TD ∗ Continuité, Compacité, Connexité par Arcs

1. Continuité

1 Caractérisations de la continuité

Soit $f : E \to F$ où E, F sont deux espaces vectoriels normés. Montrer que le continuité de f est équivalente à chacune des propositions suivantes :

1. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.
2. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E.
3. Pour toute partie A de E, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
4. Pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.
5. Pour toute partie C de F, $\mathrm{Fr}\left(f^{-1}(C)\right) \subset f^{-1}\left(\mathrm{Fr}(C)\right)$.
6. En supposant f **injective** : l'image directe de tout compact de E est compact. Est-ce encore vrai si f non injective ?

2 Caractérisations de la continuité des formes linéaires réelles

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et ϕ une forme linéaire non nulle sur E.
Le but de l'exercice est de montrer que ϕ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

1. Montrer le sens direct.
2. Supposons $H = \mathrm{Ker}\,\phi$ fermé.
   Montrer que $F = \phi^{-1}(\{1\})$ est fermé puis vérifier qu'il existe une boule fermée $\overline{B}(0_E, r)$ qui ne rencontre pas F.
   Montrer enfin que $\overline{B}(0_E, r) \subset \phi^{-1}([-1,1])$ et conclure.

3 X Soit T une forme linéaire continue sur un espace normé E.

1. Donner plusieurs définitions de la norme subordonnnée de T.
2. On suppose $T \neq 0$. Soit x_0 tel que $T(x_0) \neq 0$. Montrer que $|||T||| = \dfrac{|T(x_0)|}{\mathrm{d}(x_0, \mathrm{Ker}\,T)}$ (justifier l'existence du second membre).
3. Montrer que $\exists a \in E \setminus \{0\},\ |||T||| = \dfrac{T(a)}{\|a\|} \iff \exists b \in \mathrm{Ker}\,T,\ \|x_0 - b\| = \mathrm{d}(x_0, \mathrm{Ker}\,T)$

2. Compacité

4 Classique – Projection sur un convexe fermé

On désigne par $\mathscr{C}$ une partie convexe non vide d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. On suppose $\mathscr{C}$ prée. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathscr{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que
   $$\|x-y\| = \inf_{z\in\mathscr{C}} \|x-z\| \quad (= \mathrm{d}(x,\mathscr{C})).$$
   Le fait que la norme soit euclidienne ne sert que pour l'unicité.
2. On suppose seulement $\mathscr{C}$ fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.
3. Soit y un élément de $\mathscr{C}$; démontrer que
   $$y = p(x) \iff \forall z \in \mathscr{C},\ \langle y-x, y-z\rangle \leqslant 0$$
   Indication : pour $\Longrightarrow$, on pourra écrire que, si $z \in \mathscr{C}$, pour tout $t \in [0,1]$, $p(x) + t\left(z - p(x)\right) \in \mathscr{C}$.
4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :
   $$\left\|p(x) - p\left(x'\right)\right\|^2 \leqslant \langle x - x', p(x) - p(x')\rangle$$
   puis démontrer que p est continue.

5 Grand classique – Théorème des compacts emboîtés

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$. et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides inclus dans K. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

6 Mines – Théorème de Dini

Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.
Soit $\left(f_n\right)$ une suite décroissante de fonctions continues de K vers $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction g continue de K dans $\mathbb{R}$.
Utiliser le théorème des compacts emboîtés pour montrer que la convergence est uniforme.

7 Classique – Écrits Centrale ; Mines ; X-ENS – Propriété de Borel-Lebesgue

Soit K une partie non vide de E espace vectoriel normé.

1. Montrer que si K est compact, alors K est pré-compact, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut « recouvrir » K par des boules ouvertes de rayon ε, ce qu'il signifie qu'il existe une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de K telle que
   $$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$
2. On veut montrer que
   $$K \text{ est compact} \iff K \text{ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue } (BL)$$
   Où (BL) : « De tout recouvrement de K par des ouverts : $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i$, on peut extraire un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{i\in J} \mathscr{O}_i$ où J partie finie de I. »
   (a) On suppose K compact tel que $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i$. Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$,
   $$\exists i \in I,\quad B(x,\varepsilon) \subset \mathscr{O}_i.$$
   En déduire que K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.
   (b) On suppose que K n'est pas compact. Montrer que K ne vérifie pas la propriété de Borel-Lebesgue
   (c) Conclure.

