1 Calcul d'une exponentielle de matrice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à A.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de u est B.
2. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$. Quel est le polynôme minimal de B ?
3. Calculer $\exp(tB)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Solution de 1 : Calcul d'une exponentielle de matrice

FGN 7 4.1

1. Développer χ_A par rapport à la première colonne et trouver $\chi_A = (X-1)^3(X-2)^2$. Choisir une base adaptée dans la décomposition en sous-espaces caractéristiques.
   On a besoin de montrer que $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)^2 \subsetneq \operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)^3$ qui est de dimension 3.
   Pour cela, on vérifie que $\dim(\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)) = 1$ et applique le théorème du rang à $v|_{\operatorname{Im} v}$ où $v = u - \mathrm{id}_E$, de noyau $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} v$ et d'image $\operatorname{Im} v^2$. On obtient $4 = \operatorname{rg} v = \operatorname{rg} v^2 + \dim(\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} v) \leqslant \operatorname{rg} v^2 + 1$.
   D'où $\operatorname{rg} v^2 \geqslant 3$ puis $\dim \operatorname{Ker} v^2 = \dim \operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)^2 \leqslant 5-3 = 2 < \dim \operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)^3 = 3$.
   La restriction de $u - \mathrm{id}_E$ à $\operatorname{Ker}(u-\mathrm{id}_E)^3$ est donc nilpotente d'indice 3 d'où la forme de la matrice.
2. $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
   $\pi_B = \chi_B = (X-1)^3(X-2)^2$.
3. $\exp(tB) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & t^2\mathrm{e}^t/2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$.

2 X-ENS

Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation

$$\sin M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra séparer les cas $a \neq 0$ et $a = 0$.

Solution de 2 : X-ENS

FGN 7 4.2

- Si $a \neq 0$, vérifier que le commutant de $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
  Ne trouver aucune solution dans ce cas en vérifiant $\sin M = \sin\alpha I_2 + \beta\cos\alpha N$ avec l'impossibilité d'avoir $\sin\alpha = 1$ et $\beta\cos\alpha \neq 0$.
- Si $a = 0$, vérifier que les valeurs propres sont de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$: en effet, si X est vecteur propre associé à λ, alors $\sin(M)X = \sin(\lambda)X$, donc $\sin\lambda = 1$. La difficulté est qu'il s'agit d'un sinus complexe a priori.
  Mais on peut écrire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} = 2\mathrm{i}$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$ racine du trinôme $X^2 - 2\mathrm{i}X - 1 = (X-\mathrm{i})^2$, donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} = \mathrm{i}$ donc $\mathrm{e}^{-\mathfrak{Im}\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathfrak{Re}\lambda} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ donc $\mathfrak{Im}\lambda = 0$ et $\mathfrak{Re}\lambda = \lambda = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
  Puis séparer les cas M diagonalisable ou non.
  - Si oui, $\sin M = P\sin D P^{-1} = P I_2 P^{-1} = I_2$ vu les valeurs propres de M.

- ⋆ Si non, M trigonalisable sous la forme $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ et se retrouver la discussion du cas précédent.

On trouve finalement qu'il y a des solutions si et seulement si $a=0$, et que ce sont toutes les matrices dont le spectre est inclus dans $\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$.

3 X-ENS

Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=\exp A$.
On suppose que les cœfficients non diagonaux de A sont tous positifs.
Montrer que les cœfficients de B sont tous positifs.

Solution de 3 : X-ENS

FGN 7 4.4

Écrire $\exp A=\exp(A+\lambda I_n)\exp(-\lambda I_n)$ où $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left|a_{i,i}\right|$.

4 X-ENS – Autour de la fonction exponentielle

1. Montrer que la restriction de $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'ensemble des matrices diagonalisables est injective.
2. Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   Pour la continuité de la réciproque, on pourra s'intéresser à des suites extraites et utiliser le rayon spectral.
3. Montrer que $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ des matrices nilpotentes dans l'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})=I_n+\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ des matrices unipotentes.
   On pourra poser $\psi:N\in\mathcal{N}_n(\mathbb{K})\mapsto\exp N-I_n$ puis s'inspirer et utiliser des développements limités.
4. En déduire que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))=\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
5. Déterminer $\exp^{-1}(\{I_n\})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
6. Déterminer l'algèbre de Lie de $\mathcal{SO}(n)$:

$$\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, t\in\mathbb{R},\ \ \exp(tA)\in\mathcal{SO}(n)\}.$$

