1. Continuité

1 Caractérisations de la continuité

Soit $f : E \to F$ où E, F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer que le continuité de f est équivalente à chacune des propositions suivantes :

1. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.
2. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.
3. Pour toute partie A de E, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
4. Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.
5. Pour toute partie C de F, $\mathrm{Fr}\left(f^{-1}(C)\right) \subset f^{-1}(\mathrm{Fr}(C))$.
6. En supposant f **injective** : l'image directe de tout compact de E est compact. Est-ce encore vrai si f non injective ?

Solution de 1 : Caractérisations de la continuité

---

2 Caractérisations de la continuité des formes linéaires réelles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et ϕ une forme linéaire non nulle sur E.
Le but de l'exercice est de montrer que ϕ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

1. Montrer le sens direct.
2. Supposons $H = \mathrm{Ker}\,\phi$ fermé.
   Montrer que $F = \phi^{-1}(\{1\})$ est fermé puis vérifier qu'il existe une boule fermée $\overline{B}(0_E, r)$ qui ne rencontre pas F.
   Montrer enfin que $\overline{B}(0_E, r) \subset \phi^{-1}([-1, 1])$ et conclure.

Solution de 2 : Caractérisations de la continuité des formes linéaires réelles

1. Si ϕ est continue, alors $\ker\phi = \phi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
2.
   - Fixons $y \in E$ tel que $\phi(y) = 1$ et notons $H = \ker\phi$. Soit $z \in E$. On a
   $$\phi(z) = 1 \Longleftrightarrow \phi(z) = \phi(y) \Longleftrightarrow \phi(z-y) = 0 \Longleftrightarrow z - y \in H \Longleftrightarrow z \in y + H$$
   Ainsi, $\phi^{-1}(\{1\}) = y + H$ est fermé puisque c'est le translaté de H qui est fermé.
   - On sait que $0 \notin \phi^{-1}(\{1\})$ qui est fermé. Il existe donc $r > 0$ tel que $\overline{B}(0, r) \cap \phi^{-1}(\{1\}) \subset B(0, 2r) \cap \phi^{-1}(\{1\}) = \varnothing$.
   - Supposons qu'il existe $x \in \overline{B}(0, r)$ tel que $|\phi(x)| > 1$. Alors $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x) = 1$ pour $\lambda = 1/\phi(x) \in]-1, 1[$. Mais alors $z = \lambda x \in \overline{B}(0, r)$ et $\phi(z) = 1$, une contradiction.
   - Il suffit de raisonner par homogénéité. Si $x \neq 0$, alors $\dfrac{rx}{\|x\|} \in \overline{B}(0, r)$ et donc $\left|\phi\left(\dfrac{rx}{\|x\|}\right)\right| \leqslant 1$. On en déduit que $|\phi(x)| \leqslant \dfrac{\|x\|}{r}$ et donc que ϕ est continue.

---

3 **X** Soit T une forme linéaire continue sur un espace normé E.

1. Donner plusieurs définitions de la norme subordonnnée de T.
2. On suppose $T \neq 0$. Soit x_0 tel que $T(x_0) \neq 0$. Montrer que $|||T||| = \dfrac{|T(x_0)|}{\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T)}$ (justifier l'existence du second membre).
3. Montrer que $\exists a \in E \setminus \{0\},\ |||T||| = \dfrac{T(a)}{\|a\|} \iff \exists b \in \operatorname{Ker} T,\ \|x_0 - b\| = \mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T)$

Solution de 3 : X

1. Voir cours.
2. Par caractérisation séquentielle de l'inf, on a une suite (y_n) d'éléments de $\operatorname{Ker} T$ telle que $\left\|x_0 - y_n\right\| \to \mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T)$.
   Alors $|T(x_0)| = \left|T(x_0 - y_n)\right| \leqslant |||T||| \cdot \left\|x_0 - y_n\right\|$ donc en faisant $n \to +\infty$,
   $$|T(x_0)| \leqslant |||T||| \cdot \mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T)$$
   Soit $y \in \operatorname{Ker} T$. Comme $z = x_0 - y \notin \operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Vect} z$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} T$ dans E.
   Soit $x \in E$. On a $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x_K \in \operatorname{Ker} T$ tel que $x = x_K + \lambda z$. Alors $T(x) = \lambda T(z) = \lambda T(x_0)$.
   Donc $|T(x)| = |T(x - x_K)| = |\lambda| \cdot |T(x_0)|$.
   Or $\|x - x_K\| = |\lambda| \|z\|$. Comme $z \neq 0_E$ $(z \notin \operatorname{Ker} T)$, on en tire
   $$|\lambda| \cdot |T(x_0)| = \frac{\|x - x_K\|}{\|z\|} |T(x_0)| = |T(x)| = |T(x - x_K)| \leqslant |||T||| \, \|x - x_K\|$$
   En prenant $x \notin \operatorname{Ker} T$, on a $x \neq x_K$ et donc
   $$\left\|x_0 - y\right\| = \|z\| \geqslant \frac{|T(x_0)|}{|||T|||}$$
   C'est valable pour tout $y \in \operatorname{Ker} T$, d'où on tire $\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T) \geqslant \dfrac{|T(x_0)|}{|||T|||}$.
   Finalement, $\boxed{|T(x_0)| = |||T||| \cdot \mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T).}$
   En particulier, $\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T) \neq 0$: $\operatorname{Ker} T$ est donc fermé (on retrouve le résultat de l'exercice précédent).
3. Quitte à changer a en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot a$ avec θ bien choisi ($-\theta$ argument de $T(a)$...), on peut toujours changer $\dfrac{|T(a)|}{\|a\|}$ en $\dfrac{T(a)}{\|a\|}$.
   Pour le sens réciproque, si $\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T) = \|x_0 - b\|$, alors $|||T||| = \dfrac{|T(x_0)|}{\|x_0 - b\|} = \dfrac{|T(x_0 - b)|}{\|x_0 - b\|}$ et il suffit de poser $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot (x_0 - b)$ où $-\theta$ est un argument de $x_0 - b \in \mathbb{K}$.
   Pour le sens direct, si $|||T||| = \frac{T(a)}{\|a\|}$, $T(a) \in \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T) = \dfrac{|T(x_0)|}{|||T|||} = \dfrac{|T(x_0)|}{T(a)} \|a\|$.
   Or $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Vect} x_0$ sont supplémentaires, donc on peut écrire $a = a_K + \lambda x_0$ avec $a_K \in \operatorname{Ker} T$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, donc $T(a) = \lambda T(x_0)$.
   Donc $\mathrm{d}(x_0, \operatorname{Ker} T) = \left|\dfrac{1}{\lambda}\right| \|a_K + \lambda x_0\| = \|x_0 - b\|$ avec $b = -\dfrac{1}{\lambda} a_K \in \operatorname{Ker} T$.

