1 X-ENS : exemple de tribus

Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$. On note $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'entiers naturels indexées par I. Pour X partie de $\mathbb{N}^{(I)}$, on note

$$A_I(X) = \left\{a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})},\ \exists x \in X,\ \forall i \in I,\ a_i = x_i\right\}$$

et $\mathscr{A}_I = \left\{A_I(X),\ X \in \mathscr{P}\left(\mathbb{N}^{(I)}\right)\right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{A}_I$ est une tribu sur $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$.
2. Étant donné deux parties I et J de $\mathbb{N}$, montrer que $\mathscr{A}_{I\cap J} = \mathscr{A}_I \cap \mathscr{A}_J$,
3. Étant donné deux parties I et J de $\mathbb{N}$, montrer que $\mathscr{A}_{I\cup J}$ est la tribu engendrée par $\mathscr{A}_I \cup \mathscr{A}_J$.

Solution de 1 : X-ENS : exemple de tribus

1. On remarque que $A_I(X)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ dont la restriction à I appartient à X.
   On a donc $A_I\left(\mathbb{N}^{(I)}\right) = \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} \in \mathscr{A}_I$. Si $X \subset \mathbb{N}^{(I)}$, alors, pour toute suite $a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, $a|_I \in X$ ou bien $a|_I \in \overline{X}$ (complémentaire de X dans $\mathbb{N}^{(I)}$). Donc $a \in A_I(X)$ ou bien $a \in A_I\left(\overline{X}\right)$: $\mathbb{N}^{(N)}$ est donc réunion disjointe de $A_I(X)$ et $A_I\left(\overline{X}\right)$. Le complémentaire de $A_I(X)$ est donc $A_I(\bar{X}) \in \mathscr{A}_I$. Soit enfin $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{N}^{(I)}$. On a alors

   $$A_I\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_I(X_n),$$

   ce qui permet de dire que $\mathscr{A}_I$ est une tribu de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$.
2.
   - Si $A \in \mathscr{A}_I \cap \mathscr{A}_J$, alors A s'écrit $A = A_I(X) = A_J(Y)$ avec $X \subset \mathbb{N}^{(I)}$ et $Y \subset \mathbb{N}^{(J)}$. Notons X' l'ensemble des restrictions des suites de X à $I \cap J$. Si $a \in A$, alors $a|_{I\cap J} \in X'$ et $a \in A_{I\cap J}(X')$. Réciproquement, si $a \in A_{I\cap J}(X')$, il existe $x \in X$ tel que $x|_{I\cap J} = a|_{I\cap J}$. Toute suite presque nulle prolongeant x à $\mathbb{N}$ est dans $A_I(X) = A_J(Y)$. On peut choisir une telle suite coïncidant avec a sur J. Il y a donc une suite y de Y telle que $y = a|_J$. Ainsi $a \in A_J(Y) = A$. On a donc $A = A_{I\cap J}(X')$, ce qui montre que $\mathscr{A}_I \cap \mathscr{A}_J \subset \mathscr{A}_{I\cap J}$.
   - Réciproquement, si $A \in \mathscr{A}_{I\cap J}$, il existe $X \subset \mathbb{N}^{(I\cap J)}$ tel que $A = A_{I\cap J}(X)$. Notons $\widetilde{X}$ (resp. $\widetilde{Y}$) l'ensemble des restrictions des suites de A à I (à J). Si $a \in A$, alors $a|_I \in \widetilde{X}$, donc $a \in A_I(\widetilde{X})$. Réciproquement, si $a \in A_I(\widetilde{X})$, il existe $x \in A$ tel que $a|_I = x|_I$. Alors $a|_{I\cap J} = x_{I\cap J} \in X$ donc $a \in A_{I\cap J}(X) = A$. On a donc $A = A_I(\widetilde{X})$ et $A = A_I(\widetilde{X}) = A_J(\widetilde{Y})$ par symétrie. Ainsi $A \in \mathscr{A}_I \cap \mathscr{A}_J$.
   - On conclut que $\mathscr{A}_I \cap \mathscr{A}_J = \mathscr{A}_{\text{In}}$.
3. La tribu $\mathscr{A}_{I\cup J}$ contient clairement $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_J$. Il s'agit maintenant de démontrer que si $\mathscr{T}$ est une tribu contenant $\mathscr{A}_I \cup \mathscr{A}_J$, alors elle contient aussi $\mathscr{A}_{I\cup J}$. On prend $A \in \mathscr{A}_{I\cup J}$ qui s'écrit donc $A = A_{I\cup J}(X)$ avec X une partie de $\mathbb{N}^{(I\cup J)}$. La partie X est dénombrable puisque $\mathbb{N}^{(I\cup J)}$ l'est. En effet, pour tout $I \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^{(I)}$ est la réunion dénombrable des ensembles $\mathbb{N}_n^{(I)}$ des familles $(x_i)_{i\in 1}$ telles que $x_i = 0$ si $i > n$ et chaque ensemble $\mathbb{N}_n^{(I)}$, non vide est dénombrable car il s'identifie à $\mathbb{N}^k$, où $k = |I \cap [\![0, n]\!]|$. On peut alors remarquer que

   $$A = \bigcup_{x\in X} A_{I\cup J}\left(\left\{x|_{I\cup J}\right\}\right) = \bigcup_{x\in X} A_I(\{x|_I\}) \cap A_J\left(\left\{x|_J\right\}\right) \in \mathscr{T},$$

   puisque A s'exprime comme réunion ou intersection au plus dénombrable de parties de $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_3$.

2 Non dénombrabilité de l'univers

Existe-t-il un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ dénombrable sur lequel soit définie une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre $p \in]0, 1[$?

Solution de 2 : Non dénombrabilité de l'univers

FGN 6 3.4

La réponse est non.

Sinon, considérer pour tout x, suite de 0 et de 1, $A_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (X_n = x_n) \in \mathscr{T}$.

Par continuité décroissante que $\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(A_x) = 0$ car $\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k) \leqslant \max(p, 1-p)^n$.

Comme les variables aléatoires sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a $\Omega = \bigcup_{x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}} A_x$ est négligeable, ce qui est contradictoire.

3 Écart à l'indépendance

Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

On pourra utiliser des fonctions indicatrices.

Solution de 3 : Écart à l'indépendance

FGN 6 3.7 Avec Cauchy-Schwarz,

$$(\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))^2 = \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B)^2 \leqslant \mathbb{V}(\mathbb{1}_A)\mathbb{V}(\mathbb{1}_B) = p(1-p)q(1-q)$$

où $p=\mathbb{P}(A)$ et $q=\mathbb{P}(B)$.

Reste à voir que $x\mapsto x(1-x)$ atteint un maximum $\frac{1}{4}$ en $x=\frac{1}{2}$.

