1 Un prolongement au principe variationnel

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(E)$.

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $\dfrac{\left(u(x) \middle| x\right)}{\|x\|^2}$ lorsque x parcourt $E \setminus \{0_E\}$.

2 Théorème du minimax : lemme de Courant-Fischer-Weyl

Soit E euclidien de dimension n, u un endomorphisme autoadjoint de E, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthodiagonalisante de u, e_i étant un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $E_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $F_k = \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$. Montrer que
$$\lambda_k = \max_{\substack{x \in E_k \\ \|x\|=1}} \left(u(x) \middle| x\right) = \min_{\substack{x \in F_k \\ \|x\|=1}} \left(u(x) \middle| x\right).$$
2. Soit $\mathscr{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces de E de dimension k. Montrer que
$$\lambda_k = \min_{F \in \mathscr{F}_k} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \left(u(x) \middle| x\right) \right] = \max_{F \in \mathscr{F}_{n-k+1}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \left(u(x) \middle| x\right) \right]$$
3. **Application : le théorème d'entrelacement de Cauchy**
On suppose que G est un hyperplan de E, que p est la projection orthogonale sur G et v l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur G.
Montrer que v est autoadjoint et que, si $\lambda'_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_{n-1}$ sont les valeurs propres de v, alors
$$\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda'_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

Solution de 2 : Théorème du minimax : lemme de Courant-Fischer-Weyl

FGN 7 2.56 et 2.57

3 Décomposition en valeurs singulières

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^\intercal A$ est symétrique positive.
2. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V et des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que
$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) V.$$
On pourra faire un changement de base de la base canonique vers une base orthodiagonalisante de $A^\intercal A$.
3. Le retrouver en utilisant une décomposition polaire.

Solution de 3 : Décomposition en valeurs singulières

FGN 7 2.42

4 Différentielle de l'inverse

Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, puis que l'application $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point.

On pourra commencer par la différentielle en I_n.

Solution de 4 : Différentielle de l'inverse

---

5 Optimisation et convexité

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable).

1. Montrer que si $a, b \in \mathcal{U}$, $\mathrm{d}f(a)(b-a) \leqslant f(b) - f(a)$.
2. Montrer que tout point critique est un minimum global.
3. Montrer que les points critiques forment un ensemble convexe fermé.

Solution de 5 : Optimisation et convexité

---

6 Mines - X

Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \left(\mathrm{tr}\, M, \mathrm{tr}(M^2), \dots, \mathrm{tr}(M^n)\right) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est différentiable en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{d}f(M)$.
2. Relier le rang de $\mathrm{d}f(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution de 6 : Mines - X

1. **Méthode directe** Remarquons d'abord que, par distributivité, si $k \geqslant 2$,

$$(M+H)^k = \underbrace{(M \text{ ou } H) \times (M \text{ ou } H) \times \cdots \times (M \text{ ou } H)}_{k \text{ fois}} = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{0,1\}^k} M^{\varepsilon_1} H^{1-\varepsilon_1} M^{\varepsilon_2} H^{1-\varepsilon_2} \dots M^{\varepsilon_k} H^{1-\varepsilon_k}$$

Or, s'il y a au moins deux ε_i égaux à 0 ,

$$M^{\varepsilon_1} H^{1-\varepsilon_1} M^{\varepsilon_2} H^{1-\varepsilon_2} \dots M^{\varepsilon_k} H^{1-\varepsilon_k} = \underset{H \to 0_n}{\mathrm{o}}(H)$$

(se précise facilement en utilisant une norme sous-multiplicative).
Et comme la trace est continue (linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie), il existe k tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad |\mathrm{tr}(A)| \leqslant k\|A\|$$

ce qui montre que, si au moins deux ε_i sont égaux à 0 ,

$$\mathrm{tr}\left(M^{e_1} H^{1-\varepsilon_1} M^{e_2} H^{1-\varepsilon_2} \dots M^{e_k} H^{1-\varepsilon_k}\right) = \underset{H \to 0_n}{\mathrm{o}}(H)$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left((M+H)^k\right) &= \mathrm{tr}\left(M^k\right) + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{tr}\left(M^{i-1} H M^{k-i}\right) + \underset{H \to 0_n}{\mathrm{o}}(H) \\ &= \mathrm{tr}\left(M^k\right) + k\, \mathrm{tr}\left(M^{k-1} H\right) + \underset{H \to 0_n}{\mathrm{o}}(H)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\mathrm{d}f(M) : H \mapsto \left(\mathrm{tr}(H), 2\,\mathrm{tr}(MH), \dots, n\, \mathrm{tr}\left(M^{n-1} H\right)\right)}$$