2. Compacité

4 Classique – Projection sur un convexe fermé

On désigne par $\mathscr{C}$ une partie convexe non vide d'un espace euclidien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. On suppose $\mathscr{C}$ prée. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathscr{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que
$$\|x-y\| = \inf_{z\in\mathscr{C}} \|x-z\| \quad (= \mathrm{d}(x,\mathscr{C})).$$
Le fait que la norme soit euclidienne ne sert que pour l'unicité.
2. On suppose seulement $\mathscr{C}$ fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.
3. Soit y un élément de $\mathscr{C}$; démontrer que
$$y = p(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall z\in\mathscr{C},\ \langle y-x, y-z\rangle \leqslant 0$$
Indication : pour $\Longrightarrow$, on pourra écrire que, si $z\in\mathscr{C}$, pour tout $t\in[0,1]$, $p(x)+t\big(z-p(x)\big)\in\mathscr{C}$.
4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :
$$\left\|p(x)-p\left(x'\right)\right\|^2 \leqslant \langle x-x', p(x)-p(x')\rangle$$
puis démontrer que p est continue.

Solution de 4 : Classique – Projection sur un convexe fermé

1. **Existence** Soit x fixé dans E. L'application $z\mapsto\|x-z\|$, continue sur le compact $\mathscr{C}$, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes ; en particulier, elle atteint un minimum en un point $y\in\mathscr{C}$.

   Unicité C'est nettement plus difficile, et il faut faire un dessin. Remarquons que l'existence ne suppose pas la norme euclidienne, on va en revanche en avoir besoin pour l'unicité.
   Supposons que y_1 et y_2 soient deux éléments de $\mathscr{C}$ tels que
$$\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = d(x,\mathscr{C})$$
   L'identité du parallélogramme donne alors
$$2(\|y_1-x\|^2+\|y_2-x\|^2) = \|y_1+y_2-2x\|^2+\|y_1-y_2\|^2$$
   (ce n'est qu'un dessin clair et bien observé qui peut donner l'idée d'écrire cela !)
   Divisons par 4 :
$$d(x,\mathscr{C})^2 = \left\|\frac{1}{2}(y_1+y_2)-x\right\|^2 + \frac{1}{4}\left\|y_1-y_2\right\|^2$$
   Mais, par convexité, $\frac{1}{2}(y_1+y_2)\in\mathscr{C}$, donc $\left\|\frac{1}{2}(y_1+y_2)-x\right\|^2 \geqslant$ $d(x,\mathscr{C})^2$, ce qui entraîne nécessairement $\|y_1-y_2\|^2=0$, donc $y_1=y_2$.
   On peut écrire différentes choses menant à cette unicité, voir des triangles isocèles et des triangles rectangles plutôt que des parallélogrammes, etc...
2. **Existence** On part de l'idée simple suivante : ce n'est pas parmi les points de $\mathscr{C}$ « éloignés » de x que l'on trouvera y. On considère donc encore x fixé dans E. Soit $r>0$ tel que
$$B'(x,r)\cap\mathscr{C}\neq\varnothing$$
   (l'existence d'un tel r ne pose pas de problème : on peut prendre $r=\mathrm{d}(x,y)$ où y est un élément quelconque de $\mathscr{C}$). Posons alors $\mathscr{C}'=B'(x,r)\cap\mathscr{C}$. Fermée (comme intersection de fermés) et bornée (car incluse dans une boule) dans E de dimension finie, $\mathscr{C}'$ est compacte. Il existe donc $y_0\in\mathscr{C}'$ tel que
$$\|x-y_0\| = \mathrm{d}(x,\mathscr{C}')$$
   Si $z\in\mathscr{C}$, de deux choses l'une :
   - ★ Soit $z\in\mathscr{C}'$, et alors $\|x-y_0\|\leqslant\|x-z\|$,
   - ★ Soit $z\in\mathscr{C}'$, et alors $\|x-y_0\|\leqslant r<\|x-z\|$

   On voit que $\|x-y_0\|$ minore $\{\|x-z\|\ ;\ z\in\mathscr{C}\}$. Mais $y_0\in\mathscr{C}$, donc
$$\|x-y_0\| = \mathrm{d}(x,\mathscr{C})$$

Unicité La démonstration du 1 marche encore : on n'a utilisé que la convexité de $\mathscr{C}$.

