Programme de colle – MPI

1. Endomorphismes des espaces euclidiens

Reprise du programme précédent, auquel s'ajoute :

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t\mapsto\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau. Classification des isométries d'un plan euclidien.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie en base orthonormée. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Interprétation matricielle. La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.
f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^*=u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathscr{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints. Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.
g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E), \mathscr{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Calcul différentiel

⚠ **La notion de différentielle n'a été introduite qu'avec les trinômes ✻ 5, 6 et 7 pour le moment.**

Pour les autres trinômes, on travaille avec des fonctions $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ et on utilise uniquement les dérivées partielles et le gradient, plutôt que la différentielle, cette semaine.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\dots,x_n)$.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1. Lorsque $f=(f_1,\dots,f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v=\mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω.	Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles.	Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a)=\mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a)\neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
c) Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\dots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\dots,f_p$ sont des applications différentiables.	
Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	Interprétation géométrique en termes de tangentes.
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t)=\mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Cas particulier fondamental : $\gamma(t)=x+tv$. Dérivation de $t\mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m)\mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$
d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$	
Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0)=a, \gamma(1)=b$, alors : $$f(b)-f(a)=\int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t)=a+tv$ pour tout $t\in[0,1]$.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.
f) Optimisation : étude au premier ordre	
Point critique d'une application différentiable. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.	Exemples de recherches d'extremums globaux.

Contenus	Capacités & Commentaires
~~Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.~~	
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x\in X$ et $\mathrm{d}g(x)\neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.	Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\dots\partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_k}\dots\partial_{j_1}f$, $\partial_{j_1,\dots,j_k}f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

h) Optimisation : étude au second ordre

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.	Notation $H_f(x)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(x+h)\underset{h\to 0}{=}f(x)+\langle\nabla f(x),h\rangle+\frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h,h\rangle+o(\Vert h\Vert^2)$, $f(x+h)\underset{h\to 0}{=}f(x)+\nabla f(x)^\top h+\frac{1}{2}h^\top H_f(x)h+o(\Vert h\Vert^2)$.	La démonstration n'est pas exigible.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x)\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.	Adaptation au cas d'un maximum local.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x)\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.	Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n=2$ (trace et déterminant).

Semaine suivante : Équations différentielles. Algèbre modulaire.

3. Questions de cours

- *Les questions de cours munies d'un astérisque* ✻ *ne sont posables qu'aux trinômes 5, 6, 7.*
- ***Les membres de ces trois trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne seront pas interrogés dessus.***

(i) ✻ Réduction des isométries (avec le lemme : une isométrie possède toujours une droite stable (cas d'une valeur propre réelle) ou un plan stable (cas où il n'y a pas de valeur propre réelle)).

(ii) ✻ Théorème spectral.

(iii) ✻ **Exercice classique : Racines carrées et décomposition polaire**

1. **Racine carrée** : Soit u un endomorphisme autoadjoint positif.
   (a) Établir l'existence d'un endomorphisme h symétrique positif tel que $h^2=u$. Traduction matricielle ?
   (b) Démontrer l'unicité de h. Que peut-on dire de h si u est défini positif ?
2. **Décomposition polaire** : Soit $A\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q,S)\in\mathscr{O}(n)\times\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A=QS$.
3. Montrer que $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé puis étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant sans les prouver les résultats classiques de densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathscr{O}(n)$.

(iv) ✻ **Exercice classique : Formules variationnelles et rayon spectral**

Soit E est un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, $\Vert\cdot\Vert$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathscr{L}(E)$ subordonnée à $\Vert\cdot\Vert$.

1. Soit $u\in\mathscr{S}(E)$. Montrer que $x\mapsto\dfrac{(x|u(x))}{\Vert x\Vert^2}$ atteint sur $E\setminus\{0_E\}$ un minimum et un maximum qui sont respectivement $\min(\operatorname{Sp}u)$ et $\max(\operatorname{Sp}u)$. Traduction matricielle ?
2. Montrer que pour tout $u\in\mathscr{L}(E)$, $|||u|||=|||u^*|||$.

