

TD * RÉDUCTION ET POLYNÔMES

1 X-ENS Soit $\mathcal{B} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, u \text{ bornée}\}$ et $T: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ qui à $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ associe $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T . Que dire d'un sous-espace de dimension finie stable par T ?

2 Mines

- Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \text{Id}$.
Décrire les sous-espaces stables de u .
- Même question avec E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

3 X Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque. Soit u un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur non nul.
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme $P(u)$ admet-il un polynôme annulateur non nul ?

4 Décomposition de Dunford

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'existence d'un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que

- $u = d + n$;
- d et n commutent ;
- d est diagonalisable et n est nilpotent.

Vérifier en outre que d et n sont des polynômes en u .

5 Centrale Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E . On note χ le polynôme caractéristique de u .

- Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de E stables par u et tels que $E = V \oplus W$. On note χ' et χ'' les polynômes caractéristiques des endomorphismes induits par u sur V et W . Montrer $\chi = \chi' \chi''$.
- On considère la décomposition en facteurs irréductibles $\chi = \prod_i P_i^{\alpha_i}$.
Montrer que pour tout i , $\dim(\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))) = \alpha_i \deg P_i$.
- Montrer le polynôme minimal de u est égal à χ si, et seulement si, pour tout $k \leq \alpha_i$, $\dim(\text{Ker}(P_i^k(u))) = k \deg P_i$.

6 X-ENS : Endomorphismes semi-simples

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **semi-simple** si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable.

- Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
 - u est diagonalisable ;
 - χ_u est scindé et u est semi-simple.
- Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
 - u est semi-simple ;
 - le polynôme minimal π_u de u est sans facteur carré.

7 Endomorphismes cycliques : classique oral et écrit

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On définit

$$I = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0\} \quad \text{et} \quad I_x = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}.$$

- Montrer l'existence de polynômes unitaires non nuls π et π_x tels que $I = \pi \mathbb{K}[X]$ et $I_x = \pi_x \mathbb{K}[X]$. Montrer que π_x divise π .
- Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi$.
Indication : utiliser la décomposition de π en irréductibles et le lemme de décomposition des noyaux.
- On dit que u est **cyclique** s'il existe $x \in E$ tel que $E = \text{Vect}(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$.
Montrer que u est cyclique si et seulement si $\pi = \chi_u$.
- Montrer que u est cyclique si et seulement si les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.

8 X-ENS : Endomorphismes simples

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est **simple** lorsque les seuls sous-espaces de E stables par u sont triviaux.
Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

- u est simple ;
- Le polynôme caractéristique χ_u de u est irréductible sur \mathbb{K} .

Les exercices suivants demandent des connaissances sur les fonctions continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

9 X-ENS : Topologie matricielle

- Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour l'adhérence, on pourra vérifier que si P est un polynôme réel unitaire de degré n , alors il est scindé si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\text{Im } z|^n \leq |P(z)|$.

10 X-ENS : Topologie des classes de similitudes On appelle classe de similitude d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices semblables à A .

- On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
 - Montrer que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à A si, et seulement si,

$$\chi_A = \chi_B \quad \text{et} \quad \pi_A(B) = 0_n$$
 - En déduire que la classe de similitude d'une matrice diagonalisable est une partie fermée.
- Inversement, on suppose que la classe de similitude d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une partie fermée.
 - Montrer que cette classe de similitude contient au moins une matrice triangulaire supérieure T .
 - Pour $k \in \mathbb{N}^*$. On introduit la matrice diagonale $D_k = \text{diag}(k, k^2, \dots, k^n)$. Calculer $D_k T D_k^{-1}$.
 - Établir que A est diagonalisable.
- Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la classe de similitude est fermée ?