Solution de 4 : X-ENS – Autour de la fonction exponentielle

FGN 7

1. Soient A,B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp A=\exp B$. On montre que $A=B$.
   Le résultat est clair si A et B sont diagonales.
   Pour s'y ramener, on a besoin de codiagonaliser A et B. On montre donc que A et B commutent.
   On a déjà que A commute avec $\exp A=\exp B$.
   On vérifie alors que B est un polynôme en $\exp B$.
   En diagonalisant $B=PDP^{-1}$ où $D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$,
   $$\exp B=P\exp DP^{-1}.$$
   Il suffit de trouver un polynôme Q tel que pour tout k, $Q\left(\mathrm{e}^{d_k}\right)=d_k$, par exemple avec de l'interpolation de Lagrange.
2.
   - On a déjà que si S est symétrique, $\exp S$ est symétrique définie positive.
     La symétrie provient de la continuité de l'application linéaire de transposition, et en diagonalisant S, on obtient que les valeurs propres de $\exp S$ sont les exponentielles de celles de S, donc sont >0. Donc
     $$\exp:\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$
     est bien définie.
   - Réciproquement, si $A\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on l'orthodiagonalise en $A=PDP^{-1}=PDP^{\intercal}$ où $D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ et on voit que $A=\exp S$ où
     $$S=P\,\mathrm{diag}(\ln d_1,\dots,\ln d_n)P^{\intercal}.$$
     D'où la surjectivité.
   - Le théorème spectral et la question précédente donnent l'injectivité.

- Reste à montrer la bicontinuité.
  On sait déjà que $\exp$ est continue, on cherche donc à montrer la continuité de la réciproque.
  On utilise la caractérisation séquentielle : soit $A_k \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
  Notons S_k (respectivement S) l'unique matrice symétrique telle que $\exp S_k = A_k$ (respectivement $\exp S = A$).
  Le but est alors de montrer que $S_k \to S$.
  Or on vérifie que la seule valeur d'adhérence de (S_k) est S. En effet, si $S_{\varphi(k)} \to S'$, alors $A_{\varphi(k)} \to \exp S' = A = \exp S$ puis $S' = S$ par injectivité.
  Il reste à vérifier que (S_k) est bornée pour conclure : elle sera à valeurs dans un compact (fermé borné en dimension finie) avec une unique valeur d'adhérence, donc convergente.
  On utilise pour cela le rayon spectral, vérifiant $\rho(S) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} S} |\lambda| = |||S|||$ pour $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, classiquement.
  comme la suite (A_k) est convergente, elle est bornée par un certain $C > 0$ pour la norme triple, donc toutes ses valeurs propres (positives) sont majorées par C.
  Ainsi, toutes les valeurs propres de S_k sont majorées par $\ln C$.
  Mais ces dernières ne sont pas nécessairement positives, il faut donc aussi les minorer.
  Pour ce faire, on utilise $A_k^{-1} \to A^{-1}$ par continuité de $M \mapsto M^{-1}$ (formule de la comatrice).
  Donc toutes les valeurs propres des A_k^{-1} sont majorées par $C' > 0$ et toutes les valeurs propres des S_k sont majorées par $-\ln C'$.
  Bref, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|||S_k||| \leqslant \max(|\ln C|, |\ln C'|)$, donc la suite (S_k) est bornée, avec une unique d'adhérence S ce qui permet d'obtenir sa convergence vers S et de conclure.

3. Soit N matrice nilpotente. On sait que son indice de nilpotence est au plus égal à n (c'est une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton).
   Alors $\exp N = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k = I_n + M$ où $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k$ est nilpotente en tant que somme de matrices nilpotentes commutant deux à deux (ou alors car $M = N P(N)$ où P est un polynôme).
   On a donc bien
   $$\exp : \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{U}_n(\mathbb{K})$$
   Pour montrer que cette application est bijective, on montre que $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \\ N & \longmapsto & \exp N - I_n \end{array} \right.$ l'est.
   Dans le cas réel (c'est-à-dire $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^x - 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ est bijective de réciproque $x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ qui se développe en série entière sur $]-1, 1[$ en
   $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$
   Posons alors $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \\ N & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k \end{array} \right.$ et vérifions qu'il s'agit de l'inverse de ψ.
   L'ensemble d'arrivée de φ est bien $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ pour les mêmes raisons que ψ.
   Posons $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$, de telle sorte que $\psi : N \mapsto P(N)$ et $\varphi : N \mapsto Q(N)$.
   Ainsi, $\psi \circ \varphi : N \mapsto (P \circ Q)(N)$. Pour le calculer, on a seulement besoin de la troncature R de $P \circ Q$ à la puissance $n-1$.
   Or $\mathrm{e}^x - 1 = P(x) + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$ et $\ln(1+x) = Q(x) + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$, donc
   $$x = \mathrm{e}^{\ln(1+x)} - 1 = P \circ Q(x) + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right) = R(x) + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right).$$
   Par unicité des cœfficients du développement limité, $R = X$ donc
   $$\psi \circ \varphi : N \mapsto R(N) = N.$$
   On montre de la même manière que
   $$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathscr{N}_n(\mathbb{K})}.$$
   Donc ψ est bijective, et alors $\boxed{\exp : \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{U}_n(\mathbb{K}) \text{ est aussi bijective.}}$
   Remarque : on a même que $\exp$ induit un homéomorphisme de $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{U}_n(\mathbb{K})$.

