1 Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée** : Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.
   (a) Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2 = u$. Traduction matricielle ?
   (b) Démontrer l'unicité de h. Que peut-on dire de h si u est défini positif ?
2. **Décomposition polaire** : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q,S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé puis étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant sans les prouver les résultats classiques de densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathcal{O}(n)$.

Solution de 1 : Racines carrées et décomposition polaire

1. **Racine carrée**
   (a) Par le théorème spectral, on se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthodiagonalisante de u avec pour tout i, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ où $\lambda_i \geqslant 0$ et on pose h l'unique endomorphisme tel que pour tout i, $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$.
   Vu les matrices (diagonales) de h et u dans la base $\mathcal{B}$, cela convient : $\boxed{h^2 = u.}$
   On peut aussi raisonner directement matriciellement : pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, via le théorème spectral.
   (b) u est un polynôme en h, donc commute avec. Comme dans le classique de la diagonalisation simultanée, on considère $E_\lambda(u)$ un sous-espace propre de u, stable par h, qui induit dessus un endomorphisme h_λ autoadjoint donc diagonalisable.
   Mais comme h_λ est positif et $h_\lambda^2 = u_\lambda = \lambda \mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$, nécessairement $h_\lambda = \sqrt{\lambda}\mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$. En effet, si μ valeur propre de h_λ, alors $\mu^2 = \lambda$ et $\mu \geqslant 0$ donc $\mu = \sqrt{\lambda}$. Et comme h_λ est diagonalisable, par théorème spectral, avec une seule valeur propre, on a bien $h_\lambda = \sqrt{\lambda}\mathrm{id}_{E_\lambda(u)}$.
   Comme $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} E_\lambda(u)$ (car u est diagonalisable), $\boxed{h \text{ est bien unique.}}$
2. **Décomposition polaire** : une analyse permet de voir que si on a une telle décomposition $A = QS$, alors $A^\intercal = S^\intercal Q^\intercal = SQ^{-1}$ donc $A^\intercal A = S^2$.
   Or $A^\intercal A$ est assez facilement une matrice symétrique. Et, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\intercal (A^\intercal A) X = Y^\intercal Y$ où $Y = AX$.
   Or, si $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = AX \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ car A est inversible, donc $Y^\intercal Y = \|Y\|^2 > 0$.
   En utilisant les questions précédentes, il existe $\boxed{S \text{ symétrique défini-positive}}$ telle que
   $$S^2 = A^\intercal A$$
   Posons $Q = AS^{-1}$; on calcule
   $$Q^\intercal Q = \left(S^{-1}\right)^\intercal A^\intercal A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$
   Donc $\boxed{Q \text{ est orthogonale.}}$
   L'unicité repose, d'après la remarque initiale, sur le fait qu'une matrice symétrie définie-positive a une unique racine carrée définie positive.
3.
   - On a $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}$ avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ fermé en tant que sous-espace de dimension finie et
   $$\mathcal{P} = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ X^\intercal M X \geqslant 0\right\} = \bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}([0, +\infty[)$$
   où pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $f_X : M \mapsto X^\intercal M X$ est continue car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $f_X^{-1}([0,+\infty[)$ est fermée, donc $\mathcal{P}$ l'est donc $\boxed{\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ l'est.}}$
   On peut aussi prendre une suite $(M_n)_n$ convergente vers M de matrices de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et, par continuité de la transposition et des f_X, passer à la limite dans $M_n^\intercal = M_n$ et $X^\intercal M_n X \geqslant 0$ pour en déduire que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par densité, on a une suite (A_n) de matrices inversibles telles que $A_n \to A$. On peut donc trouver des suites (Q_n) et (S_n) de matrices respectivement orthogonales et symétriques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = Q_n S_n$.
   Par compacité de $\mathcal{O}(n)$, on a une extractrice φ telle que $Q_{\varphi(n)} \to Q \in \mathcal{O}(n)$.
   Alors $S_{\varphi(n)} = Q_{\varphi(n)}^{-1} A_{\varphi(n)} \to S = Q^{-1}A$ (la continuité de $M \mapsto M^{-1}$ vient de la formule de la comatrice) et comme $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé, $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Finalement, $\boxed{A = QS \text{ avec } Q \in \mathcal{O}(n) \text{ et } S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$

2 Formules variationnelles et rayon spectral

Soit E est un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathscr{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

1. Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{\left(x\middle|u(x)\right)}{\|x\|^2}$ atteint sur $E\setminus\{0_E\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\operatorname{Sp} u)$ et $\max(\operatorname{Sp} u)$. Traduction matricielle ?
2. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.