Le **rayon spectral** de $u\in\mathscr{L}(E)$ est, par définition, $\rho(u)=\max\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}u}|\lambda|$.

3. Si $u\in\mathscr{S}(E)$, montrer que $\rho(u)=|||u|||$.
4. Si $u\in\mathscr{L}(E)$, montrer que $|||u|||^2=|||u^*\circ u|||=\rho(u^*\circ u)$.

(v) ✻ **Exercice classique :** $\exp:\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\to\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme (c'est-à-dire une bijection continue à réciproque continue) de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On pourra, pour l'injectivité, admettre que deux matrices diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables.

On pourra, pour la continuité de la réciproque, utiliser des suites et utiliser librement le rayon spectral et ses propriétés.

(vi) ✻ **Exercice classique : Différentielle du déterminant**

La classe $\mathscr{C}^1$ de l'application $\det:A\longmapsto\det A$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne fait guère de doute : c'est une application polynomiale en les coefficients de A.

Dans la suite, on notera $\dfrac{\partial}{\partial a_{i,j}}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ les dérivations partielles relatives à la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1re méthode

1. Exprimer, pour toute matrice A, la dérivée partielle $\dfrac{\partial\det}{\partial a_{i,j}}(A)$ à l'aide d'un coefficient de la comatrice $\operatorname{Com}A$ de A.
2. En déduire l'expression, si $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de $\mathrm{d}(\det)(A)(H)$.
3. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$. Déterminer pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le gradient du déterminant en A.

2e méthode

4. Démontrer, pour toute matrice $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\exp H)=\exp(\operatorname{tr}H)$.
5. On note, si $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp H=I_n+H+\alpha(H)$. Montrer que $\alpha(H)\underset{H\to O_n}{=}\mathrm{o}(\Vert H\Vert)$.
6. Retrouver la différentielle en I_n de $\det$ et en déduire la différentielle en n'importe quelle $A\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\det$.
7. Donner la différentielle de $\det$ en $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

(vii) **Exercices CCINP 33, 40, 52, 56, 57, 61, 66, 68.**

4. Exercices CCINP

- **CCINP 33** : On pose : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

- **CCINP 40**
Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\| \|$.
On suppose que : $\forall (u,v)\in A^2,\ \|u.v\|\leqslant \|u\|.\|v\|$.
  1. Soit u un élément de A tel que $\|u\|<1$.
     (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
     (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que
     $$(e-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$
  2. Démontrer que, pour tout $u\in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

- **CCINP 52** : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
  1. Prouver que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy\geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
  2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
     (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
  3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$.
     (a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et les calculer.
     (b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
     (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

- **CCINP 56** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=2x^3+6xy-3y^2+2.$$
  1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
  2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
  3. On pose $K=[0,1]\times[0,1]$.
     Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

- **CCINP 57** :
  1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
     (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
     (b) ~~Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».~~
  2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par
  $$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
     (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
     (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- **CCINP 61**
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose
$$\|A\|=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}|a_{i,j}|.$$
  1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
  2. Démontrer que
  $$\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ \|AB\|\leqslant n\|A\|\|B\|.$$
  Puis, démontrer que, pour tout entier $p\geqslant 1$,
  $$\left\|A^p\right\|\leqslant n^{p-1}\|A\|^p.$$
  3. Démontrer que, pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum\frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
  Est-elle convergente ?

- **CCINP 66** :
  1. Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A\in S_n^+(\mathbb{R})\Longleftrightarrow \mathrm{sp}(A)\subset[0,+\infty[$.
  2. Prouver que $\forall A\in S_n(\mathbb{R}),\ A^2\in S_n^+(\mathbb{R})$.
  3. Prouver que $\forall A\in S_n(\mathbb{R}),\ \forall B\in S_n^+(\mathbb{R}),\ AB=BA\Longrightarrow A^2B\in S_n^+(\mathbb{R})$.
  4. Soit $A\in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B\in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A=B^2$.

- **CCINP 68** : Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.
  1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
     a) sans calcul,
     b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3-A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
     c) en utilisant le rang de la matrice,
     d) en calculant A^2.
  2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
  Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.