1 Remplacement de l'inégalité triangulaire

Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leqslant 1$ est un convexe de E).

Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y.

Solution de 1 : Remplacement de l'inégalité triangulaire

Le sens direct, c'est du cours.

Réciproquement, si $N : E \to \mathbb{R}$ est défini-positive, homogène et que sa boule unité fermée est convexe, soit $x, y \in E$.

Si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$, l'inégalité triangulaire est immédiate.

Sinon, on s'intéresse à $(1-t)\dfrac{x}{N(x)} + t\dfrac{y}{N(y)} \in B'(0_E, 1)$ pour $t = \dfrac{N(y)}{N(x)+N(y)}$ et on obtient $\dfrac{N(x+y)}{N(x)+N(y)} \leqslant 1$ (sans oublier que l'on ne sait pas encore que N est une norme mais le fait qu'elle soit défini-positive et homogène permet de justifier les calculs.)

2 Caractérisation des normes euclidiennes

Montrer qu'une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

Solution de 2 : Caractérisation des normes euclidiennes

L'identité du parallélogramme, c'est

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Le sens direct, c'est du cours.

Réciproquement, si $\|\cdot\|$ est une norme vérifiant l'identité du parallélogramme.

On pose

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

On a alors facilement une forme symétrique définie-positive.

Seule la bilinéarité demande un peu de travail.

On commence par montrer que $(x+x'|y) = (x|y) + (x'|y)$. Or

$$(x+x'|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'-y\|^2\right)$$

et, par l'identité du parallélogramme,

$$(x|y)+(x'|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x+y\|^2 - \|x'+y\|^2\right) = \frac{1}{8}\left(\|x+x'+2y\|^2 - \|x+x'-2y\|^2\right)$$

Reste à utiliser encore l'identité du parallélogramme :

$$\|x+x'+2y\|^2 = \|(x+x'+y)+y\|^2 = 2\left(\|x+x'+y\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x+x'\|^2$$

et

$$\|x+x'-2y\|^2 = \|(x+x'-y)-y\|^2 = 2\left(\|x+x'-y\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x+x'\|^2$$

ce qui permet bien de conclure $(x+x'|y) = (x|y) + (x'|y)$.

Pour $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$, ce n'est pas très simple non plus : comme dans l'exercice classique qui demande de trouver les morphismes additifs continus de $\mathbb{R}$, on le vérifie par récurrence pour $\lambda \in \mathbb{N}$, puis, le morphisme de groupe additif $x \mapsto (x|y)$ étant impair, c'est vrai pour $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Pour $\lambda = \dfrac{p}{q}$ avec p, q entiers, on a $q(\lambda x|y) = (q\lambda x|y) = (px|y) = p(x|y)$ ce qui permet de conclure.

Enfin, la continuité de la norme (elle est 1-lipschitzienne) permet de passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ par densité, et de conclure.

3 X

Existe-t-il des normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariantes par similitude ?

Solution de 3 : X

Non : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables mais ne peuvent avoir même norme.

4 Dans $E=\mathbb{R}[X]$, on considère les normes $N_1(P)=\sup\limits_{t\in[0;1]}|P(t)|$ et $N_2(P)=\sup\limits_{t\in[1;2]}|P(t)|$.

L'ensemble $\Omega=\{P\in E \mid P(0)\neq 0\}$ est-il ouvert pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

On pourra penser au théorème de Weierstraß.

Solution de 4 :

Posons $\varphi : E\to\mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(P)=P(0)$.

Le cas de N_1 se traite facilement avec les résultats sur les fonctions continues : l'application φ est linéaire et puisque $|\varphi(P)|\leqslant N_1(P)$, cette application est continue. On en déduit que $\Omega=\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert relatif à E c'est-à-dire un ouvert de E pour la norme N_1.

Mais nous n'avons pas encore vu ces résultats. On peut montrer directement que Ω est ouvert pour N_1 directement : si $P\in\Omega$, on vérifie que $B_{N_1}(P,|P(0)|)\subset\Omega$ car si Q appartient à cette boule, $|P(0)-Q(0)|<|P(0)|$ donc $|Q(0)|>0$.

