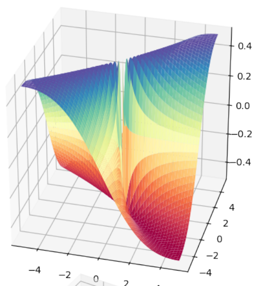
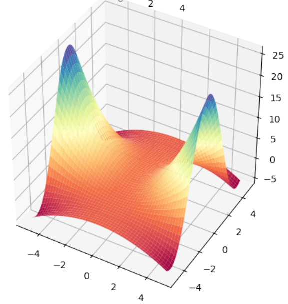
Exercices traités en cours



1 Montrer que

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

admet des applications partielles continue en 0, mais est discontinue en $(0,0)$.



2 Montrer que

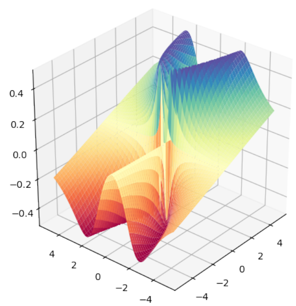
$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 1+x^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3 Calculer les dérivées partielles en tout point de $f:(r,\theta,\phi)\mapsto\left(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\right)$.

4 Calculer le dérivées partielles en tout point de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$



Les application partielles en $(0,0)$ sont-elles continues en 0 ?

f est-elle continue en $(0,0)$?

5
1. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées polaires :
$$f:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
2. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées cylindriques :
$$f:(r,\theta,z)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$
3. Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées sphériques :
$$f:(r,\theta,\phi)\mapsto\left(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\right).$$

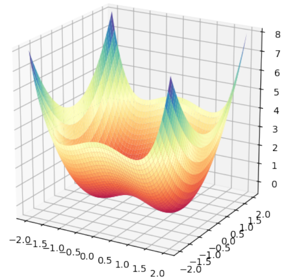
6 CCINP 33 **7** CCINP 52 **8** CCINP 57 **9** CCINP 56

10 Calculer les dérivées partielles de $h:(x,y)\mapsto g(x+y,xy)$ par la règle de la chaîne puis par les matrices jacobiennes.

11 Calculer la dérivée de $g:t\mapsto f(tx_1,\dots,tx_n)$ où $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

12 Déterminer les extremums de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto y^2-x^2+\frac{x^4}{2}.$$



13 Résoudre $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide du changement de variable

$$(u,v)=\varphi(x,y)=(x+y,x+2y),$$

en vérifiant que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

14 Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Résoudre $a\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+b\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide d'un changement de variable affine.

15 Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=0$$

sur $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

16 Soit $\mathscr{V}=]0,+\infty[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi:V\to\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

Déterminer un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que φ soit une bijection de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{V}$.
Résoudre

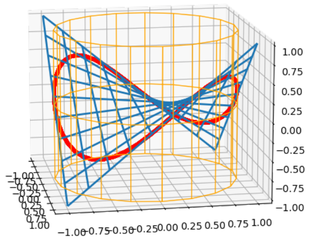
$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$.

17 À l'aide du changement de variable $(u,v)=\left(x,\dfrac{y}{x}\right)$, résoudre sur $\mathscr{C}^2(\mathscr{U})$ où $\mathscr{U}=\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$$

18 Déterminer de trois manières différentes $\min\limits_{x^2+y^2=1} xy$.



En bleu :

$$z=f(x,y)$$

En orange :

$$g(x,y,z)=0$$

En rouge :

$$z=f_{|X}(x,y)$$

19 **Oral CCINP** Montrer que $f:(x,y)\mapsto 4x^2+12xy-y^2$ admet un minimum et un maximum sur $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=13\}$ et les déterminer.

20 **Inégalité arithmético-géométrique** En étudiant l'application $f:(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1\cdots\cdots x_n$ sur $C_s=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n,\ x_1+\cdots+x_n=s\}$, retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

Continuité

- Attention à ne pas tirer de conclusions trop hâtives quant à la continuité ou la limite d'une fonction de deux variables : celles des applications partielles ne suffit pas.
- Pour montrer que $f:E\mapsto F$ tend vers ℓ, on rappelle que la méthode standard consiste à majorer la norme de la différence par une quantité tendant vers 0. Le recours au changement de variable en coordonnées polaires est d'usage courant.
- Pour montrer qu'il n'y a pas de limite ou qu'elle ne vaut pas une valeur donnée, on peut penser au critère séquentiel.
- Pour la continuité, et en particulier les prolongements, on utilise souvent le lemme « de partition ».

21 Étudier les prolongements par continuité des fonctions suivantes :

$$f:(x,y)\mapsto\frac{\cos x-\cos y}{x-y}\qquad\qquad g:(x,y)\mapsto\frac{x^2+y^2}{x}$$

22 Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\qquad h:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4-2x^3y+x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x\neq y,\\ |x| & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$g:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 1+x^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

23 Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles

- L'existence des dérivées partielles ne donne pas la continuité d'une fonction de deux variables, mais si elles sont en plus continues, cela donne le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction, et en particulier la continuité de celle-ci.

24 Étudier la continuité, l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f:(x,y)\mapsto\left|\begin{array}{ll}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } x=y=0.\end{array}\right.$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
2. Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0,0)$.

