1. Dérivation

1 Soit $M(t)=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{e}^t\\ -\mathrm{e}^{-t} & -1\end{pmatrix}$ pour $t\in\mathbb{R}$, ce qui définit une fonction dérivable $M:\mathbb{R}\to\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculer $\exp M(t)$. A-t-on $(\exp M)'=M'\exp M$?

Solution de 1 :

Avec $M^2:t\mapsto O_2$, on a $\exp M(t)=I_2+M_2(t)$.

On remarque que $(\exp M)'\neq M'\exp M$.

2 Calculer $\begin{vmatrix} a & 1 & & 0\\ a^2/2! & a & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ a^n/n! & \cdots & a^2/2! & a\end{vmatrix}$ pour $a\in\mathbb{R}$.

Solution de 2 :

$g_n:a\mapsto\begin{vmatrix} a & 1 & & 0\\ a^2/2! & a & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ a^n/n! & \cdots & a^2/2! & a\end{vmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on remarque en dérivant une des colonnes qu'on obtient la colonne suivante donc un déterminant nul. Il ne reste donc, pour $n\geqslant 2$, que

$$g_n':a\mapsto\begin{vmatrix} a & 1 & & & 0\\ a^2/2! & a & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots\\ & & \ddots & a & 0\\ a^n/n! & \cdots & \cdots & a^2/2! & 1\end{vmatrix}=g_{n-1}(a)$$

en développant par rapport à la dernière colonne ou en reconnaissant un déterminant triangulaire par blocs.

On obtient alors (licite) $g_n^{(n-1)}=g_1:a\mapsto a$. Il reste à primitiver $n-1$ fois et remarquer que toutes les constantes de primitivation sont nulles car pour tout $k\geqslant 1$, $g_k(0)=0$. Finalement, $\boxed{g_n:a\mapsto\dfrac{a^n}{n!}.}$

3 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

Montrer que si $t\mapsto\|f(t)\|$ est constante, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)\perp f'(t)$.

Solution de 3 :

$0=\left(\|f\|^2\right)'(t)=2\big(f(t)|f'(t)\big)$ par bilinéarité et symétrie.

4 **CCINP** Soit u,v,w trois fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a)\\ u(b) & v(b) & w(b)\\ u'(a) & v'(a) & w'(a)\end{vmatrix}=0.$$

Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a)\\ u(b) & v(b) & w(b)\\ u''(c) & v''(c) & w''(c)\end{vmatrix}=0.$$

Solution de 4 : CCINP

Appliquer le théorème de Rolle à $f:x\mapsto\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a)\\ u(b) & v(b) & w(b)\\ u(x) & v(x) & w(x)\end{vmatrix}$ puis à f'.

2. Formules de Taylor

5 Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1], E)$ où E est un espace vectoriel normé, telle que

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \|f(1)\| = 1.$$

Montrer en écrivant deux formules de Taylor que $\|f''\|_\infty \geqslant 4$.

Solution de 5 :

ITL entre 0 et $\frac{1}{2}$ et entre 1 et $\frac{1}{2}$.

6 **Mines** Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, E)$ où E est un espace vectoriel normé, telle que f et f'' sont bornées, $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, $\|f'(x)\| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.
2. En déduire que f' est bornée et $\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.
3. Améliorer l'étude précédente pour montrer que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2M_0 M_2}$.

Solution de 6 : Mines

3. Exponentielle

7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer de deux façons $\exp(\pi A)$.

8 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr} A}$. Que dire de $\operatorname{Sp}\left(e^A\right)$?

9 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des polynômes en A.

1. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire $e^A \in \mathbb{R}[A]$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer e^A et déterminer un polynôme P tel que $e^A = P(A)$.

10 Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\exp A$ est orthogonale.

Solution de 10 :

L'opération de transposition étant linéaire en dimension finie donc continue, on montre, en transposant les sommes partielles puis en passant à la limite, que $(\exp A)^\intercal = \exp A^\intercal = \exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ ce qui permet de conclure.

11 Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on note D l'endomorphisme de dérivation et $T : P \mapsto P(X+1)$.

Montrer que $\exp D = T$.

Solution de 11 :

La clé réside dans l'utilisation de la formule de Taylor pour les polynômes : on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!}(X-x)^k$$

donc, en évaluant en $x+1$,

$$P(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x)}{k!}$$

d'où l'égalité polynomiale

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!} = \exp(D)(P).$$

12 **Mines** Soit u un endomorphisme nilpotent sue E de dimension finie. Montrer

$$\operatorname{Ker}(\exp u - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Ker} u$$

$$\operatorname{Im}(\exp u - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Im} u$$

Solution de 12 : Mines

Source : ddmaths 663.7

Posons $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = 0$. On peut simplifier

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k$$

Si $x \in \operatorname{Ker}(u)$ alors

$$(\mathrm{e}^u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k(x) = \underbrace{x}_{k=0} + \underbrace{0_E}_{k \geqslant 1} = x$$

et donc

$$x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E)$$

Inversement, supposons $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E)$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} u^k(x) = 0$$

Par l'absurde, supposons $u(x) \neq 0_E$ et introduisons $\ell \geqslant 1$ le plus grand entier tel que $u^\ell(x) \neq 0_E$. En composant la relation précédente avec $u^{\ell-1}$, on obtient

$$u^\ell(x) = 0_E$$

Cela est absurde car contredit la définition de ℓ. On en déduit $u(x) = 0_E$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(u)$. Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Ker}(u)$$

Puisque

$$\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k = u \circ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} u^{k-1} \right)$$

on a de façon immédiate

$$\operatorname{Im}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Im}(u)$$

En vertu de l'égalité des noyaux et de la formule du rang, on peut affirmer

$$\dim \operatorname{Im}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) = \dim \operatorname{Im}(u)$$

et donc conclure

$$\operatorname{Im}(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im}(u)$$

13 Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\left(I_p + \frac{A}{n} \right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp A$$

Solution de 13 :

Étendre le binôme pour faire apparaître une somme de série, prendre une norme d'algèbre et vérifier que la série converge normalement. Utiliser le théorème de la double limite.

