

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercices Banque CCINP

1 CCINP 31

3 CCINP 42

5 CCINP 75

2 CCINP 32

4 CCINP 74

Autres exercices vus en cours

6 Résoudre $y^{(4)} = y$ en utilisant le lemme de décomposition des noyaux.7 Soit $\Phi : J \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une solution d'une équation homogène

$$X' = A(t)X \quad (H)$$

où $A : J \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur l'intervalle J . Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$$

(et donc, pour insister, $\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$).8 Soit T un réel > 0 , $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continues et T -périodiques. Montrer qu'une solution Φ sur \mathbb{R} de l'équation

$$X' = A(t)X + B(t)$$

est T périodique si et seulement si elle vérifie $\Phi(T) = \Phi(0)$ *Indication : on remarquera que Φ est T -périodique si et seulement si $\Phi = \Psi$ où $\Psi : t \mapsto \Phi(t+T)$.*

9 On souhaite déterminer un système fondamental de solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

1. Chercher un système dont sont solutions les fonctions $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$, et conclure.2. Retrouver le résultat en posant $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Solution de 9 :

On se ramène à $u' = -v$ et $v' = u$ avec en particulier $u'' = -u$. D'où un système fondamental de solution $\left(t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{t^2/2}, t \mapsto \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{t^2/2} \right)$.

10 Dans des problèmes d'écrit...

1. Soit a une fonction continue sur \mathbb{R} , paire, à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y = 0$$

est impaire si et seulement si elle vérifie $f(0) = 0$.2. Soit a, b deux fonctions T -périodiques continues à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation

$$y'' + a(x)y' + a(x)y = 0$$

est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$ et $f'(0) = f'(T)$.3. On suppose que a et b sont deux fonctions continues sur \mathbb{R} , à valeurs réelles ou complexes. Soit (f, g) une base de l'espace des solutions de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Montrer que f et g ne peuvent pas être toutes les deux paires ni toutes les deux impaires (l'énoncé dit « par exemple en utilisant le wronskien »).

Solution de 10 : Dans des problèmes d'écrit...

1. Une implication est évidente. Pour l'autre, f est paire si et seulement si $f = -\widehat{f}$ où $\widehat{f} : x \mapsto f(-x)$. Or f est solution si et seulement si $-\widehat{f}$ l'est. Il suffit alors d'utiliser l'unicité d'une solution au problème de Cauchy avec $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $y'_0 = f'(0)$ 2. Utiliser le théorème d'unicité, appliqué à f et $x \mapsto f(x+T)$ où ϕ est une solution.

3. Si elle sont impaires, elle sont nulles en 0, leur wronskien est nul. Si elles sont paires, leurs dérivées sont impaires, même chose. On peut aussi conclure en utilisant le théorème d'existence et une contradiction.

11 Déterminer, en utilisant le wronskien, un système fondamental de solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega > 0$.

Solution de 11 :

 $x \mapsto \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \sin(\omega x)$ sont solutions, leur wronskien vaut $\omega \neq 0$.12 Si f et g sont deux solutions de (L) et si $f(x_0) = g(x_0)$, alors on ne peut rien conclure en général.Montrer que néanmoins, deux solutions linéairement indépendantes de (H) ne peuvent s'annuler en un même point x_0 .

Solution de 12 :

Leur wronskien serait nul en x_0 .13 EDL₂ newtoniennes Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (dite newtonienne)

$$y'' + q(x)y = 0$$

vérifie une équation différentielle linéaire particulièrement simple.

Solution de 13 : EDL₂ newtoniennes $w' = 0$, difficile de faire plus simple, et on retrouve le résultat de l'exercice 12.

14 Oral Mines Soient a et b continues et 1-périodiques, et soit y solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que y s'annule en tout $k \in \mathbb{Z}$.

Solution de 14 : Oral Mines

Soit $z : t \mapsto y(t+1)$. Alors z est solution, et $w(y, z)$ est nul en 0. Donc (y, z) est liée. Si $y = \tilde{0}$ il n'y a rien à faire. Sinon, il existe α tel que $z = \alpha y$. On conclut alors par récurrence sur k pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{N}$, puis par récurrence sur $-k$ pour obtenir le résultat si $k \in \mathbb{Z}^-$.