4 Pile ou Face : longueur des premières séquences

On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPFPFFF\ldots \qquad\qquad FFFPFPPFPFPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.
3. Montrer que $\mathbb{E}(L_1)\geqslant\mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_1)\geqslant\mathbb{V}(L_2)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(L_1,L_2)$.
5. Calculer la limite lorsque $m\to+\infty$ de $\mathbb{P}(L_2=n \mid L_1=m)$

Solution de 4 : Pile ou Face : longueur des premières séquences

1. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le i^{e} lancer donne Pile, égale à 0 sinon. Comme d'habitude, la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
   La variable aléatoire L_1 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Par probabilités totales, pour tout $n\geqslant 1$,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1=n) &= \mathbb{P}(L_1=n,X_1=0)+\mathbb{P}(L_1=n,X_1=1)\\ &= \mathbb{P}(X_1=0,\ldots,X_n=0,X_{n+1}=1)+\mathbb{P}(X_1=1,\ldots,X_n=1,X_{n+1}=0)\\ &= (1-p)^n p + p^n(1-p)\end{aligned}$$

   Ce qui donne, l'espérance étant manifestement finie,

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1) &= p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \;+\; p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1}\\ &= p(1-p)\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(1-p)^2}\right)\\ &= \frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}\end{aligned}$$

   On est rassuré de voir que cette espérance est symétrique en p et $1-p$, qu'elle est minimale quand $p=1/2$ (étudier les variations de $x+1/x$ quand $x>0$), qu'elle tend vers l'infini quand p tend vers 0 ou 1...
   Maintenant,

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1(L_1-1)) &= p(1-p)^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} \;+\; p^2(1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p^{n-2}\\ &= p(1-p)\left((1-p)\frac{2}{p^3}+p\frac{2}{(1-p)^3}\right)\\ &= 2\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right)\end{aligned}$$

et donc, $\mathbb{V}(L_1)=2\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right)+\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}-\left(\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}\right)^2$ ou, en simplifiant un peu,

$$\mathbb{V}(L_1)=\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2+\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}-2$$

2. Le plus simple est de calculer la loi conjointe de (L_1,L_2), i.e. de calculer

$$\mathbb{P}(L_1=n,L_2=m)$$

pour tout couple $(n,m)\in\mathbb{N}_*^2$, puis d'utiliser les probabilités totales. On peut aussi utiliser le caractère sans mémoire de la loi géométrique.
Si on ne veut rien utiliser, on peut, par probabilités totales, la variable L_2 étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_2=m)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=0,L_1=n,L_2=m)+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=1,L_1=n,L_2=m)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=\ldots=X_n=0,X_{n+1}=\ldots=X_{n+m}=1,X_{n+m+1}=0)\\&\quad+\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1=1,\ldots,X_n=1,X_{n+1}=\ldots=X_{n+m}=0,X_{n+m+1}=1)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^np^m(1-p)+\sum_{n=1}^{+\infty}p^n(1-p)^mp\\&=(1-p)^2p^{m-1}+p^2(1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

Donc, facilement,

$$\mathbb{E}(L_2)=2$$

Surprenant ? nullement si $p=1/2$ (il est clair que dans ce cas les lois de L_1 et de L_2 sont les mêmes). Si p est proche de 0 ou 1 : avec une probabilité forte, la première séquence est longue, et la deuxième courte. Et avec une probabilité faible, la première séquence est courte, la deuxième longue. On peut donc accepter que cela se compense en moyenne.
De

$$\mathbb{E}(L_2(L_2-1))=p(1-p)^2\sum_{m=2}^{+\infty}m(m-1)p^{m-2}+p^2(1-p)\sum_{m=2}^{+\infty}m(m-1)(1-p)^{m-2}$$

on déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(L_2)&=p(1-p)^2\frac{2}{(1-p)^3}+p^2(1-p)\frac{2}{p^3}+2-4\\&=2\left(\frac{p}{1-p}+\frac{1-p}{p}-1\right)\end{aligned}$$

3. Montrer que $\mathbb{V}(L_1)\geqslant\mathbb{V}(L_2)$ revient alors à montrer que, si $x>0$,

$$\frac{1}{x^2}+x^2\geqslant x+\frac{1}{x}$$

ou encore, en posant $y=x+1/x$, que

$$y^2-2\geqslant y$$

si $y\geqslant 2$, ce qui est vrai.

4. Par transfert, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1L_2)&=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_*^2}mnP(L_1=n,L_2=m)\\&=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_*^2}mn\left(p^n(1-p)^mp+(1-p)^np^m(1-p)\right)\\&=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}_*^2}mn\left(p^{n+1}(1-p)^m+(1-p)^{n+1}p^m\right)\\&=(1-p)\frac{1}{p^2}p^2\frac{1}{(1-p)^2}+p\frac{1}{(1-p)^2}(1-p)^2\frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

(suites doubles produits de deux suites sommables...). Donc, après simplifications,

$$\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} - 2\left(\frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}\right)$$

que l'on arrange un peu, pour vérifier :

$$\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1-2p}{1-p} + \frac{2p-1}{p} = -\frac{(1-2p)^2}{p(1-p)}$$

la covariance est nulle si $p = 1/2$, attendu car L_1 et L_2 sont intuitivement indépendantes dans ce cas. Elle est en général négative, ce qui est aussi assez intuitif (si la première séquence est particulièrement longue, c'est en général qu'elle est obtenue avec le côté de la pièce qui a le plus de chance de se montrer, la deuxième séquence aura tendance à être courte...).

5. Calculons enfin une probabilité conditionnelle :

$$\frac{P(L_2 = n, L_1 = m)}{P(L_1 = m)} = \frac{p^{m+1}(1-p)^n + (1-p)^{m+1}p^n}{p^m(1-p) + (1-p)^m p}$$

que l'on peut légèrement simplifier, et qui tend, quand m tend vers $+\infty$, vers $p(1-p)^{n-1}$ si $p > 1/2$, vers $(1-p)p^{n-1}$ si $p < 1/2$, les deux si $p = 1/2$...de nouveau, ce n'est par complètement contre-intuitif...

---

5 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

1. Montrer que F_X est croissante et déterminer ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \xrightarrow[t \to x^+]{} \mathbb{P}(X \leqslant x)$ et $F_X(t) \xrightarrow[t \to x^-]{} \mathbb{P}(X < x)$.
   Traduction en terme de continuité ?
3. En déduire que deux variables aléatoires réelles ont même loi si et seulement si leurs fonctions de répartition sont égales.

Solution de 5 : Fonction de répartition

ddmaths 655

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leqslant y$. On a $(X \leqslant x) \subset (X \leqslant y)$ donc, par croissance des probabilités,

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathrm{P}(X \leqslant y) = F_X(y).$$

   La fonction F_X est croissante.

2. Puisqu'elle est croissante, la fonction F_X admet assurément des limites en $-\infty$ et en $+\infty$. On peut calculer celles-ci par des suites

$$F_X(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lim_{+\infty} F_X \quad \text{et} \quad F_X(-n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lim_{-\infty} F_X.$$

   Par continuité croissante,

$$F_X(n) = \mathrm{P}(X \leqslant n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \leqslant n)\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$$

   Par continuité décroissante,

$$F_X(-n) = \mathrm{P}(X \leqslant -n) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \leqslant -n)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{P}(\varnothing) = 0$$

3. Puisqu'elle est croissante, la fonction F_X admet des limites à droite et à gauche en tout $x \in \mathbb{R}$. On peut calculer celles-ci par des suites

$$F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lim_{t \to x^+} F_X(t) \quad \text{et} \quad F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lim_{t \to x^-} F_X.$$

   Par continuité décroissante,

$$F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{P}\left(X \leqslant x + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(X \leqslant x + \frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{P}(X \leqslant x)$$

   Par continuité croissante,

$$F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) = \mathrm{P}\left(X \leqslant x - \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(X \leqslant x - \frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{P}(X < x)$$

4. Par définition de la fonction de répartition, la loi de X suffit à déterminer sa fonction de répartition.
Inversement, par ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) - \mathrm{P}(X < x) = \lim_{t \to x^+} F_X(t) - \lim_{t \to x^-} F_X(t).$$

Ainsi, la fonction de répartition de X suffit à déterminer la loi de X.

---

6 **Très classique : Identité de Wald** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi et d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance finie tel que N et toutes les X_n soient indépendantes.