4. On a déjà $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) \subset \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$. On montre que A peut s'écrire sous forme exponentielle.
Comme on est dans $\mathbb{C}$, on peut réduire à l'aide des sous-espaces caractéristique A en une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont de la forme $D_k = \lambda_k I_{n_k} + N_k$ où $N_k \in \mathscr{N}_{n_k}(\mathbb{C})$.
Comme, par inversibilité, $\lambda_k \neq 0$, on peut poser $N'_k = \dfrac{1}{\lambda_k} N_k$ nilpotente telle que $D_k = \lambda_k(I_{n_k} + N'_k)$ avec
$$I_{n_k} + N'_k \in \mathscr{U}_{n_k}(\mathbb{C}) = \exp\left(\mathscr{N}_{n_k}(\mathbb{C})\right)$$
donc on a $A_k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $I_{n_k} + N'_k = \exp(A_k)$ d'après la question précédente.
Comme, de plus, $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$, il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^{\mu_k} = \lambda_k$ et alors $D_k = \exp(\mu_k A_k)$.
On obtient alors $A = P \operatorname{diag}(\exp(\mu_1 A_1), \ldots, \exp(\mu_p A_p))P^{-1} = \exp\left(P \operatorname{diag}(\mu_1 A_1, \ldots, \mu_p A_p)P^{-1}\right) \in \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$.
5. L'idée est la même que dans la question précédente : on réduit grâce aux sous-espaces caractéristiques $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en $\operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_p)$ où les $D_k = \lambda_k I_{n_k} + N_k$ avec $N_k \in \mathscr{N}_{n_k}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure stricte.
Ainsi, $\exp A = I_n$ est équivalent à pour tout k, $I_{n_k} = \exp(D_k) = \mathrm{e}^{\lambda_k} \displaystyle\sum_{j=0}^{n_k-1} N_k^j$.
Cela équivaux à $\mathrm{e}^{\lambda_k} = 1$ en regardant les cœfficients diagonaux et $N_k P(N_k) = O_{n_k}$ où $P = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_k-1} \frac{X^{j-1}}{j!}$. Vu le cœfficient constant 1 de P, $P(N_k)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc inversible et alors $N_k P(N_k) = O_{n_k}$ équivaut à $N_k = O_{n_k}$.
Bref, $\exp A = I_n$ si et seulement si toutes les N_k son nulles et pour tout k, $\mathrm{e}^{\lambda_k} = 1$, si et seulement si
$$\boxed{A \text{ diagonalisable et } \operatorname{Sp} A \subset 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}.}$$
6. Soit $A \in \mathscr{A}$. En dérivant la relation $\exp(tA)\exp(tA^\intercal) = I_n$, on obtient
$$0_n = A\exp(tA)\exp(tA^\intercal) + \exp(tA)\exp(tA^\intercal)A^\intercal.$$
En prenant $t = 0$, on obtient $A + A^\intercal = O_n$: $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$\exp(tA)(\exp(tA))^\intercal == \exp(tA)\exp(tA^\intercal) = \exp(tA)\exp(-tA) = I_n$$
et $\det(\exp(tA)) = \exp(\operatorname{tr}(tA)) = \exp(t \operatorname{tr} A) = \mathrm{e}^0 = 1$ (la première relation s'obtient en trigonalisant dans $\mathbb{C}$), donc $A \in \mathscr{A}$.
Finalement, $\boxed{\mathscr{A} = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).}$

5 X-ENS - Centrale – Formules de Lie

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_p(A) = \left(I_n + \dfrac{1}{p}A\right)^p$.

1. Montrer que la suite $(f_p)_{p\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle en est la limite ?
2. Montrer, en utilisant des développements limités, que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\left(\exp\left(\frac{1}{p}A\right)\exp\left(\frac{1}{p}B\right)\right)^p \xrightarrow[p\to\infty]{} \exp(A+B)$$
$$\left(\exp\left(\frac{1}{p}A\right)\exp\left(\frac{1}{p}B\right)\exp\left(-\frac{1}{p}A\right)\exp\left(-\frac{1}{p}B\right)\right)^{p^2} \xrightarrow[p\to\infty]{} \exp(AB-BA)$$
3. Soit G sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et
$$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \ \exp(tM) \in G\}$$
(algèbre de Lie du groupe G).
Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par quelle autre opération $\mathcal{G}$ est-il stable ?