Le **rayon spectral** de $u \in \mathscr{L}(E)$ est, par définition, $\rho(u) = \max\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp} u} |\lambda|$.

3. Si $u \in \mathscr{S}(E)$, montrer que $\rho(u) = |||u|||$.
4. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$.

Solution de 2 : Formules variationnelles et rayon spectral

1. Par théorème spectral, on a une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ respectivement.
   Si $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$,
   $$(x|u(x)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \in \left[\min(\operatorname{Sp} u)\|x\|^2, \max(\operatorname{Sp} u)\|x\|^2\right],$$
   les bornes étant atteinte pour des vecteurs e_i d'indice correspondant respectivement à la plus petite et à la plus grande valeur propre.
   Matriciellement, si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto \dfrac{X^\intercal AX}{\|X\|^2}$ atteint sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\}$ un minimum et un maximum valant respectivement $\min(\operatorname{Sp} A)$ et $\max(\operatorname{Sp} A)$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
   $$\|u(x)\|^2 = \left(u(x)\middle|u(x)\right) = \left(x\middle|u^* \circ u(x)\right) \leqslant \|u^* \circ u(x)\|\,\|x\| \leqslant |||u^* \circ u||| \cdot \|x\|^2 \leqslant |||u^*||| \cdot |||u||| \cdot \|x\|^2$$
   car $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre. Donc $|||u|||^2 \leqslant |||u^*||| \cdot |||u|||$.
   Alors soit $|||u||| = 0$ et alors $u = 0_{\mathscr{L}(E)} = u^*$ et donc $|||u||| = 0 = |||u^*|||$, soit $|||u||| \neq 0$ et alors $|||u||| \leqslant |||u^*|||$. Puis, symétriquement, $|||u^*||| \leqslant |||(u^*)^*||| = |||u|||$.
   Finalement, dans tous les cas, $\boxed{|||u^*||| = |||u|||.}$
3. On suppose $u \in \mathscr{S}(E)$. Comme dans la question 1, pour tout $x \in E$,
   $$\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 x_k^2 \leqslant \left(\rho(u)\right)^2 \|x\|^2$$
   atteint pour x vecteur propre associé à une valeur propre de valeur absolue égale à $\rho(u)$.
   Donc $\boxed{|||u||| = \left|\rho(u)\right| = \rho(u) \geqslant 0.}$
4. On a déjà $u^* \circ u \in \mathscr{S}(E)$. D'après la question précédente, et comme la norme subordonnée est une norme d'algèbre,
   $$\rho(u^* \circ u) = |||u^* \circ u||| \leqslant |||u^*||| \times |||u||| = |||u|||^2.$$
   Puis, comme dans la question 2, pour tout $x \in E$,
   $$\|u(x)\|^2 = \left(u(x)\middle|u(x)\right) = \left(x\middle|u^* \circ u(x)\right) \leqslant \|x\| \cdot \|u^* \circ u(x)\| \leqslant |||u^* \circ u||| \cdot \|x\|^2$$
   par inégalité de Cauchy-Schwarz et définition de la norme subordonnée, donc $|||u|||^2 \leqslant |||u^* \circ u|||$.
   Finalement, $\boxed{|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u).}$

3 L'homéomorphisme $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme (c'est-à-dire une bijection continue à réciproque continue) de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On pourra, pour l'injectivité, admettre que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

On pourra, pour la continuité de la réciproque, utiliser des suites et utiliser librement le rayon spectral et ses propriétés.

Solution de 3 : L'homéomorphisme $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Bonne définition On a déjà que si S est symétrique, $\exp S$ est symétrique définie positive.

La symétrie provient de la continuité de l'application linéaire de transposition, et en diagonalisant S par le théorème spectral, on obtient que les valeurs propres de $\exp S$ sont les exponentielles de celles de S, donc sont > 0.

Donc $\boxed{\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est bien définie.}}$

Injectivité Soient A, B deux matrices symétriques réelles telles que $\exp A = \exp B$. On montre que $A = B$.

Le résultat est clair si A et B sont diagonales.

Pour s'y ramener, on a besoin de codiagonaliser A et B. On montre donc que A et B commutent.

On a déjà que A commute avec $\exp A = \exp B$.

On vérifie alors que B est un polynôme en $\exp B$.

En diagonalisant $B = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$, $\exp(B) = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{e}^{d_n} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Il suffit de trouver un polynôme Q tel que pour tout k, $Q\left(\mathrm{e}^{d_k}\right) = d_k$, par exemple avec de l'interpolation de Lagrange.

