Exercices cherchés en cours

1 **CCINP 37** On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) ~~Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.~~
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Solution de 1 : CCINP 37

1. (a) Prouvons que N_∞ est une norme sur E.
   $\forall f \in E$, $|f|$ est positive et continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée et donc $N_\infty(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_\infty(f) = 0$.
   Alors, $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| = 0$, donc $f = 0$.
   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.

   Si $\lambda = 0$ alors $N_\infty(\lambda f) = 0 = |\lambda| N_\infty(f)$.
   Si $\lambda \neq 0$:
   $\forall t \in [0,1]$, $|\lambda f(t)| = |\lambda||f(t)| \leqslant |\lambda| N_\infty(f)$.
   Donc $N_\infty(\lambda f) \leqslant |\lambda| N_\infty(f)$. (1)
   $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| = \dfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(t)| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$.
   Donc $N_\infty(f) \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$.
   C'est-à-dire, $|\lambda| N_\infty(f) \leqslant N_\infty(\lambda f)$. (2)
   Donc, d'après (1) et (2), $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$.
   iii) Soit $(f,g) \in E^2$.
   $\forall t \in [0,1]$, $|(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
   Donc $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
   On en déduit que N_∞ est une norme.

   Prouvons que N_1 est une norme sur E.

   $\forall f \in E$, $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc $N_1(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$.
   Or $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc $|f|$ est nulle.
   C'est-à-dire $f = 0$.
   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.

   $$N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |\lambda| N_1(f).$$

iii) Soit $(f,g)\in E^2$.
$\forall t\in[0,1]$, $|(f+g)(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|$. Donc, par linéarité de l'intégrale, $N_1(f+g)\leqslant N_1(f)+N_1(g)$.
On en déduit que N_1 est une norme sur E.

(b) $k=1$ convient car, $\forall f\in E$, $\displaystyle\int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 N_\infty(f)\mathrm{d}t = N_\infty(f)$.

(c) L'application identité de E, muni de la norme N_∞, vers E, muni de la norme N_1, est continue car linéaire et vérifiant $\forall f\in E$, $N_1(f)\leqslant kN_\infty(f)$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit que :
un ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
On peut aussi raisonner de façon plus élémentaire par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

2. Pour $f_n(t)=t^n$, on a $N_1(f_n)=\dfrac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n)=1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)}=+\infty$.
Donc ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

2 CCINP 34 Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x\in\overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in A$ et $x_n\to x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soit B une autre partie non vide de E.
   Montrer que $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

Solution de 2 : CCINP 34

1. Soit A une partie non vide de E.
   $\mathscr{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a.
   $\forall r>0$, $B_0(a,r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r.
   Soit $a\in A$.

   $a\in\bar{A} \Longleftrightarrow \forall V\in\mathscr{V}(a),\ V\cap A\neq\varnothing$.
   Ou encore :
   $a\in\bar{A} \Longleftrightarrow \forall r>0,\ B_0(a,r)\cap A\neq\varnothing$.

2. Soit $x\in\overline{A}$.
   Prouvons que $\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in A$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=x$.
   Par hypothèse, $\forall r>0$, $B_0(a,r)\cap A\neq\varnothing$.
   Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $B_0(x,\dfrac{1}{n})\cap A\neq\varnothing$.
   C'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists\, x_n\in B_0(x,\dfrac{1}{n})\cap A$.
   On fixe alors, pour tout entier naturel n non nul, un tel x_n.
   Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans A et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $||x_n-x||<\dfrac{1}{n}$.
   C'est-à-dire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.
   Soit $x\in E$. On suppose que $\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in A$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=x$.

Prouvons que $x \in \bar{A}$.
Soit $V \in \mathscr{V}(x)$. Alors, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B_0(x,\varepsilon) \subset V$.
On fixe un tel ε strictement positif.
$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$.
On fixe un tel entier N.
Donc, comme (x_n) est à valeurs dans A, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in B_0(x,\varepsilon) \cap A$.
Or $B_0(x,\varepsilon) \subset V$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in V \cap A$, c'est-à-dire $V \cap A \neq \varnothing$.
On peut en conclure que $x \in \bar{A}$.

3. $\bar{A} \subset E$ et $0_E \in \bar{A}$ car $0_E \in A$ et $A \subset \bar{A}$.
Soit $(x, y) \in \left(\bar{A}\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
D'après 1., Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A convergeant respectivement vers x et y.
On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(x_n + \lambda y_n\right) = x + \lambda y$.
Or A est un sous-espace vectoriel de E et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in A^2$, donc $x_n + \lambda y_n \in A$.
On en déduit que la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans A et converge vers $x + \lambda y$.
On a bien $x + \lambda y \in \bar{A}$.