3. ★ Supposons que $y \in \mathscr{C}$ vérifie
$$\forall z \in \mathscr{C}, \quad \langle y-x, y-z\rangle \leqslant 0$$
Alors, pour tout $z \in \mathscr{C}$,
$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|(x-y)+(y-z)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2\langle x-y, y-z\rangle \\ &\geqslant \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \\ &\geqslant \|x-y\|^2\end{aligned}$$
ce qui montre bien que $y = p(x)$.

★ Supposons $y = p(x)$; soit $z \in \mathscr{C}$; par convexité, on a
$$\forall t \in [0,1], \quad (1-t)y + tz \in \mathscr{C}$$
et donc
$$\forall t \in [0,1], \quad \|(1-t)y + tz - x\|^2 \geqslant \|y-x\|^2$$
ce qui s'écrit
$$\forall t \in [0,1], \quad \|(y-x) + t(z-y)\|^2 \geqslant \|y-x\|^2$$
ou encore, en développant,
$$\forall t \in [0,1], \quad \|y-x\|^2 + t^2\|z-y\|^2 + 2t\langle y-x, z-y\rangle \geqslant \|y-x\|^2$$
et donc
$$\forall t \in [0,1], \quad t^2\|z-y\|^2 + 2t\langle y-x, z-y\rangle \geqslant 0$$
d'où, en multipliant par $1/t$ si $t > 0$,
$$\forall t \in]0,1], \quad t\|z-y\|^2 + 2\langle y-x, z-y\rangle \geqslant 0$$
et en prenant la limite quand $t \to 0$,
$$\langle y-x, z-y\rangle \geqslant 0$$
qui est bien ce qu'on voulait.

4. Partons du second membre :
$$\langle x-x', p(x)-p(x')\rangle = \langle x-p(x), p(x)-p(x')\rangle + \langle p(x)-p(x'), p(x)-p(x')\rangle + \langle p(x')-x', p(x)-p(x')\rangle$$
La question précédente permet alors de conclure à l'inégalité voulue.
Puis, par Cauchy-Schwarz, on obtient que p est 1-lipschitzienne donc continue.

5 Grand classique – Théorème des compacts emboîtés

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides inclus dans K. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Solution de 5 : Grand classique – Théorème des compacts emboîtés

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un élément x_n dans F_n et étudions la suite (x_n).

La suite (x_n) est une suite d'éléments du compact K, elle admet donc une valeur d'adhérence $\overline{x}$ et il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$$\left(x_{\varphi(k)}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \overline{x}$$
La suite (F_n) étant décroissante, on vérifie que, pour tout $p \in \mathbb{N}, (x_n)_{n\geqslant p}$ est une suite d'éléments de F_p. La suite extraite $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\geqslant p}$ est donc une suite d'éléments du fermé F_p et par conséquent $\overline{x} \in F_p$. Cela valant pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut conclure
$$\overline{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing.$$

6 Mines – Théorème de Dini

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.

Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues de K vers $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction g continue de K dans $\mathbb{R}$.

Utiliser le théorème des compacts emboîtés pour montrer que la convergence est uniforme.

Solution de 6 : Mines – Théorème de Dini

Par décroissance, on remarque

$$\forall x \in K,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \geqslant g(x)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit

$$F_n = \left\{x \in K,\ f_n(x) - g(x) \geqslant \varepsilon\right\} = \left(f_n - g\right)^{-1}([\varepsilon; +\infty[)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n$ est une partie fermée relatif à K en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue, F_n est donc une partie fermée. Aussi, $F_{n+1} \subset F_n$ car la suite (f_n) est décroissante. De plus,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing$$

car (f_n) converge simplement vers g. On en déduit qu'au moins l'une des parties F_N est vide et les suivantes le sont alors aussi de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \Longrightarrow \forall x \in K,\ 0 \leqslant f_n(x) - g(x) < \varepsilon$$

On peut alors conclure que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers g sur K.

7 Classique – Écrits Centrale ; Mines ; X-ENS – Propriété de Borel-Lebesgue

Soit K une partie non vide de E espace vectoriel normé.

1. Montrer que si K est compact, alors K est pré-compact, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut « recouvrir » K par des boules ouvertes de rayon ε, ce qu'il signifie qu'il existe une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de K telle que
$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$
2. On veut montrer que
$$K \text{ est compact} \iff K \text{ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue } (BL)$$
Où (BL) : « De tout recouvrement de K par des ouverts : $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$, on peut extraire un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{O}_i$ où J partie finie de I. »
   (a) On suppose K compact tel que $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$,
$$\exists\, i \in I, \quad B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_i.$$
   En déduire que K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.
   (b) On suppose que K n'est pas compact. Montrer que K ne vérifie pas la propriété de Borel-Lebesgue
   (c) Conclure.