Ou alors on montre que $\Omega^c=\{P\in E,\ P(0)=0\}$ est fermé car si $(P_n)_n$ est une suite d'éléments de E convergeant vers Q au sens de N_1 (donc uniformément sur $[0,1]$), pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_n(0)=0$ donc $Q(0)=0$ (la convergence uniforme implique la convergence simple) soit $Q\in\Omega^c$.

Pour la norme N_2, montrons que la partie Ω n'est pas ouverte en observant qu'elle n'est pas voisinage de son point $P=1$. Pour cela considérons la fonction continue $f:[0;2]\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x$ si $x\in[0,1]$ et 1 sinon.

Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant

$$\sup_{t\in[0;2]}\left|P_n(t)-f(t)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et en particulier

$$P_n(0)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad N_2(P_n-P)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Considérons alors la suite de polynômes (Q_n) avec

$$Q_n=P_n-P_n(0).$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}, Q_n(0)=0$ donc $Q_n\notin\Omega$ et

$$N_2(Q_n)\leqslant N_2(P_n-P)+|P_n(0)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$Q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_2} P.$$

Puisque la partie Ω n'est pas voisinage de chacun de ses points, elle n'est pas ouverte pour la norme N_2.

5 **Centrale-Mines** On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A=\{$suites croissantes$\}$
$B=\{$suites convergeant vers 0$\}$
$C=\{$suites convergentes$\}$
$D=\{$suites admettant 0 pour valeur d'adhérence$\}$
$E=\{$suites périodiques$\}$
$F=\{$suites terme général d'une série absolument convergente$\}$.

Solution de 5 : Centrale-Mines

A est fermé car si $u^p=\left(u_n^p\right)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u=(u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $p\in\mathbb{N}$, $u_n^p\leqslant u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n\leqslant u_{n+1}$ et donc $u\in A$.

B est fermé car si $u^p=\left(u_n^p\right)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u=(u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\|u-u^p\|_\infty\leqslant\varepsilon/2$ et puisque $u_n^p\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant N, \left|u_n^p\right|\leqslant\varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n|\leqslant\left|u_n-u_n^p\right|+\left|u_n^p\right|\leqslant\varepsilon$$

Ainsi $u\to 0$ et donc $u\in B$.

C est fermé. En effet, si $u^p = \left(u_n^p\right)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leqslant \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p \cdot v^p \in B$ et $v^p \to u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.

D est fermé car si $u^p = \left(u_n^p\right)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $\left|u_n^p\right| \leqslant \varepsilon/2$ et donc tels que

$$|u_n| \leqslant \left|u_n - u_n^p\right| + \left|u_n^p\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.

E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore. Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \delta^k$$

qui est élément de E. La suite u^p converge car

$$\left\|u^{p+q} - u^p\right\|_\infty \leqslant \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^p} \to 0$$

et la limite u de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} = 1$$

et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}.$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de F et une étude en norme $\|\cdot\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \to u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de F, la partie F n'est pas fermée.

6 **X** Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F + G$ est fermé.

Solution de 6 : X

Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F + \mathrm{Vect}(u)$ fermé pour tout $u \notin F$. Soit $(\ x_n\ )$ une suite convergente d'éléments de $F + \mathrm{Vect}(u)$ de limite x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$. Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée. Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n| \to +\infty$. Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n + u$. Puisque $\|x_n\| \to \|x\|$ et $|\lambda_n| \to +\infty$, on a $\|z_n\| \to 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n} y_n \to -u$. Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n} y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F, donc $-u \in F$ ce qui exclu. Ainsi, la suite (λ_n) est bornée et l'on peut en extraire une suite convergente $\left(\lambda_{\varphi(n)}\right)$ de limite $\lambda \in \mathbb{K}$. Par opérations, la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ est alors convergente. En notant y sa limite, on a $y \in F$ car l'espace F est fermé. En passant la relation $x_n = y_n + \lambda_n u$ à la limite, on obtient $x = y + \lambda u \in F + \mathrm{Vect}(u)$. Ainsi, l'espace $F + \mathrm{Vect}(u)$ est fermé.

7 **Centrale** Soit $(\ u_n\ )$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$. Soit (v_p) une suite réelle telle que $v_p \to +\infty$.

