1. Dérivation

1 Soit $M(t)=\begin{pmatrix}1 & e^t\\ -e^{-t} & -1\end{pmatrix}$ pour $t\in\mathbb{R}$, ce qui définit une fonction dérivable $M:\mathbb{R}\to\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculer $\exp M(t)$. A-t-on $(\exp M)'=M'\exp M$?

2 Calculer $\begin{vmatrix} a & 1 & & 0\\ a^2/2! & a & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ a^n/n! & \cdots & a^2/2! & a\end{vmatrix}$ pour $a\in\mathbb{R}$.

3 Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

Montrer que si $t\mapsto\|f(t)\|$ est constante, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)\perp f'(t)$.

4 **CCINP** Soit u,v,w trois fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a)\\ u(b) & v(b) & w(b)\\ u'(a) & v'(a) & w'(a)\end{vmatrix}=0.$$

Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a)\\ u(b) & v(b) & w(b)\\ u''(c) & v''(c) & w''(c)\end{vmatrix}=0.$$

2. Formules de Taylor

5 Soit $f\in\mathscr{C}^2([0,1],E)$ où E est un espace vectoriel normé, telle que

$$f(0)=f'(0)=f'(1)=0 \quad \text{et} \quad \|f(1)\|=1.$$

Montrer en écrivant deux formules de Taylor que $\|f''\|_\infty\geqslant 4$.

6 **Mines** Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},E)$ où E est un espace vectoriel normé, telle que f et f'' sont bornées, $M_0=\|f\|_\infty$ et $M_2=\|f''\|_\infty$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $h>0$, $\|f'(x)\|\leqslant\dfrac{2M_0}{h}+\dfrac{hM_2}{2}$.
2. En déduire que f' est bornée et $\|f'\|_\infty\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.
3. Améliorer l'étude précédente pour montrer que $\|f'\|_\infty\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$.

3. Exponentielle

7 Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Exprimer de deux façons $\exp(\pi A)$.

8 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(e^A)=e^{\operatorname{tr}A}$. Que dire de $\operatorname{Sp}(e^A)$?

9 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des polynômes en A.

1. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire $e^A\in\mathbb{R}[A]$.
3. Soit $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Calculer e^A et déterminer un polynôme P tel que $e^A=P(A)$.

10 Soit $A\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\exp A$ est orthogonale.

11 Sur $E=\mathbb{R}_n[X]$, on note D l'endomorphisme de dérivation et $T:P\mapsto P(X+1)$.

Montrer que $\exp D=T$.

12 **Mines** Soit u un endomorphisme nilpotent sue E de dimension finie. Montrer

$$\operatorname{Ker}(\exp u-\mathrm{id}_E)=\operatorname{Ker}u$$
$$\operatorname{Im}(\exp u-\mathrm{id}_E)=\operatorname{Im}u$$

13 Soit $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\left(I_p+\frac{A}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}=\exp A$$

14 **Mines** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^4=I_n$. Calculer $\exp A$.

15 **CCINP** Soit $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{Sp}A=\{-2,1,3\}$.

Exprimer A^n en fonction de A^2, A et I_3 et en déduire une expression de

$$\operatorname{ch}A=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}A^{2n}$$

16 **Mines** Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $A=\begin{pmatrix}0 & a & a^2\\ 1/a & 0 & a\\ 1/a^2 & 1/a & 0\end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme minimal de A puis $\exp A$.

17 **Mines** Pour $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $L(M)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}M^k$.

En en calculant la dérivée seconde, montrer que $\exp(L(tM))=I_n+tM$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.