Remarque : En passant au complémentaire, on obtient que les complémentaires des compacts sont les ouverts U pour lesquels pour toute suite de fermés dont l'intersection est incluse dans U, il existe une intersection d'un nombre fini de ces fermés qui soit incluse dans U.

Solution de 7 : Classique – Écrits Centrale ; Mines ; X-ENS – Propriété de Borel-Lebesgue

Supposons $K \neq \varnothing$

1. Par contraposée, Si on a $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x_1, \dots, x_n$, $K \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

   Donnons-nous $x_0 \in K$. puis $x_1 \in K$ tel que $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon)$. Puis $x_2 \notin \bigcup_{i=0}^{1} B(x_i, \varepsilon)$.

   Et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{K}$ tel que $x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$.

   On a alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq m$, $\|x_n - x_m\| \geqslant \varepsilon$.
   On peut donc pas extraire de (x_n) une suite convergente (sinon on aurait $\varepsilon \leqslant \left\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n+1)}\right\| \to 0$) : K n'est pas compact.
2. (a) Supposons K compact et $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.
   - On montre qu'on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $\exists\, i \in I, \quad B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_i$.
     Il suffira alors d'appliquer le résultat montré précédemment avec cet ε.
     Or, si, par l'absurde, ce n'était pas le cas, on aurait
     $$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, x \in K, \quad \forall\, i \in I, \quad B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{O}_i^c \neq \varnothing$$
     Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{n} \to 0$, on construit une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in I$, $B\left(x_n, \dfrac{1}{n}\right) \cap \mathcal{O}_i^c \neq \varnothing$.
     On extrait par compacité $x_{\varphi(n)} \to x \in K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.
     On a donc $i \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_i$.
     Prenons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in B\left(x_n, \dfrac{1}{n}\right) \cap \mathcal{O}_i^c$. Alors $\left\|y_n - x_n\right\| < \dfrac{1}{n}$ donc $y_n - x_n \to 0_E$.
     Mais $y_{\varphi(n)} = \left(y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right) + x_{\varphi(n)} \to x \in \mathcal{O}_i$ qui est ouvert.
     Donc à partir d'un certain rang, $y_{\varphi(n)} \in \mathcal{O}_i$ ce qui est contradictoire.
   - On a donc bien un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_i$.

     On a montré à la question précédente qu'on peut trouver $x_1, \dots, x_n \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

     Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $i_k \in I$ tel que $B(x_k, \varepsilon) \subset \mathcal{O}_{i_k}$. On a donc bien $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.

(b) Supposons K non compacte. On a donc une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ sans valeur d'adhérence.
Alors pour tout $x \in K$, on a $r_x > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in B(x, r_x)\}$ est fini (sinon on pourrait extraire une suite de (x_n) qui tende vers x).
On a $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ un recouvrement de K par des ouverts. On ne peut pas extraire de ce recouvrement un recouvrement fini $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$, sinon

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in K\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{n \in \mathbb{N},\ x_n \in B(x, r_x)\}$$

serait fini, donc K ne vérifie pas la propriété de Borel Lebesgue.

(c) L'équivalence est démontrée.

8 Encore un classique

Soit (u_n) une suite convergente dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, ℓ sa limite. Montrer que

$$\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

est compact

- directement pour E de dimension finie ;
- à l'aide de la propriété de Borel-Lebesgue dans le cas général.

Solution de 8 : Encore un classique

Soit $K = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$.

- Dans le cas où E est de dimension finie, on montre que K est une partie fermée et bornée de E.
La suite étant convergente, elle est bornée donc K l'est.
Si $x \notin K$, $u_n \not\to x$ donc on a $\varepsilon > 0$ tel que à partir d'un certain rang N, $u_n \notin B(x, \varepsilon)$, et alors, nécessairement, $\ell \notin B(x, \varepsilon)$.
Puis, comme $x \notin K$, en prenant ε' strictement inférieur à ε et au minimum des $\|x - u_n\|$ pour $n \in [\![0, N-1]\!]$, on aura $K \cap B(x, \varepsilon') = \varnothing$ donc K^c est ouvert et K est fermé.
- Dans le cas général, supposons $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ où les $\mathcal{O}_i$.
On a $j \in I$ tel que $\ell \in \mathcal{O}_j$ ouvert donc voisinage de ℓ.
On a donc un rang N à partir duquel $u_n \in \mathcal{O}_j$.
Puis, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $u_n \in K \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ donc on a $i_n \in I$ tel que $u_n \in \mathcal{O}_{i_n}$.
Finalement, $K \subset \bigcup_{i \in J} \mathcal{O}_i$ où $J = \{j, i_0, i_1, \dots, i_{N+1}\}$ est fini.
K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, donc est bien compact d'après l'exercice précédent.

9 Et encore un grand classique... Théorème de Riesz

Montrer qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa sphère unité est compacte.