15 Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

16 Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+(H)$ $x^2y'' - 3xy' - 5y = 0$

Solution de 16 :

Équation d'Euler, la recherche de solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ conduit aux solutions $x \mapsto x^{-1}$ et $x \mapsto x^5$, le wronskien permet de voir qu'il s'agit bien d'un système fondamental de solutions.

17 Résoudre sur $]1, +\infty[(H)$ $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Solution de 17 :

On cherche des solutions polynomiales, le terme de plus haut degré nous dit que celui-ci est 1 ou 2.

On cherche alors les solutions $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

On trouve toutes les solutions : $x \mapsto a(x^2 + 1) + bx$ qui forment bien un plan vectoriel.

18 Trouver les solutions DSE de l'équation (H) $2xy'' + y' - y = 0$. Terminer la résolution sur \mathbb{R}_*^+ en posant $t = \sqrt{2x}$.

Solution de 18 :

On cherche les solutions DSE, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)(n+1)a_{n+1} = a_n$. Soit $a_0 = 0$ et il s'agit de la fonction nulle.

Soit $a_0 \neq 0$ et d'Alembert nous donne un rayon de convergence $+\infty$.

On exprime ensuite la solution $f(x) = a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2x})$ si $x \geq 0$ et $a_0 \cos(\sqrt{-2x})$ si $x \leq 0$.

Cela donne une droite de solution engendrée par $x \mapsto \operatorname{ch}(\sqrt{2x})$ sur \mathbb{R}_*^+ .

Il faut trouver une solution indépendante. La variation de la constante donne des calculs pénibles. On peut deviner un $\operatorname{sh}(\sqrt{2x})$...

Effectuons le changement de variable : on pose $z(t) = z(\sqrt{2x}) = y(x) = y(t^2/2)$, et on a bien z deux fois dérivables sur \mathbb{R}_*^+ si et seulement si y l'est.

Puis, pour tout $t > 0$, $z'(t) = t y'(t^2/2)$, $z''(t) = t^2 y''(t^2/2) + y'(t^2/2)$ donc notre équation est équivalente à $z'' = z$ d'où z , d'où nos solutions $x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(\sqrt{2x}) + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{2x})$.

19 Trouver les solutions sur \mathbb{R} de $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$.

Solution de 19 :

Sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto (\sin t + \lambda_k) \cos t$ avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$. (Reconnaître la dérivée d'un quotient en divisant par \cos^2).

Solutions sur $\mathbb{R} : t \mapsto (\sin t + \lambda) \cos t$. Pour le raccord, effectuer un développement limité à gauche et à droite de $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

20 Écrit CCP 2005 Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad xy' - ny = 0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.
2. Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur \mathbb{R} . Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n \geq 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur \mathbb{R} . Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

Solution de 20 : Écrit CCP 2005

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène : $(E_n) \quad xy' - ny = 0$ où n est un entier strictement positif.

1. On obtient sans mal que sur I l'espace des solutions est $\operatorname{Vect}(x \in I \mapsto x^n)$ et sur J , $\operatorname{Vect}(x \in J \mapsto x^n)$.
2. Dans le cas où $n = 1$, une solution y de (E_1) sur \mathbb{R} est aussi solution de (E_1) sur I et sur J , donc sa courbe est réunion de deux demi-droites, et comme dérivable en 0, sa courbe est donc une droite.
En conclusion : l'espace des solutions de (E_1) sur \mathbb{R} est de dimension 1, engendrée par la fonction $x \mapsto x$.

3. Supposons $n > 1$, soit f une solution de (E_n) sur \mathbb{R} , alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \in I \\ \beta x^n & \text{si } x \in J \end{cases}$

En évaluant l'équation en 0, on tire $f(0) = 0$.