Solution de 5 : X-ENS - Centrale – Formules de Lie

Source : FGN 7 4.9

1. Dans le cas $n=1$, il est bien connu que la suite de fonctions $(f_p)_{p\geqslant 1}$, où $f_p : x \mapsto \left(1+\frac{x}{p}\right)^p$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$. On montre que $f_p(A)$ converge vers $\exp A$ et de manière uniforme sur un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en utilisant ce résultat. On fixe une norme multiplicative quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On développe $f_p(A)$ par la formule du binôme de Newton et on remplace $\exp A$ par la somme de sa série que l'on coupe au rang p. Il vient
$$\left\|\exp A - f_p(A)\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{k!} - \frac{p!}{k!(p-k)!p^k}\right)A^k\right\| + \sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}$$
Il s'avère que le coefficient
$$\frac{1}{k!} - \frac{p!}{k!(p-k)!p^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{p}\right)\right)$$
est positif. On a donc
$$\left\|\exp A - f_p(A)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{k!} - \frac{p!}{k!(p-k)!p^k}\right)\|A\|^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}$$
Supposons que A soit dans un compact K de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donnons-nous $M>0$ tel que $\|A\| \leqslant M$ pour tout $A \in K$. On a alors
$$\left\|\exp A - f_p(A)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{k!} - \frac{p!}{k!(p-k)!p^k}\right)\mathrm{M}^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{M}^k}{k!} \leqslant e^{\mathrm{M}} - \left(1+\frac{\mathrm{M}}{p}\right)^p$$
Le majorant tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, ce qui donne le résultat voulu.
2. On utilise des développements limités. Lorsque p tend vers l'infini, on a
$$\exp\left(\frac{A}{p}\right) = \mathrm{I}_n + \frac{A}{p} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{p}\right)$$
en découle que
$$\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p = f_p(A+B+\mathrm{o}(1)) = f_p\left(A+B+\mathrm{C}_p\right)$$
où $\left(C_p\right)$ est une suite de matrices convergeant vers 0.
Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{M} > \|A+B\|$.
La suite $\left(f_p\right)$ converge uniformément sur la boule $\mathcal{B}$ fermée, centrée en 0, de rayon M.
Fixons p_0 tel que pour tout $p \geqslant p_0$ et tout $\mathrm{X} \in \mathcal{B}$, on ait $\left\|f_p(\mathrm{X}) - \exp(\mathrm{X})\right\| \leqslant \varepsilon$.
Pour p assez grand, $A+B+\mathrm{C}_p \in \mathcal{B}$ donc, par l'inégalité triangulaire, on a
$$\begin{aligned}\left\|f_p\left(A+B+\mathrm{C}_p\right) - e^{A+B}\right\| &\leqslant \left\|f_p\left(A+B+\mathrm{C}_p\right) - e^{A+B+\mathrm{C}_p}\right\| + \|e^{A+B+\mathrm{C}_p} - e^{A+B}\| \\ &\leqslant \varepsilon + \left\|e^{A+B+\mathrm{C}_p} - e^{A+B}\right\|\end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle, on a $\left\|f_p\left(A+B+C_p\right)-e^{A+B}\right\| \leqslant 2\varepsilon$, pour p assez grand. Ainsi

$$\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p = f_p(A+B+o(1))$$

converge vers la matrice $\exp(A+B)$.
On procède de même pour la seconde limite mais avec un développement limité à l'ordre 2. On a

$$\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right) = I_n + \frac{A+B}{p} + \frac{A^2+2AB+B^2}{2p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

et de même pour les autre termes en replaçant A et B par $-A$ et $-B$. En faisant le produit il vient

$$\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\exp\left(-\frac{A}{p}\right)\exp\left(-\frac{B}{p}\right) = I_n + \frac{AB-BA}{p^2} + 0\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

et donc

$$\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\exp\left(-\frac{A}{p}\right)\exp\left(-\frac{B}{p}\right)\right)^{p^2} = f_{p^2}(AB-BA+o(1))$$

On conclut comme précédemment.

3. Il est clair que $\mathscr{G}$ contient la matrice nulle car $I_n \in G$ et que G est stable par produit par un scalaire. Montrons la stabilité par la somme. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{G}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ la matrice $\left(\exp\left(\frac{tA}{p}\right)\exp\left(\frac{tB}{p}\right)\right)^p$ est dans G puisque G est stable par produit.
Comme G est fermé, la limite lorsque p tend vers l'infini, qui vaut $\exp(t(A+B))$ est encore dans G.
Ainsi $A+B \in \mathscr{G}$ et $\boxed{\mathscr{G} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$
À l'aide de la seconde limite ci-dessus on voit de même que si A et B sont dans $\mathscr{G}$ alors $\boxed{AB-BA=[A,B]\in\mathscr{G}.}$