4. On suppose que A, B parties non vides convexe de E.
Si $(a, b) \in \overline{A \times B}$ ssi on a une suite $((a_n, b_n))_n \in A \times B^{\mathbb{N}}$ telle que $(a_n, b_n) \to (a, b)$ ssi on a des suites $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_n \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \to a$ et $b_n \to b$ ssi $(a, b) \in \overline{A} \times \overline{B}$.

3 **CCINP 44** Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Solution de 3 : CCINP 44

Soit E un espace vectoriel normé. On note A et B deux parties non vides de E.

1. (a) $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x.
   (b) On suppose $A \subset B$. Prouvons que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.
   Or $A \subset B$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.
   Donc $x \in \overline{B}$.
2. D'après la question précédente,
   $A \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.
   $B \subset A \cup B$, donc $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Prouvons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A \cup B}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.
   On considère les ensembles $A_1 = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \in A\}$ et $A_2 = \{n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \in B\}$.
   Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$, A_1 ou A_2 est de cardinal infini.

On peut donc extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A ou une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Remarque :On peut aussi prouver que $\overline{A\cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ sans utiliser les suites :

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermés, donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$. Or $\overline{A\cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, donc $\overline{A\cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. (a) D'après la question 1. ,
   $A \cap B \subset A$, donc $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}$.
   $A \cap B \subset B$, donc $\overline{A\cap B} \subset \overline{B}$.
   Donc $\overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Autre méthode :

   Comme $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ alors $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Comme $\overline{A}\cap\overline{B}$ est un fermé contenant $A\cap B$, alors par minimalité de $\overline{A\cap B}$, on a $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$.

   (b) $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$.
   $\overline{A\cap B} = \varnothing$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

4 CCINP 45 **Les questions 1. et 2. sont indépendantes.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$.

   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x,y) \in E^2, \forall t \in [0,1], d_A(tx+(1-t)y) \leqslant t\,d_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

Solution de 4 : CCINP 45

1. (a) Soit A une partie d'un ensemble E.
   $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   (b) On suppose que A est une partie non vide et convexe de E. Prouvons que $\overline{A}$ est convexe.
   Soit $(x,y) \in \left(\overline{A}\right)^2$. Soit $t \in [0,1]$.
   Prouvons que $z = tx + (1-t)y \in \overline{A}$.
   $x \in \overline{A}$ donc, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   $y \in \overline{A}$ donc, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$.
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = t x_n + (1-t) y_n$.
   $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A,\ y_n \in A$ et A est convexe, donc $z_n \in A$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$.
   Donc z est limite d'une suite à valeurs dans A, c'est-à-dire $z \in \overline{A}$.
2. (a) Soit A une partie non vide de E. Soit $x \in E$ tel que $d_A(x) = 0$.
   Par définition de la borne inférieure, nous avons : $\forall \epsilon > 0, \exists\, a \in A$ tel que $\|x - a\| < \epsilon$.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, il existe $a_n \in A$ tel que $\|x - a_n\| < \frac{1}{n}$.
   Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite est à valeurs dans A et converge vers x, donc $x \in \overline{A}$.

(b) On suppose que A est fermée et que, $\forall (x,y)\in E^2$, $\forall t\in[0,1]$, $d_A(tx+(1-t)y)\leqslant t\,d_A(x)+(1-t)d_A(y)$.
Soit $(x,y)\in(A)^2$. Soit $t\in[0,1]$.
Prouvons que $z=tx+(1-t)y\in A$.
Par hypothèse, on a $d_A(z)\leqslant t\,d_A(x)+(1-t)d_A(y)$. (1)
Or $x\in A$ et $y\in A$, donc $d_A(x)=d_A(y)=0$ et donc, d'après (1), $d_A(z)=0$.
Alors, d'après 2.(a), $z\in\overline{A}$. Or A est fermée, donc $\overline{A}=A$ et donc $z\in A$.

Normes

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ tels que $a_0,a_1,\dots,a_n$ sont deux à deux distincts.
Pour tout $P\in\mathbb{K}_n[X]$, on pose $\|P\|=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}|P(a_k)|$.
Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

6 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$. Montrer que cela définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7 Soit l'espace vectoriel $E=\left\{f\in\mathscr{C}^1([0,1],R),\ f(0)=0\right\}$.
Pour toute fonction $f\in E$, on pose $\left\|f\right\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|$ et $\left\|f\right\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right|$.