Solution de 9 : Et encore un grand classique... Théorème de Riesz

Source : FGN An 3 2.1

Le sens directe est connu.

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde, en supposant E de dimension infinie et en construisant une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de S qui ne peut pas avoir de valeur d'adhérence. Si E est un espace préhilbertien c'est très facile à faire : il suffit de prendre une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ orthonormée (de telles suites existent, par exemple grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). En effet, on a alors $\left\|x_n - x_p\right\| = \sqrt{2}$ pour $n \neq p$ quelconques et aucune sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ ne peut converger.

Revenons au cas général, un peu plus compliqué car on ne dispose pas de produit scalaire.

On va construire, par récurrence, une suite de S telle que $\left\|x_n - x_p\right\| \geqslant 1$ pour $n \neq p$. On pourra alors conclure comme précédemment. Partons d'un vecteur unitaire x_0 quelconque.

Supposons que les p premiers termes $x_0, \ldots, x_{p-1}$ de la suite soient construits.

On cherche $x_p \in S$ tel que $\left\|x_p - x_k\right\| \geqslant 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

Notons $F = \mathrm{Vect}\left(x_0, \ldots, x_{p-1}\right)$.

L'idée est de compléter notre suite avec un vecteur x_p dont la distance à F soit exactement égale à 1 pour assurer les $\left\|x_p - x_k\right\| \geqslant 1$.

Comme E n'est pas de dimension finie par hypothèse on peut trouver un vecteur $a \in E \backslash F$.

Comme F est de dimension finie, F est fermé et il existe de manière classique $b \in F$ tel que $d(a,F) = \|a-b\|$.

(Rappelons l'argument : l'application $x \mapsto \|a-x\|$ est continue et on vérifie facilement que

$$\mathrm{d}(a,F) = \inf_{x\in F} \|x-a\| = \inf_{x \in F\cap \overline{B}(a,r)} \|x-a\|$$

pour $r > \mathrm{d}(a,F) + \|a\|$. Cette borne inférieure est donc atteinte car $F \cap \overline{B}(a,r)$ est une partie fermée et bornée, donc compacte, de F.)

En particulier, la distance $\mathrm{d}(a,F)$ est strictement positive, et on a $\|a-b\| = \mathrm{d}(a,F) = \mathrm{d}(a-b,F)$, comme $b \in F$.

Posons alors $x_p = \dfrac{a-b}{\|a-b\|}$, vecteur unitaire de E tel que $\mathrm{d}\left(x_p, F\right) = 1$.

En particulier $\left\|x_p - x_k\right\| \geqslant 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$ et ce vecteur convient.

La suite ainsi construite par récurrence n'a pas de valeur d'adhérence et le résultat est prouvé.

10 X : Théorème de Kakutani

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie, K un convexe compact non vide E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u(K) \subset K$. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + u + \cdots + u^{n-1}\right)$.

1. Montrer, à l'aide du théorème des compacts emboîtés, que $H = \bigcap_{n \geqslant 1} u_n(K) \neq \varnothing$.
2. Montrer que $x \in H$ si et seulement si $u(x) = x$.

Le résultat reste vrai en dimension infinie avec la même démonstration, à condition de prendre u continu.

On en déduit facilement que si $u_1, \ldots, u_p$ sont des endomorphismes qui stabilisent K et qui commutent deux à deux, alors les u_i ont un point fixe commun dans K. Plus précisément, l'ensemble des points fixes communs aux u_i est un compact convexe non vide.

En effet, la propriété est démontrée pour $p = 1$ dans l'exercice. Si elle est vrai au rang p, l'ensemble des points fixes communs à $u_1, \ldots, u_p$ est un compact convexe H non vide, stable par u_{p+1}, car u_{p+1} commute avec $u_1, \ldots, u_p$. L'ensemble des points de H stables par u_{p+1} est donc un compact convexe non vide.

Solution de 10 : X : Théorème de Kakutani

Source : FGN An 3 2.25

1. Comme u_n est continue, $u_n(K)$ est un compact et comme u_n est linéaire, $u_n(K)$ est convexe.

   On observe aussi que si $x \in K$ alors $u_n(x) = \dfrac{x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x)}{n} \in K$ car K est convexe.

   Ainsi, $u_n(K) \subset$ K . On va essayer d'utiliser le théorème des compacts emboîtés.

   On a déjà $u_2(K) \subset u_1(K) = K$. Toutefois si $y = \dfrac{x + u(x) + u^2(x)}{3} \in u_3(K)$ on ne voit pas pourquoi y serait aussi dans $u_2(K)$.

   En revanche si $y = \dfrac{x + u(x) + u^2(x) + u^3(x)}{4} \in u_4(K)$ on peut écrire $y = \dfrac{x' + u(x')}{2}$ avec $x' = \dfrac{x + u^2(x)}{2}$ de sorte que $y \in u_2(K)$. Cette idée se généralise.

   Montrons que si n divise m alors $u_m(K) \subset u_n(K)$. Posons $m = kn$ avec $k \geqslant 1$. Pour tout $x \in K$ on a

   $$u_m(x) = \frac{1}{kn} \sum_{i=0}^{kn-1} u^i(x) = \frac{1}{kn} \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{n-1} u^{\ell n + j}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u^j\left(x'\right) = u_n\left(x'\right)$$

   avec $x' = \dfrac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} u^{\ell n}(x) \in K$ (car K est convexe). On a donc montré que si n divise m alors $u_m(K) \subset u_n(K)$.

