Limites, continuité, compacité, connexité par arcs

- Pour montrer que $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ tend vers ℓ, on pourra essayer de majorer la norme de la différence par une quantité tendant vers 0.
- Pour montrer qu'il n'y a pas de limite, penser au critère séquentiel.
- Pour la continuité, et en particulier les prolongements, on peut utiliser le lemme facile :

  si $f : D \mapsto \mathbb{R}$ où $D = D_1 \cup D_2 \subset E$ et $a \in \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$, alors
  $f \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si $f_{|D_1} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f_{|D_2} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$,

  et donc en particulier

  f est continue en $a \in D$ tel que $a \in D_1$ et $a \in \overline{D_2}$
  si et seulement si $f_{|D_1}$ est continue en a et $f_{|D_2} \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.
- Pour étudier la continuité d'une application linéaire :
  - Penser à reconnaître une application linéaire !! (Lorsqu'elle s'appelle u ou T, il y a de fortes chances pour qu'elle le soit...)
  - Soit on est en dimension finie **au départ** et il n'y a rien à faire.
  - Soit ce n'est pas le cas et alors on cherche une constante C telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$.
  - Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on cherche à nier la caractérisation séquentielle de la continuité en 0 en trouvant une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0_E$ (ie $\|x_n\|_E \to 0$) et pourtant $u(x_n) \not\to 0_F$ (ie $\|u(x_n)\|_F \not\to 0_F$) , ou encore, comme pour nier une domination de normes, une suite telle que $\left(\frac{\|u(x_n)\|_F}{\|x\|_E}\right)_n$ n'est pas bornée.
- Pour calculer la norme subordonnée d'un opérateur (ie d'une application linéaire), on écrit des majorations

  $$\forall x \in E,\ \ \|u(x)\|_F \leqslant \cdots = \cdots \leqslant \cdots = \cdots \leqslant k\|x\|_E$$

  en effectuant des majorations les plus fines possibles et en distinguant clairement les majorations et les égalités, afin de pouvoir traiter plus facilement les cas d'égalité.
  Soit on trouve au moins un cas d'égalité, c'est-à-dire un $x \in E$ tel que $\|u(x)\|_F = k\|x\|_E$, alors $k = |||u|||$ (et le $\sup$ est en fait un $\max$).
  S'il n'y a pas de cas d'égalité, on cherche une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (E \setminus \{0_E\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{\|u(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \to k$ et alors $k = |||u|||$ (car le $\sup$ est le seul majorant limite d'une suite de l'ensemble).
- Pour montrer qu'une partie est compacte :
  - Si on est en dimension finie, on montre souvent qu'elle est fermée et bornée.
  - On peut aussi montrer qu'il s'agit de l'image d'un compact par une fonction continue.
  - Autre possibilité : un produit d'un nombre fini de compacts.
  - Si rien de tout cela fonctionne, revenir à la définition.
- Usage courant de la compacité : démonstration par l'absurde, permettant d'obtenir une suite de laquelle on extrait une suite convergente, etc. (exemple : preuve du théorème de Heine.)
- Parfois, on est amené à utiliser un résultat « type compacité » comme par exemple un minimum ou un maximum atteint par une fonction f, mais on n'est pas sur un compact. L'idée est alors de traiter séparément l'étude des points « loin » ie hors d'une certaine boule, et ceux de la boule (fermée et donc compacte en dimension finie) pour conclure...
- **Très intéressant** : Pour qu'une suite à valeur dans un compact converge, il suffit qu'elle ait une unique valeur d'adhérence.
  C'est en particulier le cas d'une suite réelle ou complexe bornée...
- Pour démontrer qu'un ensemble est connexe par arcs, on revient à la définition ou on le fait apparaître comme image continue d'un ensemble connexe par arcs. On peut aussi reconnaître une partie étoilée voire convexe.
- Pour montrer qu'un ensemble n'est pas connexe par arcs, on peut trouver une application continue qui ne l'envoie pas sur un connexe par arcs (de $\mathbb{R}$ par exemple : pas un intervalle).
- L'utilisation la plus fréquente de la connexité par arcs est celle du théorème des valeurs intermédiaires. Si on croit reconnaître dans une question une utilisation du théorème des valeurs intermédiaires et si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle, on regarde si cet ensemble de départ ne serait pas par hasard connexe par arcs.