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute fonction $f\in E$, $\left\|f\right\|_\infty\leqslant\left\|f\right\|$.
3. Démontrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

8 **Ex CCINP 38**

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On pose $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $N_1(P)=\sum\limits_{i=0}^{n}|a_i|$ et $N_\infty(P)=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|$ où $P=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iX^i$ avec $n\geqslant\deg P$.

1. (a) Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

Solution de 8 : Ex CCINP 38

1. (a) On pose $E=\mathbb{R}[X]$.
Montrons que N_∞ est une norme sur E.
Par définition, $N_\infty(P)\geqslant 0$.

i) Soit $P=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E$ tel que $N_\infty(P)=0$.
C'est-à-dire $\max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|=0$, donc, $\forall\, i\in[\![0,n]\!]$, $|a_i|=0$.
On en déduit que $P=0$.
ii) Soit $P=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
$N_\infty(\lambda P)=\max_{0\leqslant i\leqslant n} |\lambda|\,|a_i|=|\lambda| N_\infty(P)$.
iii) Soit $(P,Q)\in E^2$.
On considère un entier n tel que $n\geqslant \max(\deg P,\deg Q)$.
Alors, $P=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q=\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$.
Ainsi, $P+Q=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)X^i$ et $N_\infty(P+Q)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i+b_i|$.
Or, $\forall\, i\in[\![0,n]\!]$, $|a_i+b_i|\leqslant |a_i|+|b_i|\leqslant N_\infty(P)+N_\infty(Q)$.
Donc, $N_\infty(P+Q)\leqslant N_\infty(P)+N_\infty(Q)$.
On en déduit que N_∞ est une norme.

(b) L'application identité de $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme N_1, vers $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme N_∞, est continue car linéaire et vérifiant, $\forall P\in\mathbb{R}[X], N_\infty(P)\leqslant N_1(P)$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit qu'un ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
On peut aussi raisonner, de façon plus élémentaire, par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

(c) Pour $P_n=1+X+X^2+\dots+X^n$ on a $N_1(P_n)=n+1$ et $N_\infty(P_n)=1$.
Donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{N_1(P_n)}{N_\infty(P_n)}=+\infty$.
On en déduit que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, en particulier N_1' et N_∞'.

9 Montrer que tout parallélogramme non aplati centré à l'origine est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de 9 :

Les côtés d'un tel parallélogramme ont des équations de la forme

$$\begin{aligned} ax+by&=1\\ ax+by&=-1\\ cx+dy&=1\\ cx+dy&=-1\end{aligned}$$

vu la symétrie et le fait que le parallélogramme ne soit pas aplatie, avec $(a,b)\neq(0,0)$ et $(c,d)\neq 0$ et avec $\begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix}\neq 0$ car les côtés sont sécants.

On démontre alors facilement que $N:(x,y)\mapsto \max(|ax+by|,|cx+dy|)$ est une norme répondant au problème.

10 Soit N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y)=\sup_{t\in[0,1]}|x+ty|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme et dessiner sa boule unité.

11 Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x\in E$ tels que $N(x)\leqslant 1$ est un convexe de E).

Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y.

Solution de 11 :

Le sens direct, c'est du cours.

Réciproquement, si $N:E\to\mathbb{R}$ est défini-positive, homogène et que sa boule unité fermée est convexe, soit $x,y\in E$.

Si $x=0_E$ ou $y=0_E$, l'inégalité triangulaire est immédiate.

Sinon, on s'intéresse à $(1-t)\dfrac{x}{N(x)}+t\dfrac{y}{N(y)}\in B'(0_E,1)$ pour $t=\dfrac{N(y)}{N(x)+N(y)}$ et on obtient $\dfrac{N(x+y)}{N(x)+N(y)}\leqslant 1$ (sans oublier que l'on ne sait pas encore que N est une norme mais le fait qu'elle soit défini-positive et homogène permet de justifier les calculs.)

12 Soit $E=\mathscr{C}([0,1],R)$ et $\varphi\in E$ une fonction telle que pour tout $x\in]0,1[$, $\varphi(x)>0$. Pour toute fonction $f\in E$, on pose $N(f)=\displaystyle\int_0^1\varphi(t)|f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que N est dominée par N_∞.
3. Démontrer que les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

13 Montrer que toute norme est 1-lipschitzienne.

14 Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $p,q\in]1,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Soient $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ et $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$. On note $\alpha=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n|x_k|^p\right)^{1/p}$ et $\beta=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n|y_k|^q\right)^{1/q}$.

