TD ∗ Fonctions vectorielles, exponentielles

1 Calcul d'une exponentielle de matrice

Soient $A=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\1&-1&1&-1&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à A.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de u est B.
2. Calculer B^n pour $n\in\mathbb{N}$. Quel est le polynôme minimal de B ?
3. Calculer $\exp(tB)$ pour $t\in\mathbb{R}$.

2 X-ENS

Soit $a\in\mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation

$$\sin M=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}.$$

On pourra séparer les cas $a\neq 0$ et $a=0$.

3 X-ENS

Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=\exp A$.
On suppose que les cœfficients non diagonaux de A sont tous positifs.
Montrer que les cœfficients de B sont tous positifs.

4 X-ENS – Autour de la fonction exponentielle

1. Montrer que la restriction de $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'ensemble des matrices diagonalisables est injective.
2. Montrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   Pour la continuité de la réciproque, on pourra s'intéresser à des suites extraites et utiliser le rayon spectral.
3. Montrer que $\exp:\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ des matrices nilpotentes dans l'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})=I_n+\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ des matrices unipotentes.
4. Montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))=\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
5. Déterminer $\exp^{-1}(\{I_n\})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
6. Déterminer l'algèbre de Lie de $\mathcal{SO}(_n)$:

$$\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall t\in\mathbb{R},\ \ \exp(tA)\in\mathcal{SO}(n)\}.$$

5 X-ENS - Centrale – Formules de Lie

Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_p(A)=\left(I_n+\dfrac{1}{p}A\right)^p$.

1. Montrer que la suite $(f_p)_{p\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle en est la limite ?
2. Montrer, en utilisant des développements limités, que pour $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\left(\exp\left(\frac{1}{p}A\right)\exp\left(\frac{1}{p}B\right)\right)^p\xrightarrow[p\to\infty]{}\exp(A+B)$$

$$\left(\exp\left(\frac{1}{p}A\right)\exp\left(\frac{1}{p}B\right)\exp\left(-\frac{1}{p}A\right)\exp\left(-\frac{1}{p}B\right)\right)^{p^2}\xrightarrow[p\to\infty]{}\exp(AB-BA)$$

3. Soit G sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{G}=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall t\in\mathbb{R},\ \ \exp(tM)\in G\}$$

   (algèbre de Lie du groupe G).
   Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Par quelle autre opération $\mathcal{G}$ est-il stable ?