La continuité en 0 n'impose aucune condition sur α et β , la dérivabilité non plus car

$$\frac{\alpha x^n - 0}{x} = \alpha x^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$$

et

$$\frac{\beta x^n - 0}{x} = \beta x^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

car $n > 1$.

Réciproquement : toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \alpha x^n & \text{si } x \leq 0 \\ \beta x^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ bien dérivable sur \mathbb{R} et solution de l'équation différentielle.

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les fonctions $h_n : x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ et $g_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ x^n & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Révisions de MP21

21 EDL Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur \mathbb{R}

1. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$
2. $y' + y = te^t + \sin t$
3. $y' - \ln(x)y = x^x$
4. $t^2y' + 2ty = \frac{1}{1+t^2}$
5. $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$
6. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$
7. $ty' - y = \sqrt{|t|}$
8. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
9. $(1+t)^2y'' + (1+t)y' = 2$
10. $(x^2+1)y' + xy = 1$
11. $(t^2+1)^2y' + 2t(t^2+1)y = 1$
12. $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$

Solution de 21 : EDL₁

- Sur $\mathbb{R} : x \mapsto x + \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}$
- Sur $\mathbb{R} : t \mapsto \frac{2t-1}{4}e^t + \frac{\sin t - \cos t}{2} + \lambda e^{-t}$
- Sur $\mathbb{R}_*^+ : x \mapsto x^x + \lambda x^x e^{-x}$
- Sur $I_1 = \mathbb{R}_*^-$ ou $I_2 = \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto \frac{\text{Arctan } t + \lambda_k}{t^2}$
Pas de solution sur \mathbb{R} .
- Sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto (\sin t + \lambda_k) \cos t$ avec $\lambda_k \in \mathbb{K}$.
Solutions sur $\mathbb{R} : t \mapsto (\sin t + \lambda) \cos t$.
- Sur \mathbb{R} , $x \mapsto (\lambda + e^x)e^{-x^2}$
- Sur $I_1 = \mathbb{R}_*^-$ ou $I_2 = \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto \lambda_k t - 2\sqrt{|t|}$
Pas de solution sur \mathbb{R} .
- Sur \mathbb{R} , $x \mapsto (x^2 + \lambda)e^{-x^2}$
- Sur $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$, $t \mapsto \ln^2(1+t) + \lambda_k + \mu_k \ln(1+t)$.
Aucune solution sur \mathbb{R} .
- Sur \mathbb{R} , $x \mapsto \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \lambda}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Sur \mathbb{R} , $t \mapsto \frac{\text{Arctan } t + \lambda}{t^2 + 1}$.
- Sur \mathbb{R} , $1 + \text{ch}^2 + \lambda \text{ch}$.

22 EDL₂ Donner les solutions réelles ou complexes de

- | | |
|--|--|
| 1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 8 \sin t \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$ | 3. $y'' + y = \sin^2(t)$ |
| 2. $y'' - 2y' + y = \text{ch } x$ | 4. $y'' + 4y' + 5y = \text{ch}(2x) \cos x$ |
| | 5. $y'' + 2y' + 2y = 2t - \sin t$ |

Solution de 22 : EDL₂

- $t \mapsto -\frac{4}{5} \cos t - \frac{12}{5} \sin t - e^{-t-\pi} + \frac{1}{5} e^{2(\pi-t)}$
- $x \mapsto \frac{x^2 + Ax + B}{4} e^x + \frac{e^{-x}}{8}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.
- $t \mapsto A \sin t + B \cos t + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{6}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.
Ou, dans \mathbb{C} , $t \mapsto A e^{it} + B e^{-it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2t$ avec $A, B \in \mathbb{C}$.
- $x \mapsto \left(A \cos x + \frac{x+B}{4} \sin x \right) e^{-2x} + \frac{2 \cos x + \sin x}{80} e^{2x}$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.
- $t \mapsto (A \cos t + B \sin t) e^{-t} + t - 1 + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

23 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$.
(On pourra remarquer qu'alors f est deux fois dérivable...)

Solution de 23 :
 $x \mapsto A(\cos(2x) + \sin(2x)) + \frac{2x-1}{4} = \lambda \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2x-1}{4}$.