1. On suppose dans cette question que les X_n suivent une loi $\mathscr{B}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$ et que N suit une loi $\mathscr{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$.
Rappeler les fonctions génératrices, pour $n \in \mathbb{N}$, de X_n, $\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell$ et N puis déterminer la loi de $Y = \sum_{\ell=1}^{N} X_\ell$ (on admet qu'elle définit bien une variable aléatoire discrète.)
2. Dans cette question, on suppose que les X_n suivent une même loi quelconque, et que N suit une loi quelconque, toujours toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.
Montrer l'identité de Wald
$$\mathbb{E}\left(\sum_{\ell=1}^{N} X_\ell\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

Solution de 6 : Très classique : Identité de Wald

1. $G_{X_n}(t) = \mathbb{E}\left(t^{X_n}\right) = 1 - p + pt$, $G_{\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell}(t) = (1-p+pt)^n$ et $G_N(t) = \mathbb{E}\left(t^N\right) = \mathrm{e}^{\theta(t-1)}$. Nous savons bien sûr que $\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell$ suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.
Pour calculer la loi de Y, la subtilité est que N est une variable aléatoire, ici : $Y(\omega) = \sum_{\ell=1}^{N(\omega)} X_\ell$.
On peut calculer la loi directement avec la formule des probabilités totales et le sce $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ mais le début de la question semble nous aiguiller vers les fonctions génératrices.
Essayons : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, N = n) && \text{probabilités totales}\\
&= \mathrm{e}^{-\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell = k, N = n\right) = \mathrm{e}^{-\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell = k\right) \mathbb{P}(N = n) && \text{indépendance}\\
&= \mathrm{e}^{-\theta} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\theta^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\theta} (p\theta)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\big(\theta(1-p)\big)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}(p\theta)^k}{k!} \mathrm{e}^{\theta(1-p)} = \mathrm{e}^{-\theta p} \frac{(p\theta)^k}{k!}
\end{aligned}$$
Donc Y suit une loi $\mathscr{P}(p\theta)$.
Avec les fonctions génératrices, on calcule, toujours avec la formule des probabilités totales et le sce $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$, tout étant sommable pour $|t| < 1$,
$$\begin{aligned}
G_Y(t) = \mathbb{E}\left(t^Y\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, N = n)\right) t^k\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \times \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{p=1}^{n} X_p = k\right) t^k\right)}_{\text{fonction génératrice de } \sum_{p=1}^{n} X_p} = \mathrm{e}^{-\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\theta^n}{n!} (1-p+pt)^n\\
&= \mathrm{e}^{p\theta(t-1)}
\end{aligned}$$
Donc Y suit une loi $\mathscr{P}(p\theta)$.

2. Pour un calcul direct, on peut travailler directement dans $[0,+\infty]$ et utiliser Fubini (mais en fait tout est fini, ici)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k, N=n)\right) k && \text{formule des probabilités totales} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell = k, N=n\right) k\right) && \text{Fubini positif} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell = k\right) k\right) && N \text{ indépendant des } X_\ell \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left(\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) n \mathbb{E}(X_1) && \text{par linéarité et les } X_\ell \text{ de même loi} \\
&= \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).
\end{aligned}$$

(On redécouvre à chaque fois une formule classique appelée formule de l'espérance totale, mais malheureusement hors-programme.)

Avec les fonctions génératrices, si $|t|<1$,

$$\begin{aligned}
G_Y(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k, N=n)\right) t^k && \text{formule des probabilités totales} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell = k\right) t^k\right) && \text{Fubini avec sommabilité à justifier} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) G_{\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\big(G_{X_1}(t)\big)^n && \text{par indépendance} \\
&= G_N \circ G_{X_1}(t),
\end{aligned}$$

La sommabilité se justifiant par le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k, N=n)|t|^k = G_Y(|t|) < +\infty$.

Il reste à dériver et évaluer en 1 : $\mathbb{E}(Y) = G_Y'(1) = G_{X_1}'(1) G_N'(G_{X_1}(1)) = \mathbb{E}(X_1) G_N'(1) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

7 Très classique : inégalité de Chernoff

Soit X une variable aléatoire discrète réelle centrée et vérifiant $|X| \leqslant 1$.
On se donne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de vaiid de même loi que X et on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout n.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leqslant \operatorname{ch}\lambda \leqslant \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(-\dfrac{a^2}{2n}\right)$.

Solution de 7 : Très classique : inégalité de Chernoff

FGN 6 4.2

1. Convexité de $\exp$: comme $\lambda X \in [-\lambda, \lambda]$ il s'écrit comme barycentre à cœ]fficients positifs
$$\lambda X = \underbrace{\frac{1-X}{2}}_{\geqslant 0}(-\lambda) + \underbrace{\frac{1+X}{2}}_{\geqslant 0}\lambda$$
La croissance de l'espérance conclut.
puis utilisation du DSE de ch en remarquant que pour tout n, $(2n)! \geqslant 2^n n!$, ou étude de fonction pour montrer que $\operatorname{ch}\lambda \leqslant \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)$.
2. Inégalité de Markov en remarquant que $(S_n \geqslant a) = \left(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda a}\right)$.
L'indépendance des X_i conduit à $\mathbb{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \dfrac{\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right)\right)^n}{e^{\lambda a}} \leqslant e^{n\frac{\lambda^2}{2} - \lambda a}$.
On conclut en minimisant $\lambda \mapsto n\dfrac{\lambda^2}{2} - \lambda a$.
Puis on applique le résultats aux $-X_n$ pour avoir la majoration de $\mathbb{P}(S_n \leqslant -a)$, puis enfin celle de
$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) = \mathbb{P}(S_n \geqslant a) + \mathbb{P}(S_n \leqslant -a).$$

---

8 X : inégalité de Tchebychev - Cantelli

1. Soit X une variable aléatoire discrète réelle qui admet un moment d'ordre 2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,
$$\mathbb{P}(X \geqslant \mathbb{E}(X) + \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \lambda^2}.$$
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées ayant toutes un moment d'ordre 2.
On suppose que pour tout n, $\mathbb{V}(X_n) \leqslant 1$, et on pose $N = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \leqslant 1\}$.
Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in [0, \ln 2[$.

Solution de 8 : X : inégalité de Tchebychev - Cantelli

FGN 6 4.5

1. Posons $Y = X - \mathbb{E}(X) - \lambda$. On cherche à majorer $\mathbb{P}(Y \geqslant 0)$ sachant que $\mathbb{E}(Y) = -\lambda < 0$.
On a $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \lambda^2$ si bien que l'inégalité à démontrer s'écrit
$$\mathbb{P}(Y \geqslant 0) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y)}{\mathbb{E}(Y^2)} = \frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)} = 1 - \frac{\mathbb{E}(Y)^2}{\mathbb{E}(Y^2)}$$
ce qui équivaut à $\mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(Y^2\right)\mathbb{P}(Y < 0)$.
On pense donc naturellement à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui donne
$$\mathbb{E}\left(Y^2\right)\mathbb{P}(Y < 0) = \mathbb{E}(Y)^2\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(Y<0)}^2\right) \geqslant \mathbb{E}\left(Y\mathbb{1}_{(Y<0)}\right)^2$$
On a $Y\mathbb{1}_{(Y<0)} \leqslant Y$ car, si Y est positive, le premier membre est nul, tandis que le second est positif.
Par croissance de l'espérance on a $\mathbb{E}\left(Y\mathbb{1}_{(Y<0)}\right) \leqslant \mathbb{E}(Y) \leqslant 0$ et, en élevant au carré,
$$\mathbb{E}(Y)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(Y\mathbb{1}_{(Y<0)}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(Y^2\right)\mathbb{P}(Y < 0)$$
ce qui est le résultat souhaité.