Vrai ou faux

1. S'il existe une suite (u_n) convergeant vers a telle que $f(u_n) \to \ell$, alors f admet ℓ comme limite en a.
2. Pour que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to F$ admette une limite en $(0,0)$, il suffit que les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ convergent vers la même limite.
3. Toute application continue est uniformément continue.
4. Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
5. Une application linéaire est toujours continue.

1. Exercices cherchés en cours

1 Étudier les limites en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ et $g : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{|x-y|}$.

2 Étudier la continuité de $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^2}{|x|+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3 Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

4 CCINP 1

5 CCINP 35

6 CCINP 36

7 CCINP 54

8 Montrer qu'une norme est 1-lipschitzienne.

9
1. Montrer que $\varphi : f \in (\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C}), N_\infty) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est continue. Est-ce encore le cas avec la norme N_1 de la convergence en moyenne ?
2. Montrer que $f \in (\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}), N_1) \mapsto f(0) \in (\mathbb{C}, |\cdot|)$ est non continue.

10 CCINP 38

11 CCINP 13

12 Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.
1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) ℓ est valeur d'adhérence de u.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ est infini.
   (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ n'est pas vide.
2. Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est fermé.

13 Montrer que la sphère unité de $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |p_k|$ n'est pas compacte.

On pourra utiliser la suite $(X^n)_n$.

14 **Oral Mines** Montrer que la boule unité fermée de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte.

Topologie Matricielle

15 Montrer que $\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

16 Montrer que $M \mapsto \mathrm{Com}(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

17 Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est ouvert.

18 Montrer de deux manières différentes que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En déduire que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

19 Montrer que les ensembles de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures, symétriques et de trace nulle respectivement sont fermés.

20 **Trèèèèès classique** Montrer que $\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\intercal M = I_n\}$ est compact.

21 Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

22 L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il dense ?
On pourra considérer l'application qui à une matrice 2×2 associe le discriminant de son polynôme caractéristique.

23 Montrer que l'ensemble des matrice de rang $p \in [\![1, n-1]\!]$ n'est ni ouvert ni fermé. Étudier les cas $p = 0$ et $p = n$.

24 Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ associe son inverse est continue.

25 Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe son polynôme minimal et que l'application rang ne sont pas continue.

26 Donner le cœfficient de degré 1 de χ_A en fonction de la trace et de la comatrice de A.
On suggère de commencer par supposer A inversible et d'exprimer χ_A en fonction de $\chi_{A^{-1}}$.

27 Étudier la connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

28 Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

2. Limites et continuité

29 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Calculer les limites éventuelles en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x+y} \qquad h : (x,y) \mapsto \frac{1-\cos(xy)}{y^2} \qquad j : (x,y) \mapsto \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$$

$$g : (x,y) \mapsto \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \qquad i : (x,y) \mapsto \frac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y} \qquad k : (x,y) \mapsto \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y}$$

30 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier les prolongements par continuité des fonctions suivantes

$$f : (x,y) \mapsto \frac{\cos x - \cos y}{x-y} \qquad g : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x}$$

31 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Étudier la continuité sur leur domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^3y + x^2y^2}}{x-y} & \text{si } x \neq y, \\ |x| & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 1+x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

32 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

33 Soir $f : E \to E$ telle que $f(x) = x$ si $\|x\| < 1$ et $\dfrac{x}{\|x\|}$ sinon.

Montrer que f est 2-lipschitzienne.