24 En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications f deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Solution de 24 :
 $x \mapsto A \text{sh } x + B \cos x - x + \frac{\cos x + x \sin x}{2}$.

Sujets d'écrits

25 CCP 2016 On considère l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ ($r > 0$) de \mathbb{R} ?

Solution de 25 : CCP 2016
Supposons que l'équation différentielle (E) possède une solution développable en série entière sur $] -r, r[$ (avec $r > 0$), notée $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En dérivant deux fois cette série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient pour tout $x \in] -r, r[$:

$$(x^2 - x)y'(x) = (x^2 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n,$$

ainsi que

$$x^2 y''(x) = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

En sommant ces développements en série entière, il vient, pour tout $x \in] -r, r[$:

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + (x^2 - x)y'(x) + 2y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} ((n^2 - 2n + 2) a_n + (n-1) a_{n-1}) x^n + 2a_0. \end{aligned}$$

Puisque y est solution de (E), on obtient par unicité du développement en série entière les relations $\begin{cases} 2a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, (n^2 - 2n + 2) a_n + (n-1) a_{n-1} = 0 \end{cases}$.

Puisque $n^2 - 2n + 2 = 1 + (n-1)^2 \neq 0$, ces relations se réécrivent $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, a_n = \frac{1-n}{1+(n-1)^2} a_{n-1} \end{cases}$, ce qui entraîne la nullité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une récurrence immédiate. En conclusion, on a montré qu'une telle solution est nécessairement la fonction nulle. Il n'existe donc pas de solution non nulle de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

$$(E): x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur \mathbb{R} vérifiant (E) sur \mathbb{R} tout entier.

- Donner la dimension des espaces S^+ et S^- .
- On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J .
Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.
- Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où $(E): x^2 y'' + x y' = 0$.
Déterminer S^+ et S^- .
Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S .
- Dans cette question $(E): x^2 y'' - 6x y' + 12y = 0$.
Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).
En déduire S^+ puis S^- .
Déterminer S et donner la dimension de S .
- Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E): x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).
On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Solution de 26 : CCP 2014

- Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation (E) se réécrit sous forme résolue $y'' + \frac{a(x)}{x^2} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0$.
Les fonctions $x \mapsto \frac{a(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur I et l'équation est linéaire homogène d'ordre 2.
Donc par théorème, S^+ est de dimension 2 et de même, S^- est de dimension 2.
- Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors f est nulle sur les intervalles I et J donc sur \mathbb{R}^* .
Par continuité de f en 0, $f(0) = 0$.
Donc $f = 0$ ce qui montre que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
 φ étant une application linéaire injective, elle définit un isomorphisme de S sur $\mathcal{I}\mathfrak{m}(\varphi)$.
Or $\mathcal{I}\mathfrak{m}(\varphi)$ est un sev de $S_1 \times S_2$ qui est un ev de dimension $2+2=4$.
Donc $\mathcal{I}\mathfrak{m}(\varphi)$ est un ev de dimension finie et $\dim(\mathcal{I}\mathfrak{m}(\varphi)) \leq 4$.
Étant isomorphe à $\mathcal{I}\mathfrak{m}(\varphi)$, S est aussi de même dimension finie ce qui donne $\dim(S) \leq 4$.
- Soit $I_0 \in \{I, J\}$ (l'un des deux intervalles...)
Sur I_0 , l'équation est équivalente à $y'' + \frac{1}{x} y' = 0$ soit au système $\begin{cases} z' + (1/x) \times z = 0 \\ y' = z \end{cases}$
 - La première équation, linéaire, homogène, d'ordre 1 a immédiatement pour ensemble solution sur l'intervalle I_0 la droite vectorielle $\left\{ x \mapsto \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R} \right\}$.
 - Ainsi, y est solution de (E) ssi $\exists K \in \mathbb{R}, y' = \frac{K}{x}$ ssi $\exists (K, L) \in \mathbb{R}^2, y = K \ln(|x|) + L$.
 - Conclusion : sur l'intervalle I ou l'intervalle J , l'ensemble solution est $\text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \ln(|x|))$
 - Soit $f \in S$. Alors il existe $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = k_1 \ln(x) + k_2 \\ \forall x < 0, f(x) = k_3 \ln(|x|) + k_4 \end{cases}$
 f étant continue en 0 donc bornée au voisinage de 0, on obtient $k_1 = k_3 = 0$.
La continuité à gauche et à droite en 0 impose alors $k_2 = f(0) = k_4$.
Donc f est une fonction constante.

- Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions constantes sont éléments de f .

Conclusion : $S = \text{Vect}(x \mapsto 1)$ et $\dim(S) = 1$.

- Notons f_α la fonction définie sur I par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
Alors f_α est solution de (E) ssi $\forall x > 0, x^2 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 6x \alpha x^{\alpha-1} + 12x^\alpha = 0$ ssi $\forall x > 0, x^\alpha \times (\alpha^2 - 7\alpha + 12) = 0$
4 et 3 sont solutions de l'équation $\alpha^2 - 7\alpha + 12$ donc les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont éléments de S^+ .
 - La famille $(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$ est une famille libre à 2 éléments (vérification immédiate et laissée au soin du lecteur) d'éléments de S^+ et S^+ est de dimension 2.
Donc C^+ est une base de S^+ et $S^+ = \text{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.
 - On vérifie immédiatement par le calcul que $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ définissent deux fonctions sur J solutions de (E) . Elles forment également une famille libre à 2 éléments et $\dim(S^-) = 2$.
Donc $S^- = \text{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.
 - On vérifie que $S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} k_1 x^3 + k_2 x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ k_3 x^3 + k_4 x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases}, (k_1, \dots, k_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.
Soit $f \in S$. D'après ce qui précède, pour vérifier que f appartient à l'ensemble proposé, il suffit de vérifier que $f(0) = 0$...
On sait qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = k_1 x^3 + k_2 x^4$. La continuité de f en 0 donc à droite en 0 donne immédiatement $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} k_1 x^3 + k_2 x^4 = 0$.
Soit f dans l'ensemble proposé.
Alors il existe $k_1, \dots, k_4 \in \mathbb{R}$ vérifiant ce qu'il faut...
On vérifie que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} :
Soit $\alpha > 0$. Au voisinage de α , f coïncide avec la fonction $x \mapsto k_1 x^3 + k_2 x^4$. Donc f est deux fois dérivable en α , $f'(\alpha) = 3k_1 x^2 + 4k_2 x^3$ et $f''(\alpha) = 6k_1 x + 12k_2 x^2$.
De même, pour $\alpha < 0$, f coïncide au voisinage de α avec $x \mapsto k_3 x^3 + k_4 x^4$ donc f est deux fois dérivable en α et $f'(\alpha) = 3k_3 x^2 + 4k_4 x^3$, $f''(\alpha) = 6k_3 x + 12k_4 x^2$.
Ainsi, f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* et sa dérivée seconde f'' est continue en tout point de \mathbb{R}^* .
Donc f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^* .
De plus, f est continue à droite et à gauche en 0 donc continue en 0 ainsi qu'en tout point de \mathbb{R}^* .
Donc f est continue sur \mathbb{R} , de classe C^2 sur \mathbb{R}^* .
Il ne reste qu'à vérifier que $f'(x)$ et $f''(x)$ admettent une même limite finie en 0 à droite et à gauche pour assurer, d'après le théorème de prolongement de la classe, que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .
D'après les expressions précédemment évoquées pour f'' et f' , ces limites existent et valent 0.
Conclusion : f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .
Les expressions déterminées plus haut pour f' et f'' assurent immédiatement que f est solution de (E) .
 - Conclusion : on a bien l'égalité souhaitée et S est de dimension 4.
- Considérons l'équation $(E): x^2 y'' + 4x y' + 2y = 0$.
Alors $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont deux solutions de (E) (vérification immédiate) sur I et sur J .
Cette famille de fonctions est libre. Donc comme précédemment, S^+ et S^- sont engendrés par ces deux fonctions.
 - Soit $f \in S$ une solution de (E) sur \mathbb{R} .
Alors il existe $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x^2}$ et $\forall x < 0, f(x) = \frac{k_3}{x} + \frac{k_4}{x^2}$.
Alors $\forall x > 0, x^2 f(x) - k_1 x = k_2$ donc la continuité de f en 0 à droite donne par passage à la limite en $0^+ : 0 = k_2$.