1. Montrer que si $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$, $ab\leqslant\dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q$.
2. On veut en déduire l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{K}^n$ $\displaystyle\sum_{k=1}^n|x_ky_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n|y_k|^q\right)^{1/q}$.

   Commencer par la démontrer en supposant $\|x\|_p=\sqrt[p]{\displaystyle\sum_{k=1}^n|x_k|^p}=1$ et $\|y\|_q=\sqrt[q]{\displaystyle\sum_{k=1}^n|x_k|^q}=1$, puis, dans le cas général, en normalisant les vecteurs (c'est-à-dire en les divisant par $\|x\|_p$ et $\|y\|_q$,

respectivement (Attention : on ne sait pas encore que ce sont des normes) lorsque c'est possible.)
Quelle inégalité classique retrouve-t-on en particulier ?

3. En remarquant que $\sum_{k=1}^{n}\left|x_k+y_k\right|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k|\left|x_k+y_k\right|^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|\left|x_k+y_k\right|^{p-1}$, en déduire l'inégalité de Minkowski $\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k+y_k\right|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^p\right)^{1/p}$.
4. Montrer que $\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer la limite de $\|x\|_p$ lorsque $p \to +\infty$.

Remarque : On peut faire le même travail et obtenir des résultats similaires avec des intégrales de fonctions continues sur un segment $[a,b]$.

Solution de 14 : Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$

1. Concavité de $\ln$.
2. Appliquer la première question à $\frac{|x_k|}{\alpha}$ et $\frac{|y_k|}{\beta}$ et sommer, puis remplacer α et β.
3. Utiliser deux fois la question précédente dans l'indication.
4. Seule l'IT est difficile mais c'est la question précédente.
5. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty$.

15 Retrouver le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire d'une norme euclidienne (inégalité de Minkowski). En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas euclidienne.

Topologie

$(E,\|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Vrai ou faux

1. Un voisinage d'un point est toujours borné.
2. Une partie qui n'est pas ouverte est fermée.
3. Une intersection d'ouverts est ouverte.
4. L'adhérence d'une partie est toujours fermée.
5. Si un fermé contient une partie, il contient son adhérence.
6. Si une partie A est fermée, toute suite d'élément de A converge dans A.
7. Un point n'est pas intérieur à A si et seulement s'il est adhérent au complémentaire de A.

Ouverts, fermés

16 Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$, $\bigcap_{n\geqslant 1}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$.

17 Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $\mathscr{H}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy=1\}$ est fermée.

18 Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

- $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<|x-1|<1\}$
- $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqslant x\leqslant y\}$
- $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|<1,\ |y|\leqslant 1\}$
- $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{Q}\ \text{et}\ y\in\mathbb{Q}\}$
- $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\notin\mathbb{Q}\ \text{ou}\ y\notin\mathbb{Q}\}$
- $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<4\}$

19 Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E ouvert. Montrer que $F=E$.

20 Soit E un espace vectoriel normé, F, G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, p,q les projections associées à la somme directe $F\oplus G$ et A une partie de E.
Montrer que si A est ouverte, $p(A)$ est un ouvert (relatif) de F et $q(A)$ est un ouvert de G.
En est-il de même pour une partie fermée ?

21

1. Soit $P=X^3+aX^2+bX+c$ un polynôme réel. Vérifier que les racines ξ de P satisfont
$$|\xi|\leqslant\max\{1,|a|+|b|+|c|\}.$$
2. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P=X^3+aX^2+bX+c$ soit scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$

Solution de 21 :

1. Si ξ est racine de P alors
$$\xi^3=-a\xi^2-b\xi-c$$
Cas : $|\xi|\leqslant 1$. L'inégalité voulue est vérifiée. Cas : $|\xi|>1$. On vérifie $1\leqslant|\xi|^2$ et $|\xi|\leqslant|\xi|^2$. On a alors
$$\begin{aligned}|\xi|^3=\left|a\xi^2+b\xi+c\right|&\leqslant|a||\xi|^2|b||\xi|+|c|\\&\leqslant|a||\xi|^2+|b||\xi|^2+|c||\xi|^2.\end{aligned}$$
En simplifiant par $|\xi|^2$,
$$|\xi|\leqslant|a|+|b|+|c|$$
et l'inégalité voulue est à nouveau vérifiée.