En codiagonalisant A et B en D et D', on obtient $\exp D = \exp D'$, puis $D = D'$ par injectivité de l'exponentielle réelle, et enfin $A = B$, $\boxed{\text{d'où l'injectivité.}}$

Surjectivité Si $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on l'orthodiagonalise en $A = PDP^{-1} = PDP^\intercal$ où $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ et on voit que $A = \exp S$ où

$$S = P \begin{pmatrix} \ln d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \ln d_n \end{pmatrix} P^\intercal.$$

$\boxed{\text{D'où la surjectivité.}}$

Continuité de $\exp$ La continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une propriété du cours.

Continuité de $\exp^{-1}$ On cherche donc à montrer la continuité de la réciproque.

On utilise la caractérisation séquentielle : soit $A_k \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Notons S_k (respectivement S) l'unique matrice symétrique telle que $\exp S_k = A_k$ (respectivement $\exp S = A$).

Le but est alors de montrer que $S_k \to S$.

Or on vérifie que la seule valeur d'adhérence de (S_k) est S. En effet, si $S_{\varphi(k)} \to S'$, alors $A_{\varphi(k)} \to \exp S' = A = \exp S$ puis $S' = S$ par injectivité.

Il reste à vérifier que (S_k) est bornée pour conclure : elle sera à valeurs dans un compact (fermé borné en dimension finie) avec une unique valeur d'adhérence, donc convergente.

On utilise pour cela le rayon spectral, vérifiant $\rho(S) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} S} |\lambda| = |||S|||$ pour $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, classiquement.

Comme la suite (A_k) est convergente, elle est bornée par un certain $C > 0$ pour la norme triple, donc toutes ses valeurs propres (positives) sont majorées par C.

Ainsi, toutes les valeurs propres de S_k sont majorées par $\ln C$.

Mais ces dernières ne sont pas nécessairement positives, il faut donc aussi les minorer.

Pour ce faire, on utilise $A_k^{-1} \to A^{-1}$ par continuité de $M \mapsto M^{-1}$ (formule de la comatrice).

Donc toutes les valeurs propres des A_k^{-1} sont majorées par $C' > 0$ et toutes les valeurs propres des S_k sont majorées par $-\ln C'$.

Bref, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|||S_k||| \leqslant \max(|\ln C, \ln C'|)$, donc la suite (S_k) est bornée, avec une unique valeur d'adhérence S ce qui permet d'obtenir sa convergence vers S et de conclure : $\boxed{\exp^{-1} \text{ est continue sur } \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$

4 Différentielle du déterminant

La classe $\mathscr{C}^1$ de l'application $\det\ :\ A \longmapsto \det A$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne fait guère de doute : c'est une application polynomiale en les coefficients de A.

Dans la suite, on notera $\dfrac{\partial}{\partial a_{i,j}}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ les dérivations partielles relatives à la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1re méthode

1. Exprimer, pour toute matrice A, la dérivée partielle $\dfrac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A)$ à l'aide d'un coefficient de la comatrice $\mathrm{Com}\,A$ de A.
2. En déduire l'expression, si $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathrm{d}(\det)(A)(H)$.
3. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$. Déterminer pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le gradient du déterminant en A.

2e méthode

4. Démontrer, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp H) = \exp(\mathrm{tr}\, H)$.
5. On note, si $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp H = I_n + H + \alpha(H)$. Montrer que $\alpha(H) = \underset{H\to O_n}{\mathrm{o}}(\|H\|)$.
6. Retrouver la différentielle en I_n de $\det$ et en déduire la différentielle en n'importe quelle $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\det$.
7. Donner la différentielle de $\det$ en $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Solution de 4 : Différentielle du déterminant

1. L'application $\det$ est affine quand on la considère comme fonction d'un seul coefficient de la matrice (une application partielle, donc). Autrement dit, il va s'agir de dériver une fonction $t \mapsto a\,t + b$.

   Si (i, j) est un couple fixé,
   $$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det A = a_{i,j}\,[\mathrm{Com}\,A]_{i,j} + \phi_{i,j}(A)$$
   où ni $[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$, ni $\phi_{i,j}(A)$ ne dépend de $a_{i,j}$. Ceci est conséquence par exemple de la formule sur le développement du déterminant par rapport à la ligne L_i, ou par rapport à la colonne C_j. Et on a donc $\boxed{\dfrac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A) = [\mathrm{Com}\,A]_{i,j}\,.}$