2. Regardons la loi de N. Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$ on a, par indépendance des X_i,

$$\mathbb{P}(N=\ell)=\mathbb{P}(X_1>1,\dots,X_{\ell-1}>1,X_\ell\leqslant 1)=\mathbb{P}(X_\ell\leqslant 1)\prod_{k=1}^{\ell-1}\mathbb{P}(X_k>1)$$

et, en utilisant la question précédente, on a donc

$$\mathbb{P}(N=\ell)\leqslant\prod_{k=1}^{\ell-1}\frac{\mathbb{V}(X_k)}{\mathbb{V}(X_k)+1}\leqslant\frac{1}{2^{\ell-1}}$$

Soit $a\in[0,\ln 2[$. Par le théorème de transfert on a

$$\mathbb{E}\left(e^{aN}\right)=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=\ell)e^{\ell a}\leqslant\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{e^{\ell a}}{2^{\ell-1}}=2\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\frac{e^a}{2}\right)^\ell<+\infty,$$

car la série géométrique est convergente puisque $e^a<2$. Ainsi e^{aN} est d'espérance finie.

9 Entropie d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathscr{X}$.
Pour chaque $x\in\mathscr{X}$, on pose $p(x)=\mathbb{P}(X=x)$.
On appelle **entropie** de X le réel $H(X)=-\sum_{x\in\mathscr{X}}p(x)\log(p(x))$ où l'on convient que $0\log 0=0$.

1. Vérifier que $H(X)$ est un réel positif. À quelle condition celui-ci est-il nul ?

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$.
On appelle entropie conjointe de X et Y l'entropie de la variable aléatoire $Z=(X,Y)$, notée $H(X,Y)$.

2. On suppose $X\perp Y$. Montrer que $H(X,Y)=H(X)+H(Y)$.
3. On appelle entropie de X sachant Y la quantité $H(X\mid Y)=H(X,Y)-H(Y)$.
   Vérifier que
   $$H(X\mid Y)=\sum_{y\in\mathscr{Y}}\mathbb{P}(Y=y)H(X\mid Y=y)$$
   avec
   $$H(X\mid Y=y)=-\sum_{x\in\mathscr{X}}\mathbb{P}(X=x\mid Y=y)\log(P(X=x\mid Y=y)).$$

Solution de 9 : Entropie d'une variable aléatoire

ddmaths 655

1. Pour tout $x\in\mathscr{X}$, on a $-p(x)\log(p(x))\geqslant 0$ car $p(x)\leqslant 1$. On en déduit $H(X)\in\mathbb{R}_+$.
   Si $H(X)=0$ alors, par somme nulle de positifs, on a
   $$\forall x\in X, p(x)\log(p(x))=0$$
   et donc
   $$\forall x\in\mathscr{X}, p(x)=0 \text{ ou } p(x)=1$$
   Sachant que
   $$\sum_{x\in\mathscr{X}}p(x)=\mathrm{P}(X\in\mathscr{X})=1$$
   on peut affirmer qu'il existe $x\in\mathscr{X}$ tel que $p(x)=\mathrm{P}(X=x)=1$. La variable X est alors presque sûrement constante.
2. Par définition
   $$H(X,Y)=-\sum_{(x,y)\in\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}\mathrm{P}(X=x,Y=y)\log(\mathrm{P}(X=x,Y=y)).$$
   Or les variables X et Y étant indépendantes
   $$\mathrm{P}(X=x,Y=y)=\mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$$
   puis
   $$H(X,Y)=-\sum_{(x,y)\in\mathscr{X}\times\mathscr{Y}}\mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)(\log(\mathrm{P}(X=x))+\log(\mathrm{P}(Y=y))).$$
   On sépare la somme en deux et l'on somme tantôt d'abord en x, tantôt d'abord en y et l'on obtient
   $$H(X,Y)=H(X)+H(Y)$$
   car
   $$\sum_{x\in\mathscr{X}}\mathrm{P}(X=x)=\sum_{y\in\mathscr{Y}}\mathrm{P}(Y=y)=1.$$

3. On sait
$$\mathrm{P}(X=x \mid Y=y)=\mathrm{P}(X=x, Y=y)\mathrm{P}(Y=y)$$
donc
$$\mathrm{P}(Y=y)H(X \mid Y=y)=-\sum_{x\in\mathscr{X}}\mathrm{P}(X=x, Y=y)\times$$
$$(\log(\mathrm{P}(X=x, Y=y))-\log(\mathrm{P}(Y=y))).$$
On sépare la somme en deux et l'on somme le résultat sur $y\in\mathscr{Y}$ pour obtenir
$$\sum_{y\in\dagger}\mathrm{P}(Y=y)H(X \mid Y=y)=H(X,Y)+\sum_{(x,y)\in\mathscr{X}\times Y}\mathrm{P}(X=x, Y=y)\log(\mathrm{P}(Y=y))$$
Or
$$\sum_{(x,y)\in\mathscr{X}\times Y}\mathrm{P}(X=x, Y=y)\log(\mathrm{P}(Y=y))$$
$$\sum_{y\in\dagger}\sum_{x\in\mathscr{X}}\mathrm{P}(X=x, Y=y)\log(\mathrm{P}(Y=y))$$
avec
$$\sum_{x\in\mathscr{X}}\mathrm{P}(X=x, Y=y)=\mathrm{P}(Y=y)$$
donc
$$\sum_{y\in\mathscr{Y}}\mathrm{P}(Y=y)H(X \mid Y=y)=H(X,Y)-H(Y)$$

10 **Très classique : lemme de Borel-Cantelli** Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements (d'éléments de $\mathscr{A}$, donc).

1. Déterminer, en utilisant des $\cap$, des $\cup$ et éventuellement des complémentaires, un évènement B...
   (a) ...tel que $\omega\in\Omega$ appartienne à B si et seulement si ω appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang.
   (b) ...tel que $\omega\in\Omega$ appartienne à B si et seulement si ω appartient à une infinité de A_n.
   (c) ...tel que $\omega\in\Omega$ appartienne à B si et seulement si ω appartient à au plus un nombre fini de A_n.
   (d) ...tel que $\omega\in\Omega$ appartienne à B si et seulement si ω n'appartienne à aucun A_n à partir d'un certain rang.

On note
$$\limsup_{n\to+\infty} A_n=\bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty}A_n\right).$$

2. Montrer que $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est un événement.
3. Que signifie $\omega\in\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$?
4. L'intersection qui sert à définir $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est-elle décroissante ? croissante ? Ni l'un ni l'autre ?
5. **Lemme de Borel-Cantelli, version « facile »** : On suppose que $\sum\mathbb{P}(A_n)<+\infty$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)=0.$$
6. Que signifie le résultat précédent ?
   (a) Presque sûrement, à partir d'un certain rang, aucun événement A_n ne se produit.
   (b) Presque sûrement, une infinité d'événements A_n se produisent.
   (c) Presque sûrement, à partir d'un certain rang, tous les événements A_n se produisent.
   (d) Presque sûrement, une infinité d'événements A_n ne se produisent pas.
7. **Borel-Cantelli « difficile »** : On reprend les notations de Borel-Cantelli « facile », mais on change les hypothèses : on suppose $\sum\mathbb{P}(A_n)=+\infty$ et les A_n indépendants. On veut montrer que
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)=1.$$
L'évènement $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est un évènement « asymptotique », lorsque les A_n sont indépendants il est de probabilité 0 ou 1. C'est un exemple de vérification d'un résultat appelé la loi du $0-1$ de Kolmogorov.
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)\leqslant \mathrm{e}^{-\mathbb{P}(A_n)}$.

(b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 0$.

(c) Conclure.

8. Un « singe dactylographe » tape sur une machine à écrire : à chaque frappe, il tape aléatoirement, avec même probabilité, une des 26 lettres de l'alphabet. Il ne s'arrête jamais. Montrer qu'il tapera presque sûrement une infinité de fois le mot JTKU, les Mémoires du Duc de Saint Simon, le poème « Demain, dès l'aube... », etc...(pour ces deux derniers exemples, on néglige ponctuation, espaces, accents...).

