TD ✻ ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS, CALCUL DIFFÉRENTIEL

1 Un prolongement au principe variationnel

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(E)$.

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $\dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}$ lorsque x parcourt $E \setminus \{0_E\}$.

2 Théorème du minimax : lemme de Courant-Fischer-Weyl

Soit E euclidien de dimension n, u un endomorphisme autoadjoint de E, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de u , $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthodiagonalisante de u, e_i étant un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $E_k = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)$ et $F_k = \mathrm{Vect}(e_k,\ldots,e_n)$. Montrer que
$$\lambda_k = \max_{\substack{x\in E_k\\ \|x\|=1}} (u(x)|x) = \min_{\substack{x\in F_k\\ \|x\|=1}} (u(x)|x).$$
2. Soit $\mathscr{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces de E de dimension k. Montrer que
$$\lambda_k = \min_{F\in\mathscr{F}_k}\left[\max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (u(x)|x)\right] = \max_{F\in\mathscr{F}_{n-k+1}}\left[\min_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} (u(x)|x)\right]$$
3. **Application : le théorème d'entrelacement de Cauchy**
On suppose que G est un hyperplan de E, que p est la projection orthogonale sur G et v l'endomorphisme induit par $p\circ u$ sur G.
Montrer que v est autoadjoint et que, si $\lambda'_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_{n-1}$ sont les valeurs propres de v, alors
$$\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda'_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

3 Décomposition en valeurs singulières

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^\intercal A$ est symétrique positive.
2. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V et des réels positifs $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que
$$A = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)V.$$
On pourra faire un changement de base de la base canonique vers une base orthodiagonalisante de $A^\intercal A$.
3. Le retrouver en utilisant une décomposition polaire.

4 Différentielle de l'inverse

Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert, puis que l'application $M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1}$ est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point.
On pourra commencer par la différentielle en I_n.

5 Optimisation et convexité

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathscr{U} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable).

1. Montrer que si $a,b \in \mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a)(b-a) \leqslant f(b) - f(a)$.
2. Montrer que tout point critique est un minimum global.
3. Montrer que les points critiques forment un ensemble convexe fermé.

6 Mines - X

Soit $f : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \left(\mathrm{tr}\,M, \mathrm{tr}\left(M^2\right),\ldots,\mathrm{tr}(M^n)\right) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est différentiable en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{d}f(M)$.
2. Relier le rang de $\mathrm{d}f(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7 Vous reprendrez encore du principe variationnel ?

Soit E euclidien et $u \in \mathscr{S}(E)$.

1. Montrer que $f : x \in E \mapsto (u(x)|x)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle en tout point.
2. Montrer que $F : x \in E\setminus\{0_E\} \mapsto \dfrac{(u(x)|x)}{\|x\|^2}$ est différentiable sur $E\setminus\{0_E\}$ et que ses points critiques sont les vecteurs propres de u.