   La suite $(u_{n!}(K))_{n \geqslant 1}$ est donc une suite décroissante de compacts convexes non vides. Ainsi, $\bigcap_{n \geqslant 1} u_{n!}(K)$ est un compact non vide.

   Il est inclus dans $H = \bigcap_{n \geqslant 1} u_n(K)$, car $u_{n!}(K) \subset u_n(K)$ pour tout n et en fait égal à H, car l'inclusion inverse est évidente.

   Donc H est également un convexe compact non vide.

2. Il est clair que si $u(x) = x$, alors $u_n(x) = x$ pour tout n et donc $x \in H$. Inversement, soit $x \in H$. Pour tout n il existe donc un vecteur $y_n \in K$ tel que $x = u_n\left(y_n\right)$. On a alors :

   $$u(x) - x = \frac{u^n\left(y_n\right) - y_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   car les suites $\left(y_n\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(u^n\left(y_n\right)\right)_{n \geqslant 1}$ sont dans K donc bornées. Ainsi, $u(x) = x$.

11 Image réciproque de compacts par une fonction continue

1. (a) Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue telle que pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ soit compact.

   Montrer, en utilisant l'exercice 8, que f est une application fermée, c'est-à-dire telle que l'image (directe) de tout fermé de E soit fermée.

   (b) Existe-t-il des applications continues qui ne soient pas fermées ?

2. **Application** : on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble F_n des polynômes unitaires de degré n à cœfficients réels dont toutes les racines sont réelles est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution de 11 : Image réciproque de compacts par une fonction continue

Source : Gourdon

1. (a) Soit F un fermé de E. Soit $(y_n) = \left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(F)$ qui converge vers un point $y \in F$. Il s'agit de montrer que $y \in f(F)$.

   L'ensemble $K = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est un compact de F d'après l'exercice 8, l'ensemble $f^{-1}(K)$ est donc compact.

   La suite (x_n) de F prenant ses valeurs dans $f^{-1}(K)$, on peut en extraire une sous suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons x sa limite. Comme F est fermé, $x_{\varphi(n)} \to x \in F$, et par continuité de f,

$$f\left(x_{\varphi(n)}\right) = y_{\varphi(n)} \to f(x) = y$$

   donc $y = f(x) \in f(F)$. L'ensemble $f(F)$ est donc bien fermé.

   (b) Il existe des applications continues non fermées. Par exemple, $\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$ est continue et pourtant, $\exp(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$ n'est pas fermé.

2. Le résultat sera prouvé si on montre que l'application continue

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n) & \longmapsto & (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) \end{array} \right.$$

   est fermée, puisque $F_n = f(\mathbb{R}^n)$. En vertu du résultat de la question 1/ a), il suffit pour cela de prouver que pour tout compact K de $\mathbb{R}_n[X]$, $f^{-1}(K)$ est un compact.

   Donnons nous un compact K de $\mathbb{R}_n[X]$. L'ensemble $f^{-1}(K)$ est déjà un fermé puisque K est fermé et que f est continue. Montrons qu'il est borné. Comme K est compact, K est borné, donc il existe $M > 0$ tel que

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K, \quad \|P\| = \sup_k |a_k| \leqslant M$$

   Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in f^{-1}(K)$, de sorte que $P = f(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) \in K$. Écrivons $P = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$. Si λ est une racine de P, nous allons prouver que $|\lambda| \leqslant 1 + \|P\|$. Si $|\lambda| \leqslant 1$, c'est terminé, sinon l'égalité $P(\lambda) = 0$ entraîne

$$|\lambda| = \left| a_1 + \frac{a_2}{\lambda} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\lambda^{n-2}} + \frac{a_n}{\lambda^{n-1}} \right| \leqslant \|P\| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^k} \right) = \|P\| \frac{1}{1-\frac{1}{|\lambda|}}$$

   d'où on tire facilement $|\lambda| \leqslant 1 + \|P\| \leqslant 1 + M$.

   Ainsi, nous avons prouvé que si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in f^{-1}(K)$, alors pour tout i, $|\lambda_i| \leqslant 1+M$. En d'autres termes, $f^{-1}(K)$ est borné. L'ensemble $f^{-1}(K)$, fermé borné de $\mathbb{R}^n$, est donc compact, d'où le résultat.

12 Jauge d'un compact convexe : une caractérisation des boules unités fermées

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la boule unité fermée d'une norme est un compact convexe, symétrique par rapport à 0, et voisinage de 0.
2. Inversement, soit K un compact convexe de E, symétrique par rapport à 0 et voisinage de 0.
   On note j sa jauge : pour $x \in E$, il s'agit de
   $$j(x) = \inf\ I(x), \text{ où } I(x) = \{\lambda > 0,\ x \in \lambda K\}$$
   Montrer que j est une norme sur E et que K est sa boule unité fermée.

   Indication : On pourra montrer que $I(x) = [j(x), +\infty[$ si $j(x) > 0$ et $I(x) =]0, +\infty[$ si $j(x) = 0$, et remplacer l'inégalité triangulaire par la convexité de la boule unité fermée.