9. (a) Donner la probabilité, lorsqu'on lance $2n$ fois une pièce équilibrée ($n \geqslant 1$), d'obtenir exactement n fois Pile et n fois Face. Calculer un équivalent de cette probabilité, en utilisant par exemple la formule de Stirling.

   (b) Trois parties équitables de Pile ou Face, indépendantes, se déroulent simultanément sur trois tables. Montrer que, presque sûrement, il y a au plus un nombre fini d'instants auxquels on a égalité simultanément sur les trois tables de jeux (ie un nombre fini de n tels qu'après $2n$ lancers, on ait à chaque table obtenu exactement n fois Pile et n fois Face).

Solution de 10 : Très classique : lemme de Borel-Cantelli

1. Respectivement, on prendra $B = \bigcup_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$, $B = \bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$, $B = \bigcup_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$, encore le même pour finir ! Les réunions sont croissantes, les intersections sont décroissantes, ce qui permet d'indexer à partir de 1, 2 ou plus au lieu de 0.

2. $\mathscr{A}$ est stable par réunion dénombrable et par intersection dénombrable.

3. ω appartient à une infinité d'événements A_n.

4. Elle est décroissante.

5. Par continuité décroissante,ontrer que $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

   Mais

$$P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n)$$

   Et la suite des restes d'une série convergente converge vers 0, ce qui permet de conclure.

6. (a) (et ça implique (d)).

7. (a) Il suffit de noter que, par convexité, $1 - x \leqslant e^x$ non seulement pour tout $x \in [0,1]$, mais aussi pour tout réel x.

   (b) Déjà, par continuité décroissante, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^{q} \overline{A_n}\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.

   Or, par indépendance et la question précédente, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^{q} \overline{A_n}\right) = \prod_{n=p}^{q} \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{n=p}^{q} \mathbb{P}(A_n)\right)$, d'où le résultat en faisant $q \to +\infty$ et en utilisant la divergence de la série à termes positifs.

   (c) Donc $\bigcup_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$ est négligeable lui aussi en tant que réunion dénombrable d'événements négligeables, et on conclut en passant au complémentaire.

8. Soit A_n l'évènement : « le singe frappe J, T, K, U aux frappes $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, $4n+4$. Les A_n sont indépendants, et $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{26^4}$, donc $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, il suffit alors d"appliquer Borel-Cantelli « difficile » : presque sûrement, une issue appartient à une infinité de A_n. Ou encore : presque sûrement, une infinité de A_n se produisent. A fortiori, on a le résultat (mais on peut préciser ce « a fortiori » en écrivant ce qu'on veut comme réunion de 4 évènements du type A_n).
   Souvent, on « résout » le « paradoxe » (qui n'en est d'ailleurs pas vraiment un) en cherchant l'espérance du nombre de frappes pour obtenir le premier A_n : 26^4 frappes (voir espérance d'une loi géométrique), ce qui est beaucoup.
   Pour le poème « Demain dès l'aube... », c'est un peu plus long : ce texte comporte très approximativement 500 lettres. L'espérance est alors 26^{500}. Pas loin de $26^{498}/3$ pages seront utilisées (en moyenne) avant d'avoir ce poème. Ce qui ferait plus de $10^{-3} \times 26^{498}$ kg de papier. C'est beaucoup. Sans compter qu'il faudrait garder un peu de matière dans l'univers pour l'encre, la nourriture du dactylographe...

9. (a) La probabilité cherchée est $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

(b) L'égalité aux trois tables après $2n$ parties a une probabilité équivalente à $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^3 = \frac{1}{(\pi n)^{3/2}}$, qui est le terme général d'une série convergente. Il n'y a donc qu'à appliquer Borel-Cantelli « facile ».

11 Convergence en probabilité d'une suite récurrente

Soit $q \geqslant 3$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de vaiid de loi uniforme sur $\left\{\frac{k}{q},\ k \in [\![0, q-1]\!]\right\}$.

On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = T_n + \tau + \sin(2\pi(t_n - T_n))$.

1. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ pour tout n.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - \lambda\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

*On dit que la suite de variables aléatoire $\left(\frac{T_n}{n}\right)$ **converge en probabilité** vers la variable aléatoire constante λ.*

Quand elle s'applique, la loi faible des grands nombres est la méthode la plus simple pour démontrer une convergence en probabilité.

Solution de 11 : Convergence en probabilité d'une suite récurrente

FGN 6 4.43

1. On a $\mathbb{E}(T_0) = 0$ et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + \tau + \mathbb{E}(\sin(2\pi(t_n - T_n)))$$

On développe le sinus en $\sin(2\pi t_n)\cos(2\pi T_n) - \sin(2\pi T_n)\cos(2\pi t_n)$. Or T_n est une fonction de $t_0, \dots, t_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$ donc, par le lemme des coalitions, t_n et T_n sont indépendantes. Il en est de même des variables aléatoires $\sin(2\pi t_n)$ et $\cos(2\pi T_n)$ d'une part et $\sin(2\pi T_n)\cos(2\pi t_n)$ d'autre part. On a donc

$$\mathbb{E}(\sin(2\pi(t_n - T_n))) = \mathbb{E}(\sin(2\pi t_n))\mathbb{E}(\cos(2\pi T_n)) - \mathbb{E}(\sin(2\pi T_n))\mathbb{E}(\cos(2\pi t_n))$$

On calcule les espérances simultanément en utilisant l'exponentielle et la formule de transfert :

$$\mathbb{E}\left(e^{2i\pi t_n}\right) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} e^{2ik\pi/q} = \frac{1 - e^{2ip\pi}}{q(1 - e^{2ik\pi/q})} = 0$$

On a donc $\mathbb{E}(\sin(2\pi t_n)) = \mathbb{E}(\cos(2\pi t_n)) = 0$ et $\mathbb{E}(T_{n+1}) = \mathbb{E}(T_n) + \tau$. Par conséquent $\mathbb{E}(T_n) = n\tau$ pour tout n.

2. On va calculer la variance de J_n et appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour cela on commence par calculer $\mathbb{E}\left(T_n^2\right)$. Cette espérance est nulle pour $n = 0$, et en développant le carré on obtient

$$\mathbb{E}\left(T_{n+1}^2\right) = \mathbb{E}\left(T_n^2\right) + \tau^2 + \mathbb{E}\left(\sin^2(2\pi(t_n - T_n))\right) + 2\tau\mathbb{E}(T_n) + 2\mathbb{E}(T_n \sin(2\pi(t_n - T_n)))$$

En développant le sinus on voit que $\mathbb{E}(T_n \sin(2\pi(t_n - T_n))) = 0$. Il reste à calculer l'espérance du sinus au carré. Pour cela on le linéarise et

$$\mathbb{E}\left(\sin^2(2\pi(t_n - T_n))\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}(\cos(4\pi(t_n - T_n))) = \frac{1}{2}$$

car les espérances de $\cos(4\pi t_n)$ et $\sin(4\pi t_n)$ sont encore nulles. On a donc

$$\mathbb{E}\left(T_{n+1}^2\right) = \mathbb{E}\left(T_n^2\right) + \tau^2 + \frac{1}{2} + 2n\tau^2$$

En sommant cette égalité entre les rangs 0 et $n-1$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(T_n^2\right) = n\left(\tau^2 + \frac{1}{2}\right) + \tau^2 n(n-1) = \frac{n}{2} + n^2\tau^2$$

et donc $\mathbb{V}(T_n) = \frac{n}{2}$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n} - \tau\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| > \varepsilon n) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\varepsilon n)^2} = \frac{1}{2\varepsilon^2 n}$$

ce qui donne le résultat demandé avec $\lambda = \tau$.

12 Convergence en probabilité dans un jeu de pile ou face

On joue à Pile ou Face. On note e_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un nombre pair de piles dans les n premiers lancers, 0 sinon.

1. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{e_1+\cdots+e_n}{n}-\ell\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
2. Montrer qu'il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{e_1e_2+\cdots+e_ne_{n+1}}{n}-\ell'\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Solution de 12 : Convergence en probabilité dans un jeu de pile ou face

FGN 6 4.44

Nous faisons l'hypothèse (sous-entendue dans l'énoncé) que les tirages sont indépendants et que la pièce est équilibrée. On note X_n le résultat du n-ième tirage (1 pour pile, 0 pour face). Les variables aléatoires X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

1. Examinons la loi de e_n. Clairement, $\mathbb{P}(e_1=1)=\frac{1}{2}=\mathbb{P}(e_1=0)$. Supposons $n\geqslant 2$. Si on se donne $(x_1,\dots,x_{n-1})\in\{0,1\}^{n-1}$,
$$\mathbb{P}\left(e_n=1 \mid \bigcap_{k=1}^{n-1}(\mathrm{X}_k=x_k)\right)=\mathbb{P}\left(e_n=0 \mid \bigcap_{k=1}^{n-1}(\mathrm{X}_k=x_x)\right)=\frac{1}{2}$$
En effet, connaissant les résultats des $n-1$ précédents tirages, la probabilité de changer (resp. conserver) la parité du nombre de piles est $\frac{1}{2}$. On en déduit part la formule des probabilités totales que $\mathbb{P}(e_n=1)=\mathbb{P}(e_n=0)=\frac{1}{2}$ et que e_n est indépendante de $(\mathrm{X}_1,\dots \mathrm{X}_{n-1})$. Comme $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est une fonction de $(\mathrm{X}_1,\dots \mathrm{X}_{n-1})$, le lemme des coalitions assure que e_n est indépendante de $(e_1,\dots,e_{n-1})$. Il s'ensuit que $e_1,\dots,e_n$ sont indépendantes car de proche en proche,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(e_1=x_1,\dots,e_n=x_n)&=\mathbb{P}(e_1=x_1,\dots,e_{n-1}=x_{n-1})\mathbb{P}(e_n=x_n)\\ &\vdots\\ &=\mathbb{P}(e_1=x_1)\cdots\mathbb{P}(e_{n-1}=x_{n-1})\mathbb{P}(e_n=x_n)\end{aligned}$$
On conclut que $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes de même loi (loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$) à variance finie : la loi faible des grands nombres assure que la suite $\frac{e_1+\cdots+e_n}{n}$ converge en probabilité vers $\ell=\frac{1}{2}$.
2. On pose
$$T_n=\frac{e_1e_2+\cdots+e_{n-1}e_n+e_ne_{n+1}}{n}$$
La variable aléatoire T_n possède une espérance constante qui vaut $\frac{1}{4}$. En effet, regardons la loi de e_ne_{n+1} en conditionnant selon la valeur de $e_{n-1}(n\geqslant 2)$. Si $e_{n-1}=1$, pour avoir $e_ne_{n+1}=1$, il faut $\mathrm{X}_n=\mathrm{X}_{n+1}=0$:
$$\mathbb{P}(e_ne_{n+1}=1 \mid e_{n-1}=1)=\frac{1}{4}$$
Si $e_{n-1}=0$, pour avoir $e_ne_{n+1}=1$, il faut $X_n=1$ et $X_{n+1}=0$:
$$\mathbb{P}(e_ne_{n+1}=1 \mid e_{n-1}=0)=\frac{1}{4}$$
La formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(e_ne_{n+1}=1)=\frac{1}{4}$. La variable e_ne_{n+1} est donc une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$ (même pour $n=1$). La moyenne T_n a aussi une espérance égale à $\frac{1}{4}$. Comme les e_ne_{n+1} ne sont pas indépendants, on ne peut pas appliquer directement la loi faible des grands nombres. Nous allons appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff. Il nous faut donc calculer la variance de T_n. Si $Y_1,\dots,Y_n$ possèdent un moment d'ordre 2, on a
$$\mathbb{V}(\mathrm{Y}_1+\cdots+\mathrm{Y}_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(\mathrm{Y}_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_i,\mathrm{Y}_j)$$

On a $\mathbb{V}(T_n)=\dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}e_i e_{i+1}\right)$. La variable de Bernoulli $e_i e_{i+1}$ a pour variance $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$. Si $i+1<j$, $e_{i=1}e_{i+1}$ et $e_j e_{j+1}$ sont indépendantes par le lemme des coalitions et leur covariance est nulle. Il reste donc

$$\mathbb{V}(T_n)=\frac{3}{16n}+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-2}\operatorname{Cov}(e_i e_{i+1}, e_{i+1}e_{i+2})$$

or la covariance de deux variables est inférieure au produit de leur écart type qui vaut ici $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D'où la majoration $\mathbb{V}(T_n)\leqslant\frac{3}{16n}+(n-2)\frac{6}{16n^2}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. par l'inégalité de Bienaymé-Tchybecheff, on a, pour $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|T_n-\frac{1}{4}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\mathbb{V}(T_n)}{\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

On a bien le résultat recherché avec $\ell'=\frac{1}{4}$.

13 Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vaiid de Rademacher : elles prennent la valeur 1 avec probabilité $p\in]0,1[$ et -1 avec probabilité $q=1-p$.

On pose $S_0=0$ et $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

On pose $a_n=\mathbb{P}(S_n=0)$ et on note $b_n=\mathbb{P}(S_1\neq 0,\ldots,S_{n-1}\neq 0,S_n=0)$ la probabilité que le premier retour en 0 se fasse après n pas. On considère les fonctions génératrices associées $A(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n s^n$ et $B(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n s^n$.

1. Montrer que pour $s\in[0,1[$, $A(s)=1+A(s)B(s)$.
2. Que vaut a_{2n+1} pour $n\in\mathbb{N}$? Exprimer a_{2n} en fonction de p, q et n.
   En déduire que $A(s)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4pqs^2}}$, puis la valeur de $B(s)$ pour $s\in[0,1[$.
3. En déduire que la probabilité de retour à l'origine est $1-|p-q|$.
4. Montrer que si $p=\frac{1}{2}$, le temps moyen de retour à l'origine est infini.

Solution de 13 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

FGN 6 5.13

1. Comme les suites (a_n) et (b_n) sont à valeurs dans $[0,1]$, les séries entières qui définissent A et B ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Pour $n\geqslant 1$, on note $A_n=(S_n=0)$ et B_n l'événement « le premier retour à l'origine se fait à l'instant n ». Pour $1\leqslant k\leqslant n$, on a

$$\mathbb{P}(A_n\mid B_k)=\mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1}+\cdots+\mathrm{X}_n=0\mid B_k)$$

Les événements $B_k=(\mathrm{S}_1\neq 0,\cdots,\ \mathrm{S}_{k-1}\neq 0,\ \mathrm{S}_k=0)$ et $(\mathrm{X}_{k+1}+\cdots+\mathrm{X}_n=0)$ sont indépendants, par application du lemme des coalitions, car $(\mathrm{S}_1,\ldots,\ \mathrm{S}_{k-1})$ est une fonction de $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{k-1})$ et les variables X_i sont indépendantes. On en déduit que

$$\mathbb{P}(A_n\mid B_k)=\mathbb{P}(\mathrm{X}_{k+1}+\cdots+\mathrm{X}_n=0)=\mathbb{P}(\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_{n-k}=0)=\mathrm{P}(\ \mathrm{S}_{n-k}=0)$$

les dernières égalités étant justifiées par le fait que les X_i sont indépendantes de même loi, si bien que $(\mathrm{X}_{k+1},\ldots,\mathrm{X}_n)$ a la même loi que $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_{n-k})$. Comme A_n est la réunion disjointe des B_k pour $1\leqslant k\leqslant n$, on a

$$a_n=\mathbb{P}(A_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_n\cap B_k)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_n\mid B_k)\mathbb{P}(B_k)=\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}b_k$$

Si on pose $b_0=0$, on reconnaît pour $n\geqslant 1$, le coefficient du produit de Cauchy des séries entières A et B , de rayon supérieur ou égal à 1 . Nous savons qu'alors, pour $s\in[0,1[$,

$$A(s)B(s)=a_0b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n s^n=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n s^n=A(s)-1$$

car $a_0=1$ (puisque $S_0=0$), ce qui donne la relation demandée.