Donc $\forall x > 0, f(x) = \frac{k_1}{x}$ d'où $\forall x > 0, x \times f(x) = k_1$ ce qui, par passage à la limite en 0 donne $0 = k_1$.
De même, la continuité de f à gauche en 0 donne $k_3 = k_4 = 0$.
Donc $f = 0$ ce qui démontre que S est l'espace vectoriel nul.

27 CCP 2013 On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable

$t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

- On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t} e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t , donner l'expression de la matrice e^{tA} .
- En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Solution de 27 : CCP 2013

- $\chi_A = (1-X)(3-X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.
D'après le théorème de Caley Hamilton (ou par vérification immédiate), $(A-2I_2)^2 = 0$ donc $A-2I_2$ est nilpotente.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$e^{tA} = e^{2t} e^{tB} = e^{2t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tB)^k = e^{2t} \left(I_2 + tB + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n \right) = e^{2t} (I_2 + tB)$$

En effet, $B^2 = 0$ donc $\forall n \geq 2, B^n = 0$.

- En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système et les conditions initiales se réécrit matriciellement sous la forme équivalence suivante : $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$.
Par théorème de cours, ce problème de Cauchy linéaire à coefficients constants admet une unique solution : la fonction définie sur \mathbb{R} par $\forall t \in \mathbb{R}, X_0(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Simplifions cette dernière expression. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} (I_2 + tB) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + tB \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix}$$

Conclusion : l'unique couple solution est le couple $(t \mapsto e^{2t}(1-3t); t \mapsto e^{2t}(2+3t))$.

28 Mines 2011

- On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur \mathbb{C} et on considère la matrice A de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.
- En déduire les solutions $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle $X' = AX$.
- Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ de l'équation différentielle $y^{(4)} + y'' + y = 0$ et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans \mathbb{R} .

On pourra considérer le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$.

Solution de 28 : Mines 2011

- $1 + j^2 + j^4 = 1 + j + j^2 = 0$.
- On a $\chi_A = X^4 + X^2 + 1$, d'après 1., j et $-j$ sont des racines et comme χ_A est à coefficients réels, \bar{j} et $-\bar{j}$ sont aussi des racines, Ainsi $\chi_A = (X-j)(X+j)(X-\bar{j})(X+\bar{j})$, χ_A étant scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - jI_4) \text{ si et seulement si } \begin{cases} y = jx \\ z = jy \\ t = jz \\ -x - z = jt \end{cases} \text{ donc } \text{Ker}(A - jI_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix} \right\}$$

A étant une matrice réelle, $\text{Ker}(A - \bar{j}I_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{j} \\ \bar{j}^2 \\ \bar{j}^3 \end{pmatrix} \right\}$.

De même, $\text{Ker}(A + jI_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -j^2 \\ -j^3 \end{pmatrix} \right\}$ et $\text{Ker}(A + \bar{j}I_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{j} \\ -\bar{j}^2 \\ -\bar{j}^3 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\text{Ainsi } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & \bar{j} & -j & -\bar{j} \\ j & j & j & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a } U^{-1}AU = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{j} \end{pmatrix} \text{ conviennent.}$$

- Les solutions du système $X' = AX$ sont de la forme :

$$X : t \mapsto \alpha e^{jt} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j \\ j \end{pmatrix} + \beta e^{\bar{j}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{j} \\ \bar{j} \\ \bar{j} \end{pmatrix} + \gamma e^{-jt} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -j \\ -j \end{pmatrix} + \delta e^{-\bar{j}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{j} \\ -\bar{j} \\ -\bar{j} \end{pmatrix}$$

- Si y est solution de $y^{(4)} + y'' + y = 0$, alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$ est solution du système $Y' = AY$, donc de la forme précédente, en particulier il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{C}, y(t) = \alpha e^{jt} + \beta e^{\bar{j}t} + \gamma e^{-jt} + \delta e^{-\bar{j}t}$$

Réciproquement : toute fonction de la forme ci-dessus est solution.