3. Continuité des applications linéaires, normes subordonnées

34 **Un exemple de norme subordonnée**

On note $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\ell^\infty(\mathbb{C})$, on pose $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{C})$.
3. Montrer que l'application Δ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. Calculer la norme de Δ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

35 Soit u l'application de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ définie par $u(f) = f(1)$.

1. Démontrer que u n'est pas continue si l'on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_1.
2. L'application u est-elle continue si l'on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme N_∞ ?

36 Normes subordonnées matricielles

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on note N sa norme subordonnée.

   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on note N sa norme subordonnée.

   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$.

4. Continuité et topologie

37

Montrer que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}\,A\,\mathrm{Com}\,B$.

38

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ n'est ni ouvert ni fermé.
2. En utilisant par exemple l'application

$$\phi : M \mapsto (\mathrm{tr}\,M)^2 - 4\det M,$$

   déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.

39 Autour de la distance à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Pour A partie de non vide de E et $x \in E$, on pose $\mathrm{d}(x, A) = \inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$.

1. Rappeler pourquoi $\mathrm{d}(x, A)$ est bien définie et $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est continue.
2. Montrer que $\mathrm{d}(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $A_n = \left\{x \in E,\ \mathrm{d}(x, A) < \dfrac{1}{n}\right\}$.
   (a) Montrer que A_n est ouvert.
   (b) Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \overline{A}$.
   (c) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable (ie indexée par des entiers) d'ouverts.
   (d) Montrer que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.
4. **Cas où la distance à un fermé est convexe**
   On suppose que F est une partie non vide fermée de E et que $x \mapsto d(x, F)$ est convexe, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0,1]$, $\mathrm{d}(tx + (1-t)y, F) \leqslant t\,\mathrm{d}(x, F) + (1-t)\mathrm{d}(y, F)$.
   Prouver que F est convexe.
5. **Tout espace vectoriel normé est séparé et normal** On suppose que F_1 et F_2 sont des fermés non vides disjoints de E.
   (a) E est **séparé**[1] : c'est le cas où F_1 et F_2 sont des singletons. Si $x_1 \neq x_2$, montrer qu'on peut trouver des ouverts U, V disjoints de E tels que $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$.
   (b) Montrer qu'il existe une application continue $f : E \to [0,1]$ telle que $F_1 = f^{(-1)}(\{1\})$ et $F_2 = f^{(-1)}(\{0\})$.
   On pourra construire une telle application à partir d'un quotient faisant intervenir les applications $x \mapsto \mathrm{d}(x, F_1)$ et $x \mapsto \mathrm{d}(x, F_2)$.
   (c) E est **normal** : Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $F_1 \subset U$ et $F_2 \subset V$.
   On pourra introduire $\varphi : x \mapsto \mathrm{d}(x, F_1) - \mathrm{d}(x, F_2)$.

1. C'est cet axiome qui garantit l'unicité de la limite.

40

Soit φ une forme linéaire sur un espace vectoriel normé E. On veut démontrer que φ est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est fermé.

1. Montrer le sens direct.
2. Réciproquement, on suppose $\mathrm{Ker}\,\varphi$ fermé et φ non nulle.
   Fixons $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. On note $\delta = \mathrm{d}(x_0, \mathrm{Ker}\,\varphi)$. Montrer que $\delta > 0$ puis que pour tout $y \in E$

$$|\varphi(y)| \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\delta}\|y\|$$

   puis conclure.

5. Compacité

41

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E.

1. Soit F une partie fermée de E quelconque. Montrer que $F + K$ est fermé.
2. On suppose que $0_E \notin K$. Montrer que $F = \{\lambda \cdot x,\ \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in K\}$ est fermé.

42 Écrits Mines

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{AQ, Q \in \mathscr{O}(n)\}$ est compact.

43

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ des points de E, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

On appelle **enveloppe convexe** de A l'ensemble des barycentres de ses points à coefficients positifs, c'est-à-dire des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme égale à 1 d'éléments de A. Notons-la $\mathrm{Conv}(A)$. Il s'agit du plus petit convexe contenant A.

1. Montrer que $K = \left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\right\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.

