1 Soit $f : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \left(\operatorname{tr} M, \operatorname{tr}\left(M^2\right), \ldots, \operatorname{tr}\left(M^n\right)\right) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est différentiable en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{d} f(M)$.
2. Relier le rang de $\mathrm{d} f(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution de 1 :

1. Remarquons d'abord que, par distributivité, si $k \geqslant 2$,
$$(M+H)^k = \underbrace{(M \text{ ou } H) \times (M \text{ ou } H) \times \cdots \times (M \text{ ou } H)}_{k \text{ fois}} = \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k) \in \{0,1\}^k} M^{\varepsilon_1} H^{1-\varepsilon_1} M^{\varepsilon_2} H^{1-\varepsilon_2} \ldots M^{\varepsilon_k} H^{1-\varepsilon_k}$$
Or, s'il y a au moins deux ε_i égaux à 0 ,
$$M^{\varepsilon_1} H^{1-\varepsilon_1} M^{\varepsilon_2} H^{1-\varepsilon_2} \ldots M^{e_k} H^{1-\varepsilon_k} = \underset{H \to 0_n}{\mathrm{o}}(H)$$
(se précise facilement en utilisant une norme sous-multiplicative).
Et comme la trace est continue (linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie), il existe k tel que
$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad |\operatorname{tr}(A)| \leqslant k\|A\|$$
ce qui montre que, si au moins deux ε_i sont égaux à 0 ,
$$\operatorname{tr}\left(M^{e_1} H^{1-\varepsilon_1} M^{e_2} H^{1-\varepsilon_2} \ldots M^{e_k} H^{1-\varepsilon_k}\right) = \underset{H \to 0_n}{\mathrm{o}}(H)$$
Donc
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left((M+H)^k\right) &= \operatorname{tr}\left(M^k\right) + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr}\left(M^{i-1} H M^{k-i}\right) + \underset{H \to 0_n}{\mathrm{o}}(H) \\ &= \operatorname{tr}\left(M^k\right) + k \operatorname{tr}\left(M^{k-1} H\right) + \underset{H \to 0_n}{\mathrm{o}}(H)\end{aligned}$$
ce qui permet de conclure :
$$\boxed{\mathrm{d} f(M) : H \mapsto \left(\operatorname{tr}(H), 2\operatorname{tr}(MH), \ldots, n \operatorname{tr}\left(M^{n-1} H\right)\right)}$$
2. Pour calculer le rang de $\mathrm{d} f(M)$, on cherche par exemple son noyau. On remarque successivement :
$$H \in \operatorname{Ker}\left(\mathrm{d} f(M)\right) \iff \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \operatorname{tr}\left(M^k H\right) = 0$$
puis, par combinaison linéaire :
$$H \in \operatorname{Ker}\left(\mathrm{d} f(M)\right) \iff \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \operatorname{tr}(P(M)H) = 0$$
Or on sait d'après le cours que si $d = \deg \pi_M \leqslant n$, $\left(I_n, M, \ldots, M^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}[M]$, c'est aussi bien sûr une base de $\mathbb{R}_{d-1}[M]$ et comme $d \leqslant n$, $\mathbb{R}[M] = \mathbb{R}_{d-1}[M] = \mathbb{R}_{n-1}[M]$ ce qui permet de conclure
$$H \in \operatorname{Ker}\left(\mathrm{d} f(M)\right) \iff \forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \operatorname{tr}(P(M)H) = 0$$
Ceci signifie que
$$H \in \operatorname{Ker}(\mathrm{d} f(M)) \iff H^{\intercal} \in \mathbb{R}[M]^{\perp}$$
en considérant le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc
$$\operatorname{rg}(\mathrm{d} f(M)) = n^2 - \dim \operatorname{Ker}(\mathrm{d} f(M)) = n^2 - \left(n^2 - \dim \mathbb{R}[X]\right) = d = \deg \pi_M$$
On a montré que $\boxed{\operatorname{rg}(\mathrm{d} f(M)) \text{ est bien le degré du polynôme minimal de } M.}$
3. Il reste à montrer que
$$\boxed{\left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{rg}(\mathrm{d} f(M)) = n\right\} \text{ est ouvert.}}$$
Or c'est l'image réciproque par $\mathrm{d} f$, continue (car f est de classe $\mathscr{C}^1$, polynomiale en les cœfficients de M), de
$$\left\{u \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n\right),\ \operatorname{rg} u = n\right\}.$$
Le fait que ce dernier ensemble soit un ouvert est plus facile à voir matriciellement :
$$\left\{A \in \mathscr{M}_{n,n^2}(\mathbb{R}),\ \operatorname{rg} A = n\right\} \text{est ouvert.}$$
En effet, si A est dans cet ensemble, on peut sélectionner n colonnes de A définissant une matrice extraite inversible. Au voisinage de A, par continuité du déterminant, cette même matrice extraite restera inversible. Elle est donc de rang au moins n, et vu son nombre de lignes, au plus n, donc exactement n.