Notons φ_λ la fonction définie par $\varphi_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. On a $(\varphi_j, \varphi_{-\bar{j}}, \varphi_{-\bar{j}}, \varphi_{-j})$ est libre, donc une solution est à valeurs réelles $\iff y = \bar{y} \iff \beta = \bar{\alpha}$ et $\delta = \bar{\gamma}$.

Donc les solutions à valeurs réelles sont de la forme $y(t) = \alpha e^{jt} + \bar{\alpha} e^{\bar{j}t} + \gamma e^{-jt} + \bar{\gamma} e^{-\bar{j}t}$.

Ce qui peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = Ae^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Be^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Ce^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + De^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Où A, B, C et D sont des réels.

29 CCP 2009 On considère l'équation différentielle $xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. (E)

- Résoudre (E) sur chacun des intervalles $] -1, 0[$ et $] 0, 1[$.
- En déduire que (E) admet une unique solution sur $] -1, 1[$.

Solution de 29 : CCP 2009

- $I_1 =] -1, 0[$ et $I_2] 0, 1[$.
 f est solution si et seulement pour tout $x \in I_k$, $(\text{id} \times f)(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ qui se primitive en $\text{Arcsin}(x^2) + C_k$.

Les solutions sur I_k sont les $x \mapsto \frac{\text{Arcsin}(x^2) + C_k}{x}$.

- Raccord de solution, si on a une solution sur $] -1, 1[$, elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que si $x \in I_k$, $f(x) = \frac{\text{Arcsin}(x^2) + C_k}{x}$. Par continuité, les limites en 0 doivent être finies, donc $C_1 = C_2 = 0$.

Réciproquement, $x \mapsto \frac{\text{Arcsin}(x^2)}{x}$ est bien dérivable sur $] -1, 1[$ et solution sur cet intervalle de (E), c'est la seule.

30 Centrale 2008 λ désigne un réel fixé, q une fonction de classe \mathcal{C}^1 , 2π -périodique paire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . et on considère l'équation différentielle d'inconnue $y : (E_\lambda) \quad y'' + (\lambda - q)y = 0$.

- Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_λ) et exploiter l'unicité pour prouver qu'une solution y de (E_λ) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.
- Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité.
- En déduire la dimension d'un sous-espace propre de $Q : y \in E_2 \rightarrow -y'' + qy$ où E_2 est l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^2 , 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Solution de 30 : Centrale 2008

- L'équation étant linéaire (et ses coefficients des fonctions continues définies sur \mathbb{R}), le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce :

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y définie sur \mathbb{R} vérifiant $y(0) = u$ et $y'(0) = v$.

Soit maintenant y une solution vérifiant $y(0) = 0$. Posons $z(x) = y(-x)$. Alors $z''(x) = y''(-x)$ et, par parité de q :

$$z''(x) + (\lambda - q(x))z(x) = y''(-x) + (\lambda - q(-x))y(-x) = 0.$$

Donc z est solution de (E_λ) et, puisque $z(0) = 0 = y(0)$, $z'(0) = -y'(0)$, l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz atteste de l'égalité $z = -y$, c'est-à-dire que y est impaire. La réciproque est facile.

- Soient y et z deux solutions. Leur wronskien vaut $w = yz' - y'z$. Si y et z sont toutes deux paires, on a $y'(0) = z'(0) = 0$. Si elles sont toutes deux impaires, $y(0) = z(0) = 0$. Dans les deux cas, $w(0) = 0$, ce qui prouve que (y, z) n'est pas une base de solutions.
- Soit alors λ une valeur propre de Q . L'espace propre correspondant est égal à $E_2 \cap S_{E_\lambda}$ (où S_{E_λ} est l'espace des solutions de (E_λ)). Il est non réduit à $\{0\}$ par définition. On sait de plus que $\dim S_{E_\lambda} = 2$ et on vient de voir que S_{E_λ} ne peut être contenu dans E_2 . Donc $\dim(E_2 \cap S_{E_\lambda}) = 1$.

