Programme de colle – MP1

1. EDL

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)\cdot x + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Forme matricielle : système différentiel linéaire $$X' = A'(t)X + B(t).$$ Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x\mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)x' + b(t)x = c(t)$, $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$.	Exemples de recherche de solutions développables en série entière.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x),\quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E)\leqslant 3$.
e) Variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions. Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.	

Remarque : la méthode de variations des constantes n'est plus au programme pour un système différentiel en général. Seule celle des EDL d'ordre 2 l'est désormais.

2. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments sur les groupes	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	
Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m\wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs. Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.

3. Questions de cours

- *Les questions de cours munies d'un astérisque* ✱ *ne sont posables qu'aux trinômes 5, 6, 7.*
- ***Les membres de ces trois trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne seront pas interrogés dessus.***

(i) ✱ Les solutions du système différentiel à cœfficients constant $X'(t) = AX(t)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t\mapsto \exp(tA)C$ où $C\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

(ii) ✱ Donner une équation différentielle dont le wronskien d'un système fondamental de solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est solution puis montrer que (f,g) est un système fondamental de solutions ssi leur wronskien prend une valeur non nulle ssi leur wronskien n'est jamais nul.

(iii) ✱ Générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$.

(iv) ✱ Si p est premier et $k\in\mathbb{N}^*$, calcul de $\varphi\left(p^k\right)$, d'où une expression de $\varphi(n)$ à l'aide de ses diviseurs premiers. Théorème d'Euler, d'où le petit théorème de Fermat.

(v) ✱ **Théorème Chinois** : L'application

$$f:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ (k \bmod nm) & \longmapsto & (k \bmod n, k \bmod m)\end{array}\right.$$

est bien définie et un isomorphisme d'anneaux.
On note indifféremment $U_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ ou $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$ l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'application

$$g:\left|\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}\right)^\times & \longrightarrow & \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times\times\left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^\times \\ (k \bmod nm) & \longmapsto & (k \bmod n, k \bmod m)\end{array}\right.$$

est bien définie et un isomorphisme de groupes (multiplicatifs) (sans utiliser l'égalité des cardinaux qui en est une conséquence).

(vi) **Exercices CCINP : 31, 32, 42, 66, 74, 75, 86, 94.**

4. Exercices CCINP

- **CCINP 31** :
  1. Déterminer une primitive de $x\longmapsto\cos^4 x$.
  2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.
- **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
  1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
     Déterminer la somme des séries entières obtenues.
  2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

- **CCINP 42** : On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

- **CCINP 74** :

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

- **CCINP 75** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

- **CCINP 86 : Preuve directe du petit théorème de Fermat**

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n\ [p]$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

- **CCINP 94** :

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 5 \ [6] \\ x \equiv 4 \ [8] \end{cases}$ n'a pas de solution appartenant à $\mathbb{Z}$.
2. (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que $(a|c$ et $b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 \ [17] \\ x \equiv 5 \ [16] \\ x \equiv 4 \ [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).