Exercices Banque CCINP

1 CCINP 31

2 CCINP 32

3 CCINP 42

4 CCINP 74

5 CCINP 75

Autres exercices vus en cours

6 Résoudre $y^{(4)} = y$ en utilisant le lemme de décomposition des noyaux.

7 Soit $\Phi : J \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une solution d'une équation homogène

$$X' = A(t)X \qquad (H)$$

où $A : J \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est continue sur l'intervalle J. Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$$

(et donc, pour insister, $\exists t \in J \quad \Phi(t) = (0) \implies \forall t \in J \quad \Phi(t) = (0)$).

8 Soit T un réel > 0, $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ continues et T-périodiques. Montrer qu'une solution Φ sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$X' = A(t)X + B(t)$$

est T périodique si et seulement si elle vérifie $\Phi(T) = \Phi(0)$
Indication : on remarquera que Φ est T-périodique si et seulement si $\Phi = \Psi$ où $\Psi : t \mapsto \Phi(t+T)$.

9 On souhaite déterminer un un système fondamental de solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) &= t\,x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + t\,y(t) \end{cases}$$

1. Chercher un système dont sont solutions les fonctions $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$. et conclure.
2. Retrouver le résultat en posant $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$.

10 **Dans des problèmes d'écrit...**

1. Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire, à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation
$$y'' + a(x)y = 0$$
est impaire si et seulement si elle vérifie $f(0) = 0$.
2. Soit a, b deux fonctions T-périodiques continues à valeurs réelles. Montrer qu'une solution f de l'équation
$$y'' + a(x)y' + a(x)y = 0$$
est T-périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$ et $f'(0) = f'(T)$.
3. On suppose que a et b sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Soit (f, g) une base de l'espace des solutions de
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$
Montrer que f et g ne peuvent pas être toutes les deux paires ni toutes les deux impaires (l'énoncé dit « par exemple en utilisant le wronskien »).

11 Déterminer, en utilisant le wronskien, un système fondamental de solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega > 0$.

12 Si f et g sont deux solutions de (L) et si $f(x_0) = g(x_0)$, alors on ne peut rien conclure en général.
Montrer que néanmoins, deux solutions linéairement indépendantes de (H) ne peuvent s'annuler en un même point x_0.

13 **EDL$_2$ newtoniennes** Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (dite **newtonienne**)

$$y'' + q(x)y = 0$$

vérifie une équation différentielle linéaire particulièrement simple.

14 **Oral Mines** Soient a et b continues et 1-périodiques, et soit y solution de $y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que y s'annule en tout $k \in \mathbb{Z}$.

15 Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

16 Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ $(H) \quad x^2y'' - 3xy' - 5y = 0$

17 Résoudre sur $]1, +\infty[$ $(H) \quad \left(1 - x^2\right)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

18 Trouver les solutions DSE de l'équation (H) $2xy'' + y' - y = 0$. Terminer la résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $t = \sqrt{2x}$.

19 Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\cos t)y'+(\sin t)y=\cos^3 t$.

20 **Écrit CCP 2005** Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n)\quad xy'-ny=0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I=]-\infty,0[$ et $J=]0,+\infty[$.
2. Dans le cas où $n=1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n\geqslant 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

Révisions de MP2I

21 **EDL$_1$** Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur $\mathbb{R}$

1. $(1+x^2)y'+xy=2x^2+1$
2. $y'+y=te^t+\sin t$
3. $y'-\ln(x)y=x^x$
4. $t^2y'+2ty=\dfrac{1}{1+t^2}$
5. $(\cos t)y'+(\sin t)y=\cos^3 t$
6. $y'+2xy=e^{x-x^2}$
7. $ty'-y=\sqrt{|t|}$
8. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$
9. $(1+t)^2y''+(1+t)y'=2$
10. $(x^2+1)y'+xy=1$
11. $(t^2+1)^2y'+2t(t^2+1)y=1$
12. $\mathrm{ch}(x)y'-\mathrm{sh}(x)y=\mathrm{sh}^3(x)$

22 **EDL$_2$** Donner les solutions réelles ou complexes de

1. $\begin{cases} y''+y'-2y=8\sin t\\ y(\pi)=0\\ y'(\pi)=1\end{cases}$
2. $y''-2y'+y=\mathrm{ch}\,x$
3. $y''+y=\sin^2(t)$
4. $y''+4y'+5y=\mathrm{ch}(2x)\cos x$
5. $y''+2y'+2y=2t-\sin t$

23 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2f(-x)+x$.
(On pourra remarquer qu'alors f est deux fois dérivable...)