Autres exercices

31 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2 \sin t \end{cases}$ en posant $u = y - x$.

Solution de 31 :

Poser $u = x - y$. On trouve alors $u(t) = \lambda e^{2t} + \sin t$, puis $y' = 2y + \lambda e^{2t} + 3 \sin t$.

D'où $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{2t} - \frac{3 \cos t + 6 \sin t}{5}$ et $x(t) = (\lambda t + \mu + \lambda)e^{2t} - \frac{3 \cos t + \sin t}{5}$.

32 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -y + e^{-t} \\ y' = x + e^{-t} \end{cases}$

Solution de 32 :

Système fondamental de solutions du système homogène : $\begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \end{pmatrix}$.

Puis solution évidente $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

33 On considère $(H) : X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Résoudre H et en déduire $\exp(tA)$.
- Retrouver $\exp(tA)$ par un calcul direct.

Solution de 33 :

Pour 1 : trigonaliser.

Pour 2 : Écrire $A = I_3 + N$ avec N nilpotente.

34 On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = 2tx - y + t \cos t \\ y' = x + 2ty + t \sin t \end{cases}$

- Résoudre le système homogène en posant $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.
- Résoudre le système en utilisant une méthode de variation des constantes.
- Retrouver les solutions en posant $z = x + iy$.

Solution de 34 :

Pour 2 : variation des constantes. $\begin{cases} x(t) = (a \cos t - b \sin t)e^{t^2} - \frac{\cos t}{2} \\ y(t) = (a \sin t + b \cos t)e^{t^2} - \frac{\sin t}{2} \end{cases}$

35 Résoudre l'équation $y'' + y = \tan^2 t$.

Solution de 35 :

Méthode de variation des constantes.

36 Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

Solution de 36 :

- $a = -2$.
- Puis variation de la constante (méthode de Lagrange), on trouve une autre solution $x \mapsto 4x^2 + 1 \dots$
- Ou alors on trouve l'expression du wronskien de deux solutions en résolvant l'équation

$$(2x+1)w'(x) + (4x-2)w(x) = 0$$

puis on cherche f telle que $fg' - f'g = w$ en remplaçant g par $x \mapsto e^{-2x}$ et w par l'expression trouvée, avec la constante égale à 1 par exemple...

- On peut aussi chercher directement une solution polynomiale...
- On peut enfin directement chercher les solutions DSE et retrouver nos deux solutions...

37 Résoudre l'équation $4xy'' + 2y' - y = 0$ en déterminant les solutions développable en série entière.

Solution de 37 :

$x \mapsto a_0 \operatorname{ch} \sqrt{x}$ si $x \geq 0$ et $a_0 \operatorname{cos} \sqrt{-x}$ sinon.

On « devine » d'autres solutions en $x \mapsto \operatorname{ch} \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}_+^* et $x \mapsto \operatorname{cos} \sqrt{-x}$ sur \mathbb{R}_-^* .

Raccord : les seules solutions sur \mathbb{R} sont les solutions DSE trouvées ci-dessus.

38 Résoudre l'équation $x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = e^x$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x) = x^2 y(x)$.

Solution de 38 :

On trouve $z''(x) - z(x) = e^x$
 Puis $y(x) = \frac{e^{2x}}{2x} + A \frac{e^x}{x^2} + B \frac{e^{-x}}{x^2}$.

39 Résoudre l'équation $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en effectuant le changement variable $t = x^2$.

40 Sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$.

1. Si $f, g \in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g .
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m(e_{-\lambda} f) = (D - \lambda \operatorname{id}_E)^m(f)$.
3. En déduire $\operatorname{Ker}(D - \lambda \operatorname{id}_E)^m$.
4. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ scindé. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que les solutions de $a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P .