Programme de colle – MPI

1. Calcul différentiel

Reprise du programme complet avec la notion de différentielle pour tout le monde, auquel s'ajoute

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie	
Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon>0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0)=x, \gamma'(0)=v$. Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x\in X$ et $\mathrm{d}g(x)\neq 0$, alors T_xX est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.	Notation T_xX pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.
f) Optimisation : étude au premier ordre	
Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.	

Les éventuels exercices sur les différentielles et vecteurs tangents posés à des étudiants n'étant pas dans les trinômes 5, 6 et 7 resteront basiques.

2. Révisions

Tout exercice portant sur le programme de MPI peut être posé.

3. Questions de cours

- *Les questions de cours munies d'un astérisque* * *ne sont posables qu'aux trinômes 5, 6, 7.*
- ***Les membres de ces trois trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP.***

(i) * Ensemble des vecteurs tangents à un sous-espace affine en utilisant la définition.
Ensemble des vecteurs tangents à la sphère euclidienne $S(0_E,1)$ en utilisant la définition.
Équation du plan tangent à la sphère euclidienne $S((0,0,0),1)$ de $\mathbb{R}^3$ en utilisant une équation implicite et la différentielle (ou le gradient).

(ii) * Les vecteurs tangents en un extremum local d'une application différentiable sont dans le noyau de la différentielle en ce point.
Théorème d'optimisation sous contrainte.

(iii) * **Exercice classique** Soit $f: M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\left(\operatorname{tr}M,\operatorname{tr}\left(M^2\right),\dots,\operatorname{tr}\left(M^n\right)\right)\in\mathbb{R}^n$.
  (a) Montrer que f est différentiable en tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathrm{d}f(M)$.
  (b) Relier le rang de $\mathrm{d}f(M)$ et le degré du polynôme minimal de M.
  (c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(iv) **Les exercices CCINP suivants sont ceux qui n'ont pas été posés en colle pendant l'année.
Il est évident que tous les autres sont à savoir faire aussi !**

4. Exercices CCINP

- **CCINP 19**

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_nx^n$ et la série $\sum na_nx^n$ ont même rayon de convergence.
   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle : $x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z\mapsto\dfrac{1}{1-z}$.
   (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe :
   $z\mapsto\dfrac{1}{(1-z)^2}$.

- **CCINP 41**

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f:(x,y)\mapsto 4x^2+12xy-y^2.$$

Soit $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=13\right\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u,v)\in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
   (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié
   $$(S):\left\{\begin{array}{rcrcl}4u&+&6v&=&\lambda u\\6u&-&v&=&\lambda v\end{array}\right.$$
   (b) Montrer que $(\lambda-4)(\lambda+1)-36=0$. En déduire les valeurs possibles de λ.
3. Déterminer les valeurs possibles de (u,v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

- **CCINP 48**

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f\in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 t^nf(t)\,\mathrm{d}t=0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions (P_nf) converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

CCINP 54

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E,\ \|u\|=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.
   (a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que $\forall\, u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E,\ \sum\dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose $\forall\, u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E,\ f(u)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{u_n}{2^{n+1}}$. Prouver que f est continue sur E.

CCINP 57

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de « f différentiable en $(0,0)$. »
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

CCINP 58

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $a\in E$ et soit $f:E\longrightarrow F$ une application.
   Donner la définition de « f différentiable en a ».
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $e=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E.
   On pose $\forall x\in E,\ \|x\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, où $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $\forall(x,y)\in E\times E,\ \big\|(x,y)\big\|=\max\big(\|x\|_\infty,\|y\|_\infty\big)$.
   On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E\times E$.
   Soit $B:E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.
   (a) Prouver que

$$\exists\, C\in\mathbb{R}^+,\ \forall(x,y)\in E\times E,\ |B(x,y)|\leqslant C\|x\|_\infty\|y\|_\infty.$$

   (b) Montrer que B est différentiable sur $E\times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0,v_0)\in E\times E$.

CCINP 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n=(z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

CCINP 89

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On pose $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k\in[\![1,n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe z^k-1.
2. On pose $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|z^k-1\right|$. Montrer que $S=\dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

CCINP 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément 5 boules dans l'urne.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.