Calcul différentiel [II]

Exercices traités en cours

1 Montrer que $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & M^2\end{array}\right.$ est différentiable en toute $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer $\mathrm{d}f(A)$.

2 Montrer que, si E est un espace euclidien $f:\left|\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \|x\|^2\end{array}\right.$ est différentiable en toute $a\in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$.

3 Montrer que, si E est un espace euclidien, $u\in\mathscr{L}(E)$, $f:\left|\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & (x|u(x))\end{array}\right.$ est différentiable en toute $a\in E$ et calculer $\mathrm{d}f(a)$. Que se passe-t-il si, de plus, u est symétrique ?

Différentielle

- Pour déterminer la différentielle d'une application (différentiable), on peut passer par la définition en formant un développement limité à l'ordre 1 et en reconnaissant une partie linéaire et une partie négligeable, passer par la dérivée selon un vecteur : $\mathrm{d}f(a)(v)=\mathrm{D}_v f(a)=\phi'(0)$ où $\phi: t\mapsto f(a+tv)$ ou encore passer par les dérivées partielles.

4 Montrer que $f: M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mapsto M^\intercal M$ est différentiable et calculer sa différentielle.

5 **Différentielle de l'inverse**

1. Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
2. Calculer, pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(I_n-H)(I_n+H)$.
3. En déduire que $f: M\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})\mapsto M^{-1}$ est différentiable en I_n et déterminer l'application $\mathrm{d}f(I_n)$.
4. Montrer que f est différentiable sur $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en toute $M\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.

6 **Écrit CCINP** Dans cet exercice, $\|\cdot\|$ désigne une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. c'est-à-dire une norme vérifiant. pour tout couple (A,B) de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\times B\|\leqslant\|A\|\times\|B\|$.

1. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}A^k$ converge. On notera e^A sa somme.
2. Démontrer que l'application $A\mapsto \mathrm{e}^A$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Si $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r>0$, déterminer la limite de $\frac{1}{\|H\|}\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k$ lorsque H tend vers O_n.
   En déduire que l'application $A\mapsto\mathrm{e}^A$ est différentiable en la matrice O_n.
   On précisera sa différentielle en O_n.

7 **Oral Mines** Dans un espace euclidien E, montrer que l'application $x\mapsto\frac{x}{\|x\|^2}$ est différentiable en tout point de $E\setminus\{0_E\}$ et calculer sa différentielle.

[*On utilisera deux méthodes : calcul direct de la différentielle (retour à la définition), et calcul des dérivées partielles, relatives à une base qu'on a évidemment intérêt à choisir orthonormale*]

8 **Différentielle du déterminant** La classe $\mathscr{C}^1$ de l'application $\det: A\longrightarrow\det A$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne fait guère de doute : c'est une application polynomiale en les coefficients de A. Mais le calcul de sa différentielle est plein d'intérêt.

Dans la suite, on notera $\frac{\partial}{\partial a_{i,j}}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ les dérivations partielles relatives à la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer, pour toute matrice A, la dérivée partielle $\frac{\partial\det}{\partial a_{i,j}}(A)$ à l'aide d'un coefficient de la comatrice $\mathrm{Com}\,A$ de A.
   ⚠ *Il s'agit d'une question facile !*
2. En déduire l'expression, si $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathrm{d}(\det)(A)(H)$.
   (*On utilisera encore la comatrice, et on fera par exemple intervenir la trace*).
3. **Applications**
   (a) On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$. Déterminer pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le gradient du déterminant en A, c'est-à-dire l'unique matrice $\nabla\det(A)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que
   $$\forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H)=(\nabla\det(A)\mid H).$$
   (b) (*Souvenirs d'algèbre linéaire...*) Trouver une condition nécessaire et suffisant sur A pour que $\mathrm{d}(\det)(A)=0$ (on désigne ici par simplement par 0 l'application $H\to 0$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$).

9 **Optimisation et convexité**

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f:\mathscr{U}\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, convexe (la définition est la même que pour les fonctions d'une variable).

1. Montrer que si $a,b\in\mathscr{U}$, $\mathrm{d}f(a)(b-a)\leqslant f(b)-f(a)$.
2. Montrer que tout point critique est un minimum global.
3. Montrer que les points critiques forment un ensemble convexe fermé.

10 **Inégalité des accroissements finis**

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert convexe de E $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f:\mathscr{U}\mapsto E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

On suppose qu'il existe un réel $C\geqslant 0$ tel que pour tout $x\in\mathscr{U}$, $|||\mathrm{d}f(x)|||\leqslant C$, $|||\cdot|||$ désignant la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur E.

Montrer en utilisant une intégrale que
$$\forall a,b\in\mathscr{U},\ \left\|f(b)-f(a)\right\|\leqslant C\|b-a\|$$

Espace tangent

- Pour déterminer les vecteurs tangents ou l'hyperplan tangent à une surface, on utilise une équation implicite $g(x)=0_R$ avec g différentiable.
  On a des vecteurs tangents en a si le point a est régulier ie $\mathrm{d}g(a)\neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}$, ce sont les vecteurs de $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}g(a))$ et l'hyperplan tangent est d'équation $\mathrm{d}g(a)(x-a)=0$ ou encore, si on a une structure euclidienne, $(\nabla g(a)|x-a)=0$.

11 Déterminer une équation du plan tangent à la surface d'équation $xy+xz+2x+2y-z=0$ au point $(0,0,0)$.

12 Déterminer une équation du plan tangent à la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$ (hyperboloïde à une nappe) en un point régulier.

13 Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathscr{SL}_n(\mathbb{R})=\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det M=1\}$ en I_n puis $M\in\mathscr{SL}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathscr{O}(n)$ en I_n puis $M\in\mathscr{O}(n)$.