44 Diamètre d'une partie bornée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E.

1. Justifier l'existence de $D = \sup\left\{\|x-y\|,\ (x, y) \in A^2\right\}$. On dit que D est le diamètre de A.
2. Démontrer que si A est compacte, alors il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $D = \|a-b\|$.
3. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le diamètre de la boule ouverte de centre a et de rayon r.

45

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que f atteint sur E un minimum global.

46 Un théorème de point fixe (classique d'oral)

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y)\in K,\quad x\neq y \Rightarrow \left\|f(x)-f(y)\right\| < \left\|x-y\right\|.$$

1. (a) Montrer que f admet au plus un point fixe dans K.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe dans K, que l'on notera a.
   On pourra étudier sur K la fonction $\varphi : x \mapsto \left\|f(x)-x\right\|$.
2. Soit $(x_n)_n$ une suite définie par $x_0\in K$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=f(x_n)$.
   Démontrer que $(x_n)_n$ converge vers a.
   On s'intéressera à $\|x_n-a\|$ et on séparera deux cas suivant s'il existe n tel que $x_n=a$ ou non.

47 Distance d'une fonction continue à $\mathbb{R}_n[x]$

Soit $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $n\in\mathbb{N}$, F_n le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus n, $f\in E$.

Montrer que la distance de f à F_n est atteinte : on a une fonction polynomiale $\phi_n\in F_n$ telle que

$$\left\|f-\phi_n\right\|_\infty = \mathrm{d}(f,F_n)=\inf_{\phi\in F_n}\left\|f-\phi\right\|_\infty$$

On peut montrer que ϕ_n est unique : on parle de **polynôme de meilleure approximation uniforme**.

48 Distance à un compact ; à un fermé

Soit $E=\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et A une partie non vide de E. On rappelle la définition de la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $\mathrm{d}(x_0,A)$, par la formule $\mathrm{d}(x_0,A)=\inf\limits_{x\in A}\|x-x_0\|$.

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0\in E$, il existe $y\in A$ tel que $\mathrm{d}(x_0,A)=\left\|y-x_0\right\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé.
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $\mathrm{d}(x_0,A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta>0$ telle que $\forall (a,b)\in A\times B,\quad \|a-b\|\geqslant\delta$.
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

49 Oral Centrale

Soient A,B deux parties d'un espace vectoriel normé E. On définit

$$A+B=\{a+b,\ (a,b)\in A\times B\}.$$

1. Montrer que si A est ouvert, $A+B$ l'est.
2. Montrer que si A est compacte et B est fermée, $A+B$ est fermée.
3. Montrer que si A et B sont compactes, $A+B$ l'est.
4. Trouver A et B fermées telles que $A+B$ ne le soit pas.

6. Connexité par arcs

50

Montrer que l'union de deux connexes par arcs non disjoints est connexe par arcs.

51

Démontrer qu'un cercle et qu'un segment ne peuvent pas être homéomorphes : il n'existe pas de bijection f entre les deux telle que f et f^{-1} soient continues.

52 Théorème de Darboux

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I\to R$ une application dérivable.
Notons $A=\left\{(x,y)\in I\times I, x<y\right\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y)\in A$, posons $g(x,y)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Démontrer que $g(A)\subset f'(I)\subset\overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle, autrement dit, f' a la propriété des valeurs intermédiaire.

53 Oral X ? Pas si difficile !

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $p\in\mathscr{C}([0,1],\mathscr{L}(E))$.
On suppose que pour tout $t\in[0,1]$, $p(t)$ est un projecteur.
Démontrer que tous les endomorphismes $p(t)$ ont même rang.

54

Soient A et B deux parties fermées d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose $A\cup B$ et $A\cap B$ connexes par arcs, montrer que A et B sont connexes par arcs.

Indication : à partir d'un chemin continu φ reliant $a,a'\in A$ dans $A\cup B$, considérer l'inf et le sup des $t\in[0,1]$ pour lesquels $\varphi(t)\in B$.