1. On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n) = \left(u_{n+p} - v_q\right)$. Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que l'on ait $w_0 \leqslant a$ et $|w_{n+1} - w_n| \leqslant (b-a)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\left\{u_n - v_p,\ (n,p) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'adhérence de $\{\sin(u_n),\ n \in \mathbb{N}\}$.
4. Déterminer l'adhérence de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$.
5. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\ u_n - \lfloor u_n \rfloor\ )$?

Solution de 7 : Centrale

1. Sachant $(u_{n+1}-u_n)$ de limite nulle, pour $\varepsilon=(b-a)/2>0$, il existe un rang $p\in N$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant p \Longrightarrow |u_{n+1}-u_n|\leqslant\varepsilon$$

   et alors

$$\forall n\in N, \left|u_{n+p+1}-u_{n+p}\right|\leqslant\varepsilon$$

   Sachant (v_p) de limite $+\infty$, le terme u_p-v_q tend vers $-\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$ et il existe donc un rang q tel que $u_p-v_q\leqslant a$. Pour ces paramètres p et q, la suite de terme général $w_n=u_{n+p}-v_q$ vérifie les conditions requises.

2. Posons

$$E=\left\{u_n-v_p \mid (n,p)\in N^2\right\}$$

   La suite (u_n) étant de limite $+\infty$, la suite (w_n) l'est aussi et l'ensemble A des $n\in\mathbb{N}$ vérifiant $w_n\leqslant a$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. On peut alors introduire le plus grand entier N vérifiant $w_N\leqslant a$. On vérifie

$$w_{N+1}>a \quad \text{et} \quad w_{N+1}\leqslant w_N+\underbrace{|w_{N+1}-w_N|}_{\leqslant(b-a)/2}<b.$$

   On a ainsi établi :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, a<b\Longrightarrow \exists x\in E, x\in\left]a;b\right[$$

   La partie E est donc dense dans $\mathbb{R}$.

3. Introduisons $\left(v_p\right)=(2p\pi)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et limage de celle-ci par la fonction sinus est $S=\{\sin(u_n)\mid n\in\mathbb{N}\}$. Cette partie est incluse dans le fermé $[-1;1]$ et donc $\overline{S}$ aussi. Inversement, tout élément de $[-1;1]$ est le sinus d'un angle θ et il existe une suite d'éléments de E de limite θ. Par continuité de la fonction sinus, il existe une suite d'éléments de S de limite $\sin(\theta)$. Au final,

$$\overline{S}=[-1;1]$$

4. Introduisons $\left(v_p\right)=(p)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction $f: x\mapsto x-\lfloor x\rfloor$ est $F=\{u_n-\lfloor u_n\rfloor \mid n\in\mathbb{N}\}$. Cette partie est incluse dans le fermé $[0;1]$ et donc $\overline{F}$ aussi. Inversement, tout élément de $]0;1[$ est limite d'une suite d'éléments de E. Les termes de cette suite appartiennent à $]0;1[$ à partir d'un certain rang et sont donc invariants par f : ils appartiennent à F. Ainsi,

$$]0;1[\subset\overline{F}$$

   Enfin, $\overline{F}$ étant une partie fermée, on a aussi

$$[0;1]\subset\overline{F}$$

   puis l'égalité.

5. L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)=(u_n-\lfloor u_n\rfloor)$ est

$$\mathrm{Adh}(x)=\bigcap_{N\in N}\overline{\{x_n,\ n\geqslant N\}}.$$

   En effet, ℓ est une valeur d'adhérence de x si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $n\geqslant N$ tel que $\|x_n-\ell\|\leqslant\varepsilon$.
   Par l'étude qui précède

$$\overline{\{x_n,\ n\geqslant N\}}=[0;1]$$

   et l'ensemble des valeurs d'adhérence de x est exactement $[0;1]$.

8 Navale

Soit $E=\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose

$$N_1(f)=\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

1. Montrer que N_1 définit une norme sur E.

On dit qu'une suite $(f_p)_{p\geqslant 0}$ d'éléments de E est de Cauchy pour N_1 lorsque

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Longrightarrow N_1\left(f_{n+p}-f_n\right)\leqslant\varepsilon$$

2. Montrer que si $(f_p)_{p\geqslant 0}$ est convergente pour la norme N_1 alors c'est une suite de Cauchy pour la norme N_1.
3. On pose
$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\qquad \text{pour } x\in[0;1] \text{ et } n\in\mathbb{N}^*$$
Montrer que la suite $(f_p)_{p\geqslant 1}$ est de Cauchy pour la norme N_1. Est-elle convergente pour cette même norme ?
4. Montrer en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstraß que dans $\mathbb{R}$, les suites de Cauchy sont exactement les suites convergentes.