24 En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications f deux fois dérivables telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)+f(-x)=x+\cos x$.

Sujets d'écrits

25 **CCP 2016** On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y''+(x^2-x)y'+2y=0$.
Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ $(r>0)$ de $\mathbb{R}$?

26 **CCP 2014** a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(E):\quad x^2y''+a(x)y'+b(x)y=0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I=]0,i[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J=]-\infty,0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^-.
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+\times S^-$ définie par $\varphi(f)=(f_I,f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J.
Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S\leqslant 4$.
3. Dans cette question, on considère $a(x)=x$ et $b(x)=0$, d'où $(E):\quad x^2y''+xy'=0$.
Determiner S^+ et S^-.
Determiner ensuite S et donner sans détails la dimension de S .
4. Dans cette question $(E):\quad x^2y''-6xy'+12y=0$.
Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x\mapsto x^\alpha$ (α réel).
En déduire S^+ puis S^-.
Determiner S et donner la dimension de S.
5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E):\quad x^2y''+a(x)y'+b(x)y=0$ tel que $\dim S=0$ (on détaillera).
On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

27 **CCP 2013** On considère le système différentiel de fonctions inconnues x,y et de variable $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' &= x-y\\ y' &= x+3y\end{cases}.$$

1. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B=A-2I_2$ est nilpotente.
En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA}=e^{2t}e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t, donner l'expression de la matrice e^{tA}.
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) &= 1\\ y(0) &= 2\end{cases}$.

28 Mines 2011

1. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$.Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?

   On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{C}$ et on considère la matrice A de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.
3. En déduire les solutions $X : I \to \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle $X' = AX$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle $y^{(4)} + y'' + y = 0$ et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   On pourra considérer le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$.

29 CCP 2009

On considère l'équation différentielle $xy' + y = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. (E)

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $]-1,0[$ et $]0,1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $]-1,1[$.

30 Centrale 2008

λ désigne un réel fixé, q une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, 2π-périodique paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. et on considère l'équation différentielle d'inconnue y : $(E_\lambda) \quad y'' + (\lambda - q)y = 0$.

1. Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_λ) et exploiter l'unicité pour prouver q'une solution y de (E_λ) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.
2. Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité.
3. En déduire la dimension d'un sous-espace propre de $Q : y \in E_2 \to -y'' + qy$ où E_2 est l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Autres exercices

31

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2\sin t \end{cases}$ en posant $u = y - x$.

32

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -y + e^{-t} \\ y' = x + e^{-t} \end{cases}$

33

On considère $(H) : X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre H et en déduire $\exp(tA)$.
2. Retrouver $\exp(tA)$ par un calcul direct.

34

On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos t \\ y' = x + 2ty + t\sin t \end{cases}$

1. Résoudre le système homogène en posant $u(t) = x(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)e^{-t^2}$.
2. Résoudre le système en utilisant une méthode de variation des constantes.
3. Retrouver les solutions en posant $z = x + iy$.

35

Résoudre l'équation $y'' + y = \tan^2 t$.

36

Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto e^{ax}$.

37

Résoudre l'équation $4xy'' + 2y' - y = 0$ en déterminant les solutions développable en série entière.

38

Résoudre l'équation $x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = e^x$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x) = x^2y(x)$.

39

Résoudre l'équation $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ sur $]0,+\infty[$ en effectuant le changement variable $t = x^2$.

40

Sur $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$, on considère l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$.

1. Si $f, g \in E$, rappeler la formule de Leibniz exprimant $D^m(fg)$ en fonction des dérivées successives de f et de g.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $e_\lambda D^m\left(e_{-\lambda} f\right) = (D - \lambda \mathrm{id}_E)^m(f)$.
3. En déduire $\mathrm{Ker}(D - \lambda \mathrm{id}_E)^m$.
4. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ scindé. En utilisant le lemme de décomposition des noyaux, montrer que les solutions de $a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = 0$ sont exactement les combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ où λ est une racine de P et k est un entier naturel inférieur ou égal à la multiplicité de λ en tant que racine de P.