TD ∗ Espaces vectoriels normés

1 Remplacement de l'inégalité triangulaire

Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leqslant 1$ est un convexe de E).

Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y.

2 Caractérisation des normes euclidiennes

Montrer qu'une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

3

X Existe-t-il des normes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ invariantes par similitude ?

4

Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les normes $N_1(P) = \sup\limits_{t\in[0;1]} |P(t)|$ et $N_2(P) = \sup\limits_{t\in[1;2]} |P(t)|$.

L'ensemble $\Omega = \{P \in E \mid P(0) \neq 0\}$ est-il ouvert pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

On pourra penser au théorème de Weierstraß.

5 Centrale-Mines

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

$A =$ {suites croissantes}
$B =$ {suites convergeant vers 0}
$C =$ {suites convergentes}
$D =$ {suites admettant 0 pour valeur d'adhérence}
$E =$ {suites périodiques}
$F =$ {suites terme général d'une série absolument convergente}.

6

X Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F + G$ est fermé.

7 Centrale

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$. Soit (v_p) une suite réelle telle que $v_p \to +\infty$.

1. On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$. Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que l'on ait $w_0 \leqslant a$ et $|w_{n+1} - w_n| \leqslant (b-a)/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\{u_n - v_p,\ (n,p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'adhérence de $\{\sin(u_n),\ n \in \mathbb{N}\}$.
4. Déterminer l'adhérence de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$.
5. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)$?

8 Navale

Soit $E = \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

1. Montrer que N_1 définit une norme sur E.

On dit qu'une suite $(f_p)_{p\geqslant 0}$ d'éléments de E est de Cauchy pour N_1 lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow N_1(f_{n+p} - f_n) \leqslant \varepsilon$$

2. Montrer que si $(f_p)_{p\geqslant 0}$ est convergente pour la norme N_1 alors c'est une suite de Cauchy pour la norme N_1.
3. On pose
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \quad \text{pour } x \in [0;1] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$
Montrer que la suite $(f_p)_{p\geqslant 1}$ est de Cauchy pour la norme N_1. Est-elle convergente pour cette même norme ?
4. Montrer en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstraß que dans $\mathbb{R}$, les suites de Cauchy sont exactement les suites convergentes.