Solution de 8 : Navale

1. L'application N_1 est correctement définie de E vers $\mathbb{R}_+$. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f,g\in E$. On vérifie immédiatement $N_1(\lambda f)=|\lambda|N_1(f)$ et $N_1(f+g)\leqslant N_1(f)+N_1(g)$. Si $N_1(f)=0$ alors la fonction $|f|$ est positive continue et d'intégrale nulle sur $[0;1]$, c'est donc la fonction identiquement nulle et la fonction f aussi.
2. Soient $(f_p)_{p\geqslant 0}$ une suite convergente pour la norme N_1 et f sa limite. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Longrightarrow N_1\left(f-f_p\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$
Pour $n\geqslant N$ et $p\in\mathbb{N}$, on a conjointement
$$N_1\left(f-f_n\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{et}\quad N_1\left(f-f_{n+p}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$
et donc
$$N_1\left(f_{n+p}-f_n\right)\leqslant N_1\left(f_{n+p}-f\right)+N_1\left(f-f_n\right)\leqslant\varepsilon$$
La suite $(f_p)_{p\geqslant 0}$ est donc de Cauchy pour la norme N_1.
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}N_1\left(f_{n+p}-f_n\right)&=\int_0^1\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x^k}{k}\right|\mathrm{d}x=\sum_{k=n+1}^{n+p}\int_0^1\frac{x^k}{k}\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}\leqslant\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$
Pour n assez grand, cette quantité est inférieure à n'importe quel ε préalablement choisi. La suite $(f_p)_{p\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy pour N_1. Par l'absurde supposons que la suite $(f_p)_{p\geqslant 1}$ converge pour la norme N_1 et posons $f\in E$ sa limite. On a donc
$$N_1\left(f_p-f\right)=\int_0^1\left|f_p-f\right|\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$$
Parallèlement, par le théorème de convergence dominée, on montre
$$\int_0^1\left|f_p-f\right|=\int_{[0;1]}\left|f_p(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x\xrightarrow[p\to+\infty]{}\int_{[0;1]}|f(x)+\ln(1-x)|\mathrm{d}x$$
En effet, par les séries entières de référence,
$$\forall x\in[0;1[,\ \left|f_p(x)-f(x)\right|\xrightarrow[p\to+\infty]{}|-\ln(1-x)-f(x)|$$
et
$$\forall x\in\left[0;1\right[,\ \left|f_p(x)-f(x)\right|\leqslant\left|f_p(x)\right|+|f(x)|=-\ln(1-x)+|f(x)|=\varphi(x)$$

avec $\varphi : [0;1[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur $[0;1[$. Par unicité de la limite,

$$\int_{[0;1[} |f(x)+\ln(1-x)|\mathrm{d}x = 0$$

Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on obtient

$$\forall x \in [0;1[, f(x)+\ln(1-x) = 0$$

Or f est continue en 1 tandis que $\ln(1-x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 1^-. C'est absurde. La suite $\left(f_p\right)_{p\geqslant 1}$ ne converge pas pour la norme N_1.

4. On montre qu'une suite de Cauchy est bornée : en effet, avec $\varepsilon = 1$, on a un rang N à partir duquel $\forall p \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+p} - u_n\right| \leqslant 1$.
En particulier, pour $n = N$, $\forall\, p \in \mathbb{N},\ \ \left|u_{p+N} - u_N\right| \leqslant 1$ donc $\forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n| \leqslant 1 + |u_N|$.
Par théorème de Bolzano-Weierstraß, on en extrait une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ convergente vers ℓ.
Mais
$$|u_n - \ell| \leqslant \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right|.$$
Soit $\varepsilon > 0$. On a un rang N_1 tel que
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \Longrightarrow \left|u_{n+p} - u_n\right| \leqslant \varepsilon$$
et un rang N_2 à partir duquel $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
Alors, pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N_1$ et $|u_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui conclut la convergence de u vers ℓ.