On a

$$\left(\mathrm{I}_p + \frac{A}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \cdot \frac{A^k}{k!}$$

Posons $f_k : \mathbb{N} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par

$$f_k(n) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \cdot \frac{A^k}{k!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que

$$\left(\mathrm{I}_p+\frac{A}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

avec

$$\left\|f_k(n)\right\| \leqslant \frac{\left\|A^k\right\|}{k!} \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \text{ et } k\in\mathbb{N}^*$$

(quitte à introduire une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). On a donc

$$\left\|f_k\right\|_\infty \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}=\alpha_k$$

avec α_k qui est le terme général d'une série convergente. Il en découle que la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} f_k(n)=\frac{A^k}{k!}$$

on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{I}_p+\frac{A}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}=\exp(A)$$

14 **Mines** Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^4=I_n$. Calculer $\exp A$.

Solution de 14 : Mines

Séparer la séries en 4 termes par convergence absolue suivant les valeurs de n $[4]$.

Exprimer les cœfficients de I_n, A, A^2 et A^3 à l'aide de $\cos 1$, $\operatorname{ch} 1$, $\sin 1$ et $\operatorname{sh} 1$.

15 **CCINP** Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Sp} A=\{-2,1,3\}$.

Exprimer A^n en fonction de A^2, A et I_3 et en déduire une expression de

$$\operatorname{ch} A=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}A^{2n}$$

Solution de 15 : CCINP

Vérifier que $\chi_A=(X-2)(X+1)^2$ puis que A est diagonalisable.

$\pi_A=(X-2)(X+1)$.

Par division euclidienne de X^n par π_A, trouver une expression de A^n.

En déduire que $\exp A=\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-1}}{3}A+\dfrac{2\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^2}{3}I_3$.

16 **Mines** Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $A=\begin{pmatrix}0 & a & a^2\\ 1/a & 0 & a\\ 1/a^2 & 1/a & 0\end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme minimal de A puis $\exp A$.

Solution de 16 : Mines

Vérifier que $\chi_A=(X-2)(X+1)^2$ puis que A est diagonalisable.

$\pi_A=(X-2)(X+1)$.

Par division euclidienne de X^n par π_A, trouver une expression de A^n.

En déduire que $\exp A=\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-1}}{3}A+\dfrac{2\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^2}{3}I_3$.

(a) $\chi_A=(X-2)(X+1)^2$,

$$E_2(A)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}a^2\\ a\\ 1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad E_{-1}(A)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-a^2\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice A est diagonalisable, on écrit $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$. (b) Par division euclidienne, $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} \mathrm{I}_3$$

puis

$$\mathrm{e}^A = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}}{3} A + \frac{2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2}{3} \mathrm{I}_3$$

17 **Mines** Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $L(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} M^k$.

En en calculant la dérivée seconde, montrer que $\exp(L(tM)) = I_n + tM$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution de 17 : Mines

Source : ddmaths

Puisque M est nilpotente de taille n, on sait $M^n = \mathrm{O}_n$. Cela assure que $L(tM)$ est correctement définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$L(tM) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k M^k$$

et l'on peut introduire

$$\Phi(t) = \exp(L(tM))$$

Les termes de la somme définissant $L(tM)$ commutent entre eux et donc

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k M^k \right)$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on sait que $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{tA}\right) = A\mathrm{e}^{tA}$$

Par produit, on en déduit que la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Aussi, par composition,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k M^k \right) \right) = (-1)^{k-1} t^{k-1} M^k \exp\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k M^k \right)$$

et, par dérivation d'un produit (et commutativité des facteurs),

$$\Phi'(t) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} t^{k-1} M^k \Phi(t)$$

On multiplie les deux membres par $\mathrm{I}_n + tM$ pour observer un télescopage en second membre

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}_n + tM)\Phi'(t) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left((-1)^{k-1} t^{k-1} M^k - (-1)^k t^k M^{k+1} \right) \Phi(t) \\ &= \left(M - (-1)^{n-1} t^{n-1} M^n \right) \Phi(t) = M\Phi(t) \end{aligned}$$

On peut à nouveau dériver

$$M\Phi'(t) + (\mathrm{I}_n + tM)\Phi''(t) = M\Phi'(t)$$

ce qui se simplifie en

$$(\mathrm{I}_n + tM)\Phi''(t) = 0$$

Puisque la matrice M est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Par cette similitude, on obtient $\det(\mathrm{I}_n + tM) = 1$ et donc $\mathrm{I}_n + tM$ est une matrice inversible. On en déduit

$$\Phi''(t) = 0$$

La fonction Φ' est donc constante égale à $\Phi'(0) = M$ puis on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(t) = \Phi(0) + tM = \mathrm{I}_n + tM$$