Remarque : on donne ici une caractérisation générale des boules unités par des propriétés géométriques et topologiques.

Solution de 12 : Jauge d'un compact convexe : une caractérisation des boules unités fermées

Source : Rouvière

1. La boule $\overline{B}(0_E, 1)$ de E pour la norme $\|\cdot\|$ est
   - symétrique par rapport à 0 car $\|-x\| = \|x\|$;
   - convexe grâce à l'inégalité triangulaire
     $$\|\lambda x + \mu y\| \leqslant \lambda\|x\| + \mu\|y\| \leqslant \lambda + \mu = 1$$
     où $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $\lambda, \mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$;
   - fermée car $x \mapsto \|x\|$ est une fonction continue sur E et bornée par définition donc compacte car E est de dimension finie ;
   - voisinage de 0 car elle contient $B(0_E, 1)$.
2. Soit x un point de E. Intuitivement le nombre $j(x)$ exprime combien de fois il faut gonfler K jusqu'à avaler le point x.
   Comme K est un voisinage de 0, l'ensemble $I(x)$ n'est pas vide : car K contient une boule de rayon $r > 0$ centrée à l'origine, donc $\frac{1}{\lambda}x$ appartient à K dès que $\lambda > \frac{\|x\|}{r}$.
   Comme K est fermé, $I(x)$ est une partie fermée de $]0, +\infty[$: c'est l'image réciproque de K par l'application continue $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}x$ de $]0, +\infty[$ dans E.
   Comme K est convexe et contient 0, $I(x)$ est une demi-droite : pour $\lambda \in I(x)$ et $\mu \geqslant \lambda$, on a $\frac{1}{\mu}x = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{\lambda}x \in K$ (dans le segment d'extrémités 0 et $\frac{1}{\lambda}x$ appartenant au convexe K), d'où $\mu \in I(x)$.
   Notant $j(x)$ la borne inférieure de $I(x)$ on a donc deux cas possibles :
   $$I(x) = \begin{cases} [j(x), +\infty[& \text{si } j(x) > 0 \\ ]0, +\infty[& \text{si } j(x) = 0 \end{cases}$$
   Défini-positivité Comme K est compact, $j(x) = 0$ entraîne $x = 0$: la fonction $x \mapsto \|x\|$ (norme quelconque), continue sur le compact K, y est bornée ; il existe donc $R > 0$ tel que K soit contenu dans la boule $\overline{B}(0_E, R)$.
   Si $j(x) = 0$, on a $I(x) =]0, +\infty[$, c'est-à-dire $x \in \lambda K$ pour tout $\lambda > 0$; par suite $\frac{1}{\lambda}\|x\| \leqslant R$ pour tout $\lambda > 0$, d'où $x = 0$.

   Homogénéité Comme K est symétrique par rapport à 0 et contient 0, on a $j(\alpha x) = |\alpha| j(x)$ pour tout réel α : en effet,
   - pour $\alpha > 0$, $x \in \lambda K$ équivaut à $\alpha x \in \alpha\lambda K$, d'où $I(\alpha x) = \alpha I(x)$ et $j(\alpha x) = \alpha j(x)$;
   - le cas $\alpha < 0$ se ramène au précédent par symétrie de K ;
   - enfin $j(0) = 0$ car $I(0) =]0, +\infty[$ de façon évidente.

   Inégalité triangulaire Par définition de $I(x)$, x appartient à K si et seulement si 1 appartient à $M(x)$, c'est-à-dire $1 \geqslant j(x)$ dans l'un ou l'autre cas. On a donc
   $$K = \{x \in \mathrm{E},\ j(x) \leqslant 1\}$$
   partie convexe de E, ce qui redonne l'inégalité triangulaire grâce à l'exercice classique sur le remplacement de l'inégalité triangulaire par la convexité de la boule unité.

   Ainsi, j est une norme sur E, de boule unité K.

3. Connexité par arcs

13 Connexe par arcs ⇒ connexe

En étudiant la continuité d'une fonction indicatrice, montrer que si A partie d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs, les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées relativement à A sont $\varnothing$ et A.

Lorsque c'est le cas, on parle d'ensemble **connexe**.

De manière équivalente, si A est la réunion de deux ouverts relatifs disjoints, alors l'un deux est nécessairement vide (et l'autre est la partie A entière).

Solution de 13 : Connexe par arcs ⇒ connexe

Soit B une partie ouverte et fermée de A.

On montre que $\mathbb{1}_B$ est continue en passant par la définition : si $a \in B$, qui est un ouvert de A, on a un voisinage de a dans A inclus dans B sur lequel $\mathbb{1}_B(x) = 1 \xrightarrow[x\to a]{} \mathbb{1}_B(a) = 1$; si $a \in B^c$, qui est un ouvert de A, on a un voisinage de a dans A inclus dans B^c sur lequel $\mathbb{1}_B(x) = 0 \xrightarrow[x\to a]{} \mathbb{1}_B(a) = 0$.

Mais alors, comme A est connexe par arcs, $\mathbb{1}_B(A) \in \mathscr{P}(\{0,1\})$ l'est donc $\mathbb{1}_B$ est constante et donc $B = \varnothing$ ou $B = A$.

