EXERCICE 74 algèbre

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$,
x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

1- a) Symétrique réelle donc diag$^{\underline{\text{ble}}}$ par thm spectral.

b) $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{\text{dvt \% } C_2}{=} +(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 - 4\right]$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-3) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$\mathrm{Sp}\, A = \{1, -1, 3\}$$

$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 2 et $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de rang 2 et $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de rang 2 et $C_1 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_3(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

optionnel car les vp sont simples donc les sep sont des droites.

2- $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$(S) \iff X' = AX$

$\iff X' = PDP^{-1}X$ où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$ On pose $Y = P^{-1}X$

alors $Y' = P^{-1}X'$

car $C \mapsto P^{-1}C$ linéaire

$\iff Y' = DY$

Méthode à maîtriser

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & -1 & \\ (0) & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = 3y_3 \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1 : t \longmapsto \alpha e^{t} \\ y_2 : t \longmapsto \beta e^{-t} \\ y_3 : t \longmapsto \gamma e^{3t} \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x : t \mapsto \beta e^{-t} + \gamma e^{3t} \\ y : t \longmapsto \alpha e^{t} \\ z : t \longmapsto -\beta e^{-t} + \gamma e^{3t} \end{cases}$$

$X = PY$

ie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 75 algèbre

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

1_ $\chi_A = X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \det A = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

$\operatorname{Sp} A = \{1\}$ et $A \neq I_2$ donc A non diagonalisable.

2_ $A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $2C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$: on pose $v_1 = (2, -1)$.

On aura $a = c = 1$ car $\operatorname{Sp} A = \{1\}$.

On cherche v_2 tel que $b = 1$ ie tel que $f(v_2) = v_1 + v_2$.

On aura alors $\operatorname{Mat}_{(v_1,v_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriciellement, on résout $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = -1$$

On choisit $x = -1$ et $y = 0$ donc $v_2 = (-1, 0)$.

On a bien (v_1, v_2) base de $\mathbb{R}^2$ et, par construction $\operatorname{Mat}_{(v_1,v_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Autre solution</u> : Après avoir déterminé v_1, prendre v_2 quelconque, non colinéaire à v_1.

Par exemple $v_2 = (1, 0)$

$f(v_2)$ s'obtient par $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ie $f(v_2) = -v_1 + v_2$

$$\text{Mat}_{(v_1,v_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 – $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\qquad (S) \iff X' = AX = PTP^{-1}X \qquad$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{Y = P^{-1}X \\ Y' = P^{-1}X' \\ \text{car } X \mapsto P^{-1}X \\ \text{linéaire}}}{\iff} \quad Y' = TY \qquad\qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}{\iff} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = \phantom{y_1 +{}} y_2 \end{cases}$$

$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y_1' = y_1 + \alpha e^t & (L) \\ y_2(t) = \alpha e^t \end{cases}$$

<u>Pour (L) :</u>

(H) $\quad y_1' = y_1$ admet comme solutions les $t \mapsto \beta e^t$

Solution particulière : variation de la constante $\quad f_0 : t \mapsto g(t)e^t$ avec $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

f_0 solution de $(L) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ g'(t)e^t + \cancel{g(t)e^t} = \cancel{g(t)e^t} + \alpha e^t$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\quad g'(t) = \alpha$

On choisit $g : t \mapsto \alpha t$ donc $f_0 : t \mapsto \alpha t e^t$

<u>Autre méthode</u> : second membre de la forme $\alpha e^{1 \times t}$

équa° caract. associée à (H) : $r^2 = 1$ ie $r - 1 = 0$ (E)

1 racine simple de (E)

On a une solu° particulière $f_0 : t \mapsto \underset{\gamma}{\underset{\shortparallel}{Q(t)}} \times t^1 \times e^t$ où $\deg Q = \deg(\alpha) = 0$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f_0'(t) = f_0(t) + \alpha e^t$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\gamma[e^t + \cancel{te^t}] = \cancel{\gamma te^t} + \alpha e^t$ donc $\gamma = \alpha$

ie $f_0 : t \mapsto \alpha t e^t$

On a alors (S) $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \beta e^t + \alpha t e^t \\ y_2(t) = \alpha e^t \end{cases}$

$$\underset{\substack{X = PY \\ \text{ie} \\ \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \binom{y_1}{y_2}}}{\Leftrightarrow} \boxed{\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = (2\beta - \alpha) e^t + 2\alpha t e^t \\ y(t) = -\beta e^t - \alpha t e^t \end{cases}}$$

Prop 5 :

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$\forall t \in I,\ y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) y(t) = b(t) \iff \forall t \in I,\ X' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & 0 & 1 & \\ (0) & & \ddots & \ddots \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{= A(t)} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}}_{= B(t)}$$

$\Leftarrow \quad \begin{cases} y' = y' \\ y'' = y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = y^{(n-1)} \\ y^{(n)} = -a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_0 y + b \end{cases} \quad \Rightarrow$

$\square$

Exo 3 : $(\Leftarrow)$ ✓

$(\Rightarrow)$ Si Φ solution telle que $\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $t_0 \in I$ fixé.