26 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Déterminer les dérivées (partielles) de $g:(x,y)\mapsto f(y,x)$ et $h:x\mapsto f(x,x)$.

27 Soit $\phi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ continue et $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\displaystyle\int_x^y\phi(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles premières.

28 **Fonctions harmoniques** Une application $f:\mathscr{U}\mapsto\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite ***harmonique*** si et seulement si $\Delta f=0$ où $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est le ***laplacien*** de f.

1. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, soient $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ et $f(x,y)=\ln\left|\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}\right|$. Montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^3$ et harmonique, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. Vérifier que $f:(x,y)\mapsto\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

29 Calculer l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

Équations aux dérivées partielles

- Les changements de variables pour résoudre des Équations aux Dérivées Partielles sont fréquents : les calculs des dérivées partielles sont plus ou moins techniques, il faut être vigilant et bien connaître les formules de dérivation de fonctions composées, obtenus par règle de la chaîne ou à l'aide des matrices jacobiennes. Lorsqu'un changement de variable n'est pas indiqué, il faut penser à un changement de variable affine ou en coordonnées polaires.

30 Soit $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ homogène de degré $\alpha\in\mathbb{R}$ i.e. telle que

$$\forall t\in\mathbb{R}_*^+,\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y).$$

Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$, puis étudier la réciproque pour une fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}$.

31 Résoudre l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=f$.

32 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

33 Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ solutions des systèmes suivants :

1. $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=xy^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2y\end{cases}$
2. $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$
3. $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\end{cases}$

34 **CCINP** Toute fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ peut être écrite, pour tout $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$, sous la forme $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, u et v désignant 2 fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose de trouver, s'il en existe, des fonctions f satisfaisant aux conditions suivantes :

(C1) Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

(C2) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$.

1. Démontrer que, si u et v existent, alors $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$ et $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=0$.
2. On suppose que $u(x,y)=x^3-3xy^2+2x^2-2y^2+3x$.
   (a) Trouver les fonctions v telles que les conditions (C1) et (C2) soient satisfaites.
   (b) Démontrer qu'il existe une fonction $f=u+\mathrm{i}v$ unique telle que $f(0)=0$ et expliciter $f(z)$ en fonction de z.
   (c) Pour cette fonction f, construire dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, le point A d'affixe $f(\mathrm{i})$.

35 En utilisant le changement de variables $(u,v)=(x,x+y)$, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

36 À l'aide du changement de variables $(u,v)=\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$, déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$.

37 Trouver toutes les applications $\varphi:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que l'application $f:\mathscr{U}=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, définie par $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ soit solution sur $\mathscr{U}$ de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{y}{x^3}$ puis résoudre l'équation sous forme général en posant $u=x+y$ et $v=x-y$.

Optimisation

- Pour déterminer les extremums locaux d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert, on cherche les points critiques et on les étudie un à un (par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, en cherchant le signe de $f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1,a_2)$ pour (h,k) tendant vers $(0,0)$).
  Si l'ensemble de définition n'est pas un ouvert, il y a des termes de bord, il faut les traiter à part.
  Si, de plus, on a affaire à une fonction continue sur un compact, on est assuré de l'existence d'extremums globaux.
- Dans le cas d'une optimisation sous contrainte, on peut parfois soit paramétrer l'ensemble de contrainte, soit l'écrire explicitement et utiliser le point précédent, mais en général, on passe par le théorème du même nom du cours, souvent précédé d'un argument de compacité.

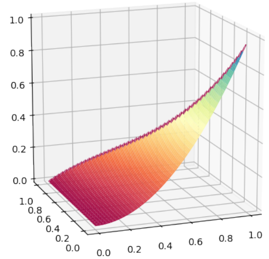
38 Déterminer les extremums locaux des fonctions $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$
2. $g(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+5$
3. $h(x,y)=x^3+y^3$
4. $i(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$
5. $j(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

39 Soit

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x^2+xy^2$$
$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ x+y\leqslant 1\right\}$$

Montrer que f atteint un minimum et un maximum sur K et trouver tous les points en lesquels ils sont atteints.



40 Déterminer les triangles d'aire maximale inclus dans un cercle donné.

41 **CCINP** Étudier les extrema de la fonction définie par $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

42 **Principe du maximum** On désigne par D le carré ouvert $]0,a[\times]0,a[$.

1. Démontrer que si une fonction u, de classe $\mathscr{C}^2$ sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$, admet un maximum local en un point, alors son laplacien en ce point est négatif ou nul.
2. Soit u une fonction continue sur $\overline{D}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, nulle sur le bord de D et telle que $\Delta u=0$ sur D (fonction harmonique). On suppose que u prend en au moins un point une valeur strictement positive.
   Démontrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que la fonction
   $$u_\varepsilon:(x,y)\longmapsto u(x,y)+\varepsilon(x^2+y^2)$$
   ait un maximum local sur D.
   En déduire que u est nulle sur D.

43 Soit Γ la courbe d'équation $x^3+y^3=1$. Déterminer les extremums de $f:(x,y)\mapsto xy$ sur Γ.

44 Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $c\in\mathbb{R}$, et $\mathscr{D}$ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax+by=c$.

1. Déterminer le minimum de $f:(x,y)\mapsto x^4+y^4$ sur $\mathscr{D}$.
2. Déterminer les extremums de $g:(x,y)\mapsto xy$ sur $\mathscr{D}$.