---

14 Connexité par arc du complémentaire de sous-espaces

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E\backslash H$ est-il connexe par arcs ?
2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leqslant n-2$. L'ensemble $E\backslash F$ est-il connexe par arcs ?

Solution de 14 : Connexité par arc du complémentaire de sous-espaces

1. Non. Si on introduit f forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$, f est continue et $f(E\backslash H) = \mathbb{R}^*$ non connexe par arcs donc $E\backslash H$ ne peut l'être.
2. Oui. Introduisons une base de F notée $(e_1, \dots, e_p)$ que l'on complète en une base de E de la forme $(e_1, \dots, e_n)$.
   Sans peine tout élément $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ de $E\backslash F$ peut être lié par un chemin continue dans $E\backslash F$ au vecteur e_n si $x_n > 0$ ou au vecteur $-e_n$ si $x_n < 0$: il suffit de prendre
   $$\varphi(t) = (1-t)x_1 e_1 + \cdots + (1-t)x_{n-1} e_{n-1} + ((1-t)x_n + t)\, e_n$$
   ou
   $$\varphi(t) = (1-t)x_1 e_1 + \cdots + (1-t)x_{n-1} e_{n-1} + ((1-t)x_n - t)\, e_n.$$
   De plus, les vecteurs e_n et $-e_n$ peuvent être reliés par un chemin continu dans $E\backslash F$ en prenant
   $$\psi(t) = (1-2t)e_n$$
   Ainsi $E\backslash F$ est connexe par arcs.

---

15 Mines-Ponts

Déterminer les composantes connexes par arcs de l'ensemble
$$\mathscr{R} = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ A^2 = I_n\right\}.$$

Solution de 15 : Mines-Ponts

Soit $A \in \mathscr{R}$. Cette matrice est diagonalisable semblable à une matrice de la forme
$$J_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \text{ avec } k \in [\![0;n]\!]$$
et donc $\mathrm{tr}\, A = n - 2k$. L'application trace est continue (car linéaire au départ d'un espace de dimension finie) et prend uniquement des valeurs entières sur $\mathscr{R}$, cette application est donc constante sur chaque composante connexe par arcs de $\mathscr{R}$. Les composantes connexes par arcs de $\mathscr{R}$ sont donc incluses dans les parties
$$\mathscr{R}_k = \{A \in \mathscr{R},\ \mathrm{tr}(A) = n - 2k\} \quad \text{pour } k \in [\![0;n]\!].$$

Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Montrons que $\mathscr{R}_k$ est connexe par arcs. Soit $A \in \mathscr{R}_k$. Il existe une matrice $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1} J_k P$. Or on sait que $\mathscr{GL}(\mathbb{C})$ est une partie connexe par arcs et il existe donc une application $\gamma : [0;1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ continue prenant ses valeurs dans $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = P$. Considérons alors $\varphi : [0;1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par
$$\varphi(t) = (\gamma(t))^{-1} J_k \gamma(t) \quad \text{pour } t \in [0;1].$$

L'application φ est continue, prend ses valeurs dans $\mathscr{R}_k$ et relie $\varphi(0) = J_k$ à $\varphi(1) = A$. On en déduit que $\mathscr{R}_k$ est une partie connexe par arcs . Finalement ; les composantes connexes par arcs de $\mathscr{R}$ sont les $\mathscr{R}_k$ pour $k = 0, \dots, n$.

16 Composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}(n)$

1. Montrer que $\mathcal{SO}(2)$ est connexe par arcs.
2. Soit $n \geqslant 2$. En utilisant la réduction des isométries vectorielles, montrer que $\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs.
3. Montrer que, si $M \in \mathcal{SO}(n)$ et $M' \in \mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{SO}(n)$, il n'existe pas d'application ψ continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathcal{O}(n)$, telle que $\psi(0) = M$ et $\psi(1) = M'$.
4. Montrer que $\mathcal{O}(n)$ possède exactement deux composantes connexes par arcs.

Solution de 16 : Composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}(n)$

1. Définir une application continue ϕ de $[0,1]$ dans $\mathcal{SO}(2)$ telle que $\phi(0) = I_2$ et $\phi(1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, ou, encore mieux, voir que $\mathcal{SO}(2) = f(\mathbb{R})$ image du connexe par arcs $\mathbb{R}$ par la fonction continue $f : \theta \mapsto R_\theta$.
2. La forme réduite d'un élément de $\mathcal{SO}(n)$ comporte un nombre pair de -1.
   En les rassemblant deux par deux, on fait apparaître des blocs R_π.
   Ainsi, la forme réduite est diagonale par blocs $\operatorname{diag}(I_p, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_q})$.
   Il suffit alors de considérer l'application continue $f : t \in [0,1] \mapsto \operatorname{diag}(I_p, R_{t\theta_1}, \ldots, R_{t\theta_q})$.
3. $\det \circ \psi$ ne serait pas continue.
4. Reste à voir que $\mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs : il suffit de remarque que si S est une matrice de réflexion, la bijection continue $M \mapsto SM$ envoie le connexe par arcs $\mathcal{SO}(n)$ sur $\mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{SO}(n)$.