Remarque : En passant au complémentaire, on obtient que les complémentaires des compacts sont les ouverts U pour lesquels pour toute suite de fermés dont l'intersection est incluse dans U, il existe une intersection d'un nombre fini de ces fermés qui soit incluse dans U.

8 Encore un classique

Soit (u_n) une suite convergente dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, ℓ sa limite. Montrer que

$$\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

est compact

- directement pour E de dimension finie ;
- à l'aide de la propriété de Borel-Lebesgue dans le cas général.

9 Et encore un grand classique... Théorème de Riesz

Montrer qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa sphère unité est compacte.

10 X : Théorème de Kakutani

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie, K un convexe compact non vide E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u(K) \subset K$. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + u + \cdots + u^{n-1}\right)$.

1. Montrer, à l'aide du théorème des compacts emboîtés, que $H = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} u_n(K) \neq \varnothing$.
2. Montrer que $x \in H$ si et seulement si $u(x) = x$.

Le résultat reste vrai en dimension infinie avec la même démonstration, à condition de prendre u continu.

On en déduit facilement que si $u_1, \ldots, u_p$ sont des endomorphismes qui stabilisent K et qui commutent deux à deux, alors les u_i ont un point fixe commun dans K. Plus précisément, l'ensemble des points fixes communs aux u_i est un compact convexe non vide.

En effet, la propriété est démontrée pour $p = 1$ dans l'exercice. Si elle est vrai au rang p, l'ensemble des points fixes communs à $u_1, \ldots, u_p$ est un compact convexe H non vide, stable par u_{p+1}, car u_{p+1} commute avec $u_1, \ldots, u_p$. L'ensemble des points de H stables par u_{p+1} est donc un compact convexe non vide.

11 Image réciproque de compacts par une fonction continue

1. (a) Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application continue telle que pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ soit compact.
   Montrer, en utilisant l'exercice 8, que f est une application fermée, c'est-à-dire telle que l'image (directe) de tout fermé de E soit fermée.
   (b) Existe-t-il des applications continues qui ne soient pas fermées ?
2. **Application** : on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble F_n des polynômes unitaires de degré n à cœfficients réels dont toutes les racines sont réelles est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

12 Jauge d'un compact convexe : une caractérisation des boules unités fermées

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la boule unité fermée d'une norme est un compact convexe, symétrique par rapport à 0, et voisinage de 0.
2. Inversement, soit K un compact convexe de E, symétrique par rapport à 0 et voisinage de 0.
   On note j sa jauge : pour $x \in E$, il s'agit de

   $$j(x) = \inf\ I(x),\ \text{où}\ I(x) = \{\lambda > 0,\ x \in \lambda K\}$$

   Montrer que j est une norme sur E et que K est sa boule unité fermée.

   Indication : On pourra montrer que $I(x) = [j(x), +\infty[$ si $j(x) > 0$ et $I(x) =]0, +\infty[$ si $j(x) = 0$, et remplacer l'inégalité triangulaire par la convexité de la boule unité fermée.

Remarque : on donne ici une caractérisation générale des boules unités par des propriétés géométriques et topologiques.

3. Connexité par arcs

13 Connexe par arcs ⇒ connexe

En étudiant la continuité d'une fonction indicatrice, montrer que si A partie d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs, les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées relativement à A sont $\varnothing$ et A.

Lorsque c'est le cas, on parle d'ensemble **connexe**.

De manière équivalente, si A est la réunion de deux ouverts relatifs disjoints, alors l'un deux est nécessairement vide (et l'autre est la partie A entière).

14 Connexité par arc du complémentaire de sous-espaces

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $E \backslash H$ est-il connexe par arcs ?
2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \leqslant n-2$. L'ensemble $E \backslash F$ est-il connexe par arcs ?

15 Mines-Ponts

Déterminer les composantes connexes par arcs de l'ensemble

$$\mathscr{R} = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ A^2 = I_n\right\}.$$

16 Composantes connexes par arcs de $\mathscr{O}(n)$

1. Montrer que $\mathscr{SO}(2)$ est connexe par arcs.
2. Soit $n \geqslant 2$. En utilisant la réduction des isométries vectorielles, montrer que $\mathscr{SO}(n)$ est connexe par arcs.
3. Montrer que, si $M \in \mathscr{SO}(n)$ et $M' \in \mathscr{O}(n) \backslash \mathscr{SO}(n)$, il n'existe pas d'application ψ continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathscr{O}(n)$, telle que $\psi(0) = M$ et $\psi(1) = M'$.
4. Montrer que $\mathscr{O}(n)$ possède exactement deux composantes connexes par arcs.