Alors Φ solution du pb de Cauchy $\begin{cases} \Phi' = A\Phi \\ \Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Or $t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est aussi solution.

Par thm de Cauchy linéaire, $\Phi : t \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exo 4 : $T > 0$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ T-périodiques, continues

Φ sol° de $X' = A(t)X + B(t)$ est T-périodique ssi $\Phi(0) = \Phi(T)$.

$(\Rightarrow)$ ✓

$(\Leftarrow)$ Supposons $\Phi(0) = \Phi(T)$ et Φ solution.

But : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi(t+T) = \Phi(t)$.

Notons $X_0 = \Phi(0) = \Phi(T)$

Alors Φ et $\Psi : t \mapsto \Phi(t+T)$ sont solutions du plr de Cauchy

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

En effet, $\Psi(0) = \Phi(T) = X_0$.

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Psi'(t) = 1 \times \Phi'(t+T) = A(t+T)\,\Phi(t+T) + B(t+T)$

$$= A(t)\,\Psi(t) + B(t)$$

Comme A, B sont C^0 sur $\mathbb{R}$, par thm de Cauchy linéaire, $\Phi = \Psi$.

Corollaire 2 : Version matricielle

Soit $\Phi_1 : t \mapsto \exp(t(A+B))\,E_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$= 1^{\text{ère}}$ colonne de $\exp(t(A+B)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors Φ_1 dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi_1' : t \mapsto (A+B)\,\Phi_1(t)$. ($M \mapsto ME_1$ linéaire)

Soit $\Psi_1 : t \mapsto \exp(tA)\exp(tB)\,E_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Ψ_1 dérivable et $\Psi_1' : t \mapsto A\,\Psi_1(t) + \exp(tA)\,B\exp(tB)\,E_1$

$= (A+B)\,\Psi_1(t)$ car A et B commutent donc $\exp(tA)$ et B commutent.

De plus, $\Phi_1(0) = E_1 = \Psi_1(0)$

Comme $t \mapsto A+B$ (constante) est C^0 sur $\mathbb{R}$, par thm de Cauchy linéaire,

$\Phi_1 = \Psi_1$

Avec $t=1$, $\Phi_1(1) = \exp(A+B)E_1$
$= \Psi_1(1) = (\exp A)(\exp B)E_1$

Donc $\exp(A+B)$ et $\exp A \exp B$ ont m̂ première colonne.

De même avec les autres vecteurs E_j de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

Toutes les colonnes de $\exp(A+B)$ et $\exp A \exp B$ sont égales. $\square$

Thm 4 : Le thm 6 nous dit que l'ensemble S_H des solutions de (H) $X' = AX$ est un espace vectoriel de dimension n.

Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t \longmapsto \exp(tA)E_i$ où E_i i^e vecteur de la base canonique est solution de (H).

Soit $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \exp(tA)E_i = \exp(tA)\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i E_i)$
$= \exp(tA)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$

Or $\exp(tA) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $S_H = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \exp(tA) E_i \right)_{1 \leq i \leq n} = \{ t \mapsto \exp(tA) C, \quad C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \}$.

Puis $\exp(t_0 A) C = X_0 \iff C = \exp(-t_0 A) X_0$

et alors $t \mapsto \exp(tA) C = \exp(tA) \exp(-t_0 A) X_0$ commutent

$= \exp((t-t_0) A) X_0$. $\square$

<u>CCINP 74</u> : 2e méthode

1- $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2- $(S) \iff X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\iff \exists C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \ X : t \mapsto \exp(tA) C = P \exp(tD) \underbrace{P^{-1} C}_{= C'}$

$\iff \exists C' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \ X : t \mapsto P \begin{pmatrix} e^t & & (0) \\ & e^{-t} & \\ (0) & & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \ X : t \mapsto \left(e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$= \alpha e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x : t \mapsto \beta e^{-t} + \gamma e^{3t} \\ y : t \mapsto \alpha e^{t} \\ z : t \mapsto -\beta e^{-t} + \gamma e^{3t} \end{cases}$

<u>CCINP 75</u> : $\quad A = P T P^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$X' = AX \iff \exists C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad X : t \mapsto \exp(tA)\, C = P \exp(tT) \underbrace{P^{-1}C}_{=C'}$$

où $tT = \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \underbrace{tI_2 + tN}_{\text{commutent}}$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

nilp. d'indice 2

$$\text{donc } \exp(tT) = \exp(tI_2)\exp(tN) = e^t I_2 \times (I_2 + tN)$$
$$= e^t I_2 + te^t N = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$X' = AX \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad X : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & 2te^t - e^t \\ -e^t & -te^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (2\alpha - \beta)e^t + 2\beta te^t \\ -\alpha e^t - \beta t e^t \end{pmatrix}$$