2. Comme $\det$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc différentiable, on peut écrire
   $$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{\partial \det}{\partial a_{i,j}}(A) H_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} [\mathrm{Com}\,A]_{i,j}\,H_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{Com}\,A]_{i,j}\,H_{i,j}\right)$$
   Et on arrive ainsi à une formule célèbre
   $$\boxed{\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}(\det)(A)(H) = \mathrm{tr}((\mathrm{Com}\,A)^{\intercal} H) = \left(\mathrm{Com}\,A \middle| H\right)}$$
   pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Donc $\boxed{\nabla \det(A) = \mathrm{Com}\,A.}$

4. Cette formule s'obtient facilement en trigonalisant sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

5. On peut majorer, à partir de la définition de l'exponentielle de matrice
   $$\|\alpha(H)\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}\|H\|^n$$
   où l'on considère une norme $\|.\|$ d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Mais
   $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}\|H\|^n = \|H\| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}\|H\|^{n-1} = \|H\| \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)!}\|H\|^p$$
   (essayer de mettre $\|H\|$ en facteur est naturel, compte tenu du but recherché). On en déduit alors
   $$\|\alpha(H)\| \leqslant \|H\|(\exp(\|M\|) - 1)$$
   ce qui conclut bien $\boxed{\alpha(H) = \underset{H\to O_n}{\mathrm{o}}(\|H\|).}$

6. Notons ϕ cette différentielle qui, rappelons-le, est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même. On a, d'abord,

$$\begin{aligned}\det(\exp H) &= \det(I_n + H + \alpha(H)) \\ &= \det(I_n) + \phi\big(H + \alpha(H)\big) + \underset{H\to O_n}{\mathrm{o}}(\|H + \alpha(H)\|) \\ &= 1 + \phi(H) + \phi(\alpha(H)) + \|H + \alpha(H)\|\,\varepsilon(H)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(H) \xrightarrow[H\to O_n]{} O_n$.

Pour continuité de l'application linéaire ϕ, il existe k tel que $\big\|\phi\big(\alpha(H)\big)\big\| \leqslant k\ \|\alpha(H)\|$ ce qui permet de conclure que $\phi(\alpha(H)) = \mathrm{o}(\|H\|)$ avec la question précédente.

Enfin, comme $\|H + \alpha(H)\|\,|\varepsilon(H)| \leqslant \|H\|\cdot|\varepsilon(H)| + \|\alpha(H)\|\cdot|\varepsilon(H)|$ avec $\alpha(H) = \mathrm{o}(\|H\|)$, on a bien $\|H + \alpha(H)\|\,\varepsilon(H) = \mathrm{o}(\|H\|)$. D'où, finalement,

$$\det(\exp H) = 1 + \phi(H) + \mathrm{o}(\|H\|) = 1 + \mathrm{d}(\det)(I_n)(H) + \mathrm{o}(\|H\|)$$

Mais, d'autre part,

$$\det(\exp H) = \exp\big(\operatorname{tr} H\big) = 1 + \operatorname{tr} H + \beta(H)$$

où

$$|\beta(H)| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} |\operatorname{tr} H|^n$$

Mais il existe k' tel que, pour tout M, $|\operatorname{tr} H| \leqslant k'\|H\|$ par continuité d'application linéaire sur un espace de dimension finie, ce qui permet de conclure facilement que $\beta(H) = \underset{H\to O_n}{\mathrm{o}}(\|H\|)$.

Et on conclut, par unicité de la différentielle, $\boxed{\mathrm{d}(\det)(I_n) = \operatorname{tr}.}$

Puis, si A est inversible,

$$\det(A+H) = \det(A)\ \det\big(I_n + A^{-1}H\big) = \det(A)\ \left(1 + \operatorname{tr}(A^{-1}H) + \underset{H\to O_n}{\mathrm{o}}(\|H\|)\right)$$

En effet, un $\underset{H\to O_n}{\mathrm{o}}\big(\|A^{-1}H\|\big)$ est un $\underset{H\to O_n}{\mathrm{o}}(\|H\|)$, comme on le voit avec une norme d'algèbre pour laquelle

$$\|A^{-1}H\| \leqslant \|A^{-1}\| \times \|H\|.$$

On en déduit que la différentielle en A est $\boxed{\mathrm{d}(\det)(A)\ :\ H \longmapsto \det(A)\operatorname{tr}\big(A^{-1}H\big) = \operatorname{tr}((\operatorname{Com} A)^{\intercal} H)}$ par la formule de la comatrice.

7. Les applications $\mathrm{d}(\det)$ et $A \mapsto (H \mapsto \operatorname{tr}((\operatorname{Com} A)^{\intercal} H))$ sont continues car $\det$ est de classe $\mathscr{C}^1$ pour la première, et la deuxième est linéaire sur un espace de dimension finie et coïncident sur $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ classiquement dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc sont égales.