Par opérations Soit $g_k : M \mapsto M^k$. On a $f_k = \mathrm{tr} \circ g_k : M \mapsto \mathrm{tr}\left(M^k\right)$.
Comme tr est linéaire et $(M_1, \dots, M_k) \longmapsto M_1 \times \cdots \times M_k$ est k-linéaire, f_k est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{d}f_k(M) : H \longmapsto \mathrm{tr}\left(\mathrm{d}g_k(M)(H)\right) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{k} M^{i-1}\, \mathrm{d}\left(\mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right)(M)(H) M^{k-i}\right) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{k} M^{i-1} H M^{k-i}\right) = k\, \mathrm{tr}\left(M^{k-1} H\right)$$

ce qui redonne l'expression $\boxed{\mathrm{d}f(M) : H \mapsto \left(\mathrm{tr}(H), 2\,\mathrm{tr}(MH), \dots, n\, \mathrm{tr}\left(M^{n-1} H\right)\right).}$

2. Pour calculer le rang de $\mathrm{d}f(M)$, on cherche par exemple son noyau. On remarque successivement :

$$H \in \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(M)\big) \iff \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \mathrm{tr}\big(M^k H\big) = 0$$

puis, par combinaison linéaire :

$$H \in \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(M)\big) \iff \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \mathrm{tr}(P(M)H) = 0$$

Or on sait d'après le cours que si $d = \deg \pi_M \leqslant n$, $\big(I_n, M, \dots, M^{d-1}\big)$ est une base de $\mathbb{R}[M]$, c'est aussi bien sûr une base de $\mathbb{R}_{d-1}[M]$ et comme $d \leqslant n$, $\mathbb{R}[M] = \mathbb{R}_{d-1}[M] = \mathbb{R}_{n-1}[M]$ ce qui permet de conclure

$$H \in \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}f(M)\big) \iff \forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \mathrm{tr}(P(M)H) = 0$$

Ceci signifie que

$$H \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(M)) \iff H^\intercal \in \mathbb{R}[M]^\perp$$

en considérant le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc

$$\mathrm{rg}(\mathrm{d}f(M)) = n^2 - \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f(M)) = n^2 - \big(n^2 - \dim \mathbb{R}[X]\big) = d = \deg \pi_M$$

On a montré que $\boxed{\mathrm{rg}(\mathrm{d}f(M)) \text{ est bien le degré du polynôme minimal de } M.}$

3. Il reste à montrer que

$$\boxed{\big\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(\mathrm{d}f(M)) = n\big\} \text{ est ouvert.}}$$

Or c'est l'image réciproque par $\mathrm{d}f$, continue (car f est de classe $\mathscr{C}^1$, polynomiale en les cœfficients de M), de

$$\big\{u \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n\right),\ \mathrm{rg}\, u = n\big\}.$$

Le fait que ce dernier ensemble soit un ouvert est plus facile à voir matriciellement :

$$\big\{A \in \mathscr{M}_{n,n^2}(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}\, A = n\big\} \text{est ouvert.}$$

En effet, si A est dans cet ensemble, on peut sélectionner n colonnes de A définissant une matrice extraite inversible. Au voisinage de A, par continuité du déterminant, cette même matrice extraite restera inversible. Elle est donc de rang au moins n, et vu son nombre de lignes, au plus n, donc exactement n.
Remarque : c'est la semi-continuité inférieure du rang. On montre plus généralement qu'en toutes circonstances,

$$\big\{A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}(A) \geqslant r\big\} \text{ est un ouvert}$$

en s'aidant que d'une matrice de cet ensemble on peut toujours extraire une matrice carrée $r \times r$ inversible, et en utilisant la continuité du déterminant.

---

7 Vous reprendrez encore du principe variationnel ?

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(E)$.

1. Montrer que $f : x \in E \mapsto \big(u(x) \big| x\big)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point.
2. Montrer que $F : x \in E \setminus \{0_E\} \mapsto \dfrac{\big(u(x) \big| x\big)}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E \setminus \{0_E\}$ et que ses points critiques sont les vecteurs propres de u.

Solution de 7 : Vous reprendrez encore du principe variationnel ?