2. On a $a_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1, A_n$ est la réunion disjointe des événements $(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n)$ avec les $\varepsilon_i = \pm 1$ de somme nulle. L'événement est vide si n est impair, puisque S_n a toujours la parité de n. On a donc $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour a_{2n}, la probabilité de chaque $(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_{2n} = \varepsilon_{2n})$ est $p^n q^n$, puisque les X_k sont indépendantes, et on a donc $a_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$, puisqu'il y a $\binom{2n}{n}$ manières de choisir les n signes égaux à 1 parmi les $2n$. Par ailleurs, la série du binôme de Newton donne, pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}\end{aligned}$$

Ainsi, pour $s \in [0,1[$, et donc $4pqs^2 \in [0,1[$, on a

$$A(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n s^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}$$

Si $s \in [0,1[$, on a $A(s) > 0$ et $B(s) = \dfrac{A(s)-1}{A(s)} = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$.

3. Si la marche aléatoire repasse à l'origine, c'est-à-dire s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $S_m = 0$, alors l'un des événements B_n pour $n \leqslant m$ est réalisé.
L'inclusion inverse étant évidente, l'événement « il y a retour à l'origine » est la réunion disjointe des événements B_n et, par σ-additivité, sa probabilité est $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B(1)$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n s^n$ est normalement convergente sur $[0,1]$ et en particulier continue.
On peut passer à la limite dans l'expression trouvée à la question précédente, ce qui donne

$$B(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{1-4p+4p^2} = 1 - \sqrt{(1-2p)^2} = 1 - |p-q|$$

4. Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, il y a retour à l'origine presque sûrement, puisque la probabilité trouvée à la question précédente vaut 1. On définit la variable aléatoire T en posant

$$T = \min\{k \geqslant 1,\ \mathrm{S}_k = 0\}$$

avec $T = +\infty$ si $\mathrm{S}_k \neq 0$ pour tout k.
Par construction, T est une variable aléatoire qui est le temps d'attente du. premier retour à l'origine. Comme $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$, T est à support dans $\mathbb{N}$ et son espérance, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, vaut

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n b_n$$

La fonction B est la fonction génératrice de T (ou plus exactement celle de $T\mathbb{1}_{(T<+\infty)}$ qui possède la même espérance).
Or, nous savons que T est d'espérance finie si, et seulement si, B est dérivable en 1.
D'après ce qui précède on a pour $s \in \left[0,1\right[, B(s) = 1 - \sqrt{1-s^2}$, et cette fonction n'est pas dérivable en 1 .
On conclut que $\mathbb{E}(T) = +\infty$: pour une marche symétrique, il y a retour presque sûr à l'origine, mais celui-ci se fait avec un temps moyen infini.

14 Convergence presque sûre et convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)$ est un événement.

On dit que $(X_n)_n$ **converge presque sûrement** vers X lorsque

$$\mathbb{P}\left(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X\right) = 1$$

On dit que $(X_n)_n$ **converge en probabilité** vers X lorsque

$$\forall \varepsilon>0,\ \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. Montrer que la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.
3. On suppose que, pour tout $\varepsilon>0$, il y a convergence de la série $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$. Utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour montrer que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X.
4. Montrer que la convergence en probabilité de $(X_n)_n$ vers X entraîne la convergence presque sûre d'une suite extraite $\left(X_{\varphi(n)}\right)_n$ vers X.

Solution de 14 : Convergence presque sûre et convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires

1. Notons A l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)$. Alors

$$\omega\in A \iff \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, n\geqslant N,\ |X_n(\omega)-X(\omega)|\leqslant\varepsilon.$$

Donc

$$A = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant N}(|X_n - X|\leqslant\varepsilon).$$

Mais ce n'est pas une intersection dénombrable d'événements.
On peut réécrire la définition de la convergence

$$\omega\in A \iff \forall\, p\in\mathbb{N},\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, n\geqslant N,\ |X_n(\omega)-X(\omega)|\leqslant \frac{1}{p+1}$$

(se vérifie facilement par double implication). On a alors

$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant N}\left(|X_n - X|\leqslant \frac{1}{p+1}\right)$$

qui est une intersection dénombrable d'unions dénombrables d'intersections dénombrables d'événements, donc est un bien un événement : $\boxed{A\in\mathscr{A}.}$

2. On suppose $\mathbb{P}(X_n\to X)=1$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(A)=1$.

Soit $\varepsilon>0$. $\left(\bigcap_{n\geqslant N}(|X_n - X|\leqslant\varepsilon)\right)_N$ est une suite croissante d'événements, donc, par continuité croissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant N}(|X_n - X|\leqslant\varepsilon)\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant N}(|X_n - X|\leqslant\varepsilon)\right) = 1$$

car $A\subset \bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant N}(|X_n - X|\leqslant\varepsilon)$.

Or $\bigcap_{n\geqslant N}(|X_n - X|\leqslant\varepsilon)\subset(|X_N - X|\leqslant\varepsilon)$ donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant N}(|X_n - X|\leqslant\varepsilon)\right)\leqslant \mathbb{P}(|X_N - X|\leqslant\varepsilon)\leqslant 1$$

et, par encadrement, $\mathbb{P}(|X_N - X|\leqslant\varepsilon)\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$.

En passant à l'événement contraire, on obtient $\mathbb{P}(|X_N - X|>\varepsilon)\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{(X_n)_n \text{ converge vers } X \text{ en probabilité.}}$

3. On suppose que, pour tout $\varepsilon>0$, il y a convergence de la série $\sum \mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)$. Par le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant N}(|X_n-X|>\varepsilon)\right)=0$$

donc en passant au complémentaire

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant N}(|X_n-X|\leqslant\varepsilon)\right)=1.$$

$\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant N}\left(|X_n-X|\leqslant\frac{1}{p+1}\right)\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. Par continuité décroissante,

$$1=\mathbb{P}\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant N}\left(|X_n-X|\leqslant\frac{1}{p+1}\right)\right)\xrightarrow[p\to+\infty]{}\mathbb{P}(A)$$

donc $\mathbb{P}(A)=1$ et $\boxed{(X_n)_n \text{ converge presque sûrement vers } X.}$

4. On suppose la convergence en probabilité de $(X_n)_n$ vers X. On construit une extractrice par récurrence dans l'idée de rendre convergente la série $\sum_{n\geqslant1}\mathbb{P}\left(\left|X_{\varphi(n)}-X\right|\geqslant\varepsilon\right)$ pour utiliser la question précédente.
   - On pose $\varphi(1)=1$.
   - On suppose définis $\varphi(1)<\ldots<\varphi(n)$ tels que

   $$\forall\, k\in[\![1,n]\!],\;\; \mathbb{P}\left(\left|X_{\varphi(k)}-X\right|>\frac{1}{k}\right)\leqslant\frac{1}{k^2}.$$

   En utilisant la convergence en probabilité avec $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$, $\mathbb{P}\left(|X_n-X|>\frac{1}{n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$

   Par définition de la limite avec $\varepsilon=\frac{1}{(n+1)^2}$, on a un rang $N\in\mathbb{N}$ à partir duquel $\mathbb{P}\left(|X_n-X|>\frac{1}{n+1}\right)\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}$.

