique solution } T\text{-périodique.}}$

---

22. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ et notons (S) le système différentiel. Alors

$$\begin{aligned}(S) &\iff z' = (1 + \mathrm{i}\cos)z \iff \exists c \in \mathbb{C},\ z : t \mapsto c\,\mathrm{e}^{t + \mathrm{i}\sin t}\\ &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ z : t \mapsto (\alpha + \mathrm{i}\beta)\ + (\cos(\sin t) + \mathrm{i}\sin(\sin t))\,\mathrm{e}^t\\ &\iff \boxed{\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \alpha\cos(\sin t)\mathrm{e}^t - \beta\sin(\sin t)\mathrm{e}^t \\ y(t) = \alpha\sin(\sin t)\mathrm{e}^t + \beta\cos(\sin t)\mathrm{e}^t \end{cases}}\end{aligned}$$

Posons $Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\sin t)\mathrm{e}^t \\ \sin(\sin t)\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ et $Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\sin t)\mathrm{e}^t \\ \cos(\sin t)\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ base de solution.

Alors $M : t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & -\sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix} = \boxed{Q(t)\exp(tI_2) \text{ avec } Q : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\sin t) & -\sin(\sin t) \\ \sin(\sin t) & \cos(\sin t) \end{pmatrix}}$ 2π-périodique tout comme $A = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \\ \cos & 1 \end{pmatrix}$, et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: il s'agit donc bien de la forme normale.

Fin du corrigé