   On peut donc choisir $\varphi(n+1)=\max(N,\varphi(n)+1)>\varphi(n)$ vérifiant $\mathbb{P}\left(\left|X_{\varphi(n+1)}-1\right|>\frac{1}{n+1}\right)\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}$.

   On a alors, pour $\varepsilon>0$, un rang n_0 à parti duquel $\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon$ et donc

   $$\mathbb{P}\left(\left|X_{\varphi(n)}-X\right|>\varepsilon\right)\leqslant\mathbb{P}\left(\left|X_{\varphi(n)}-X\right|>\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n^2}$$

   qui est un terme général de série convergente, donc $\sum_{n\geqslant n_0}\mathbb{P}\left(\left|X_{\varphi(n)}-X\right|\geqslant\varepsilon\right)$ converge donc $\sum_{n\geqslant1}\mathbb{P}\left(\left|X_{\varphi(n)}-X\right|\geqslant\varepsilon\right)$ converge et la question précédente assure que $\boxed{(X_{\varphi(n)})_n \text{ converge presque sûrement vers } X.}$

15 Loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et suivant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. On pose

$$S_n=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$$

et on veut montrer que $\mathbb{P}\left(S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mu\right)=1$.

1. Montrer que l'on peut supposer $\mu=0$.

On suppose désormais que $\mu=0$.

2. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

3. Établir que la suite extraite $(S_{m^2})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $m=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ et

$$T_n=\frac{1}{n}(X_{m^2+1}+\cdots+X_n)$$

4. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(|T_n|>\varepsilon)\leqslant\frac{2\sigma^2}{n^{3/2}\varepsilon^2}$$

5. Conclure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^2}$ converge presque sûrement vers 0.

16 Convergence en loi et séries génératrices

On ne considère dans ce problème que des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dira que la suite (X_n) **converge en loi** vers X lorsque, pour tout entier naturel k,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$$

1. Soit $\left(a_{k,n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels telle que

$$\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2, \quad \left|a_{k,n}\right| \leqslant M \tag{1}$$

   où M est un réel strictement positif.
   Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série entière $\sum_k a_{k,n}x^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

2. On suppose encore que $\left(a_{k,n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ vérifie (1), et que, de plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite $\left(a_{k,n}\right)_{n>0}$ converge vers une limite ℓ_k.
   Montrer que la série entière $\sum_k \ell_k x^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k x^k$$

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note G_{X_n} la fonction génératrice de X_n. Montrer que, si la suite de variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X, alors la suite $\left(G_{X_n}\right)$ converge simplement vers G_X sur $]-1,1[$.

4. On considère encore dans cette question $\left(a_{k,n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels vérifiant (1). On note, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in]-1,1[$,

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}x^k.$$

   On suppose qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et telle que, notant

$$h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

   la suite (h_n) converge simplement vers h sur $]0,1[$.
   Montrer qu'alors

$$a_{0,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b_0$$

5. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que (X_n) converge en loi vers X si et seulement si la suite $\left(G_{X_n}\right)$ converge simplement vers G_X sur $]0,1[$.

6. Montrer que, si chaque variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n,p_n\right)$ où $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$, la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

7. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $\left(G_{X_n}\right)$ converge simplement sur $]0,1[$ vers une fonction qui n'est pas la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Solution de 16 : Convergence en loi et séries génératrices

1. La suite $\left(a_{k,n}1^k\right)$ est bornée, ce qui implique le résultat.

2. Par conservation des inégalités larges à la limite, $|\ell_k| \leqslant M$ pour tout k, ce qui implique bien que le rayon de convergence est $\geqslant 1$. Fixons $x\in]-1,1[$. Si $q\in\mathbb{N}_*$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty}\ell_k x^k\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{q}\left|a_{k,n}-\ell_k\right||x|^k + 2M\sum_{k=q+1}^{+\infty}|x|^k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{q}\left|a_{k,n}-\ell_k\right||x|^k + \frac{2M|x|^{q+1}}{1-|x|}\end{aligned}$$

   Soit $\varepsilon>0$. Fixons q tel que

$$\frac{2M|x|^{q+1}}{1-|x|} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{q}\left|a_{k,n}-\ell_k\right||x|^k\right)_{n\geqslant 0}$, combinaison linéaire de suites qui convergent vers 0 , converge vers 0 , donc il existe un rang n_0 tel que

$$(n\geqslant n_0)\Longrightarrow \sum_{k=0}^{q}\left|a_{k,n}-\ell_k\right||x|^k\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$(n\geqslant n_0)\Longrightarrow \left|\sum_{k=0}^{+\infty}a_{k,n}x^k-\sum_{k=0}^{+\infty}\ell_k x^k\right|\leqslant\varepsilon$$

3. Il suffit d'appliquer ce qui précède en prenant

$$a_{k,n}=\mathbb{P}(X_n=k)$$

On a bien (1) avec $M=1$. Et $\ell_k=\mathbb{P}(X=k)$.

4. Démarche naturelle : faire apparaître ce que l'on veut voir tendre vers 0 à l'aide de ce qu'on sait tendre vers 0. Pour simplifier les écritures, on peut supposer

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad |b_k|\leqslant M$$

(quitte à remplacer M par un réel plus grand).
On a, pour tout $x\in]0,1[$,

$$h(x)-h_n(x)=a_{0,n}-b_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(b_k-a_{k,n}\right)x^k$$

d'où

$$\begin{aligned}\left|a_{0,n}-b_0\right| &\leqslant |h(x)-h_n(x)|+\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\left(b_k-a_{k,n}\right)x^k\right|\\ &\leqslant |h(x)-h_n(x)|+2M\sum_{k=1}^{+\infty}x^k\\ &=|h(x)-h_n(x)|+2M\frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. On fixe $x_0\in]0,1[$ tel que

$$2M\frac{x_0}{1-x_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe alors un rang n_0 tel que

$$(n\geqslant n_0)\Longrightarrow |h(x_0)-h_n(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

et alors

$$(n\geqslant n_0)\Longrightarrow\left(\left|a_{0,n}-b_0\right|\leqslant\varepsilon\right)$$

ce qui conclut.

5. Un sens a déjà été fait, reste la réciproque. On suppose que, pour tout t dans $]0,1[$,

$$G_{X_n}(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}G_X(t)$$

On applique alors la question précédente (les hypothèses en sont facilement vérifiées avec $M=1$), on obtient

$$\mathbb{P}(X_n=0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(X=0)$$

Mais alors la suite de fonctions $\left(t\mapsto\dfrac{G_{X_n}(t)-\mathbb{P}(X_n=0)}{t}\right)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction $t\mapsto\dfrac{G_X(t)-\mathbb{P}(X=0)}{t}$ sur $]0,1[$, et la question précédente s'applique de nouveau pour conclure que

$$\mathbb{P}(X_n=1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(X=1)$$

et on conclut par une récurrence à hypothèse forte : si, pour tout $k\in\{0,\dots,q\}$, on a

$$\mathbb{P}(X_n=k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(X=k)$$

alors on peut dire que la suite de fonctions $\left(t\mapsto\dfrac{1}{t^{q+1}}\left(G_{X_n}(t)-\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\mathbb{P}(X_n=k)\,t^k\right)\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^{q+1}}\left(G_X(t)-\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\mathbb{P}(X=k)t^k\right)$ ce qui permet d'appliquer ne nouveau la question précédente pour obtenir

$$\mathbb{P}\left(X_n=q+1\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(X=q+1)$$

et de conclure la récurrence.

6. Application de ce qui précède.
7. On peut par exemple considérer X_n qui suit une loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}$. La fonction génératrice en est

$$g_n : t \mapsto \frac{1}{n+1}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

La suite g_n converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle, qui n'est pas une fonction génératrice.