2. Soit $(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $\mathscr{D}$ et notons (a,b,c) sa limite. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons x_n, y_n et z_n les trois racines réelles du polynôme $P_n = X^3 + a_nX^2 + b_nX + c_n$ que l'on sait scindé sur $\mathbb{R}$.
La suite $(a_n, b_n, c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente et la suite $\left(x_n, y_n, z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est donc aussi en vertu du résultat de la première question. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $\left(x_{\varphi(k)}, y_{\varphi(k)}, z_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Notons (x,y,z) la limite de celle-ci. Par les relations coefficients/racines d'un polynôme scindé, on sait

$$\begin{cases} a_n = -\left(x_n + y_n + z_n\right) \\ b_n = x_n y_n + y_n z_n + z_n x_n \\ c_n = -x_n y_n z_n \end{cases}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Cela vaut en particulier pour $n = \varphi(k)$ et en faisant alors tendre k vers l'infini, il vient

$$\begin{cases} a = -(x+y+z) \\ b = xy + yz + zx \\ c = -xyz \end{cases}$$

Par ce système, on peut affirmer que les réels x, y et z sont les trois racines du polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$ qui est donc scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $(a,b,c)\in\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ est donc une partie fermée car contient les limites de ses suites convergentes.

22 On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées.
2. $\ell^\infty(\mathbb{R})$ étant normé par $\|\cdot\|_\infty$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie ouverte ? une partie fermée ?

Solution de 22 :

(a) Les éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sont bornés donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\subset\mathscr{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. L'appartenance de l'élément nul et la stabilité par combinaison linéaire sont immédiates.

(b) Si $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est ouvert alors puisque $0\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ il existe $\alpha>0$ tel que $B_\infty(0,\alpha)\subset\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Or la suite constante égale à $\alpha/2$ appartient à $B_\infty(0,\alpha)$ et n'est pas nulle à partir d'un certain rang donc $B_\infty(0,\alpha)\not\subset\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas ouvert.

Pour $N\in\mathbb{N}$, posons u^N définie par $u_n^N = \frac{1}{n+1}$ si $n\leqslant N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
$\left(u^N\right)\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $u^N\to u$ avec u donné par $u_n = \frac{1}{n+1}$. En effet,

$$\left\|u^N - u\right\|_\infty = \frac{1}{N+2}\to 0.$$

Mais $u\notin\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas fermé

Adhérence, intérieur

23 Montrer que $\mathring{A}^c = \overline{A^c}$ et $\overline{A}^c = \mathring{\widehat{A^c}}$

24 Montrer que si A et B sont des parties de E telles que A est ouverte, alors $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$ et que $AapB = \varnothing \Longrightarrow A\cap\overline{B} = \varnothing$.

25 Si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup A$ est l'unique majorant de A adhérent à A.

26 Si A et B sont deux parties de E, montrer que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$, $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subset\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$ et donner des contre-exemples pour les inclusions réciproques.

27 Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}$.

28 Soit F sous-espace vectoriel normé de E. Montrer que soit $F=E$ soit $\mathring{F}=\varnothing$.

29 Soit A une partie de E. Comparer par inclusion les parties A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$. Peut-on créer d'autres combinaison ?

Calculer tous ces ensembles pour $A=\{0\}\cup[1,2[\cup]2,3]\cup(\mathbb{Q}\cap[4,5])$.

30 **Frontière**

1. Comparer $\operatorname{Fr} A$ et $\operatorname{Fr} A^c$.
2. Montrer que $\operatorname{Fr} A\cup B\subset\operatorname{Fr} A\cup\operatorname{Fr} B$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $\operatorname{Fr}\overline{A}\subset\operatorname{Fr} A$ et $\operatorname{Fr}\mathring{A}\subset\operatorname{Fr} A$. Ces inclusions sont-elles des égalités ?
4. Montrer que si A est fermée, alors $\operatorname{Fr}(\operatorname{Fr} A)=\operatorname{Fr} A$.

Densité

31 Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution de 31 :

Déjà vu : perturber les cœfficient diagonaux de J_r dans l'écriture $A=PJ_rQ$ ou bien remarquer que pour k suffisamment grand, $A-\frac{1}{k}I_n$ est inversible.

32 Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ dont soit denses, soit discrets (de la forme $a\mathbb{Z}$ pour $a\in\mathbb{R}$.) Applications :

1. Soit b un entier au moins égal à 2. Montrer que $\left\{\frac{a}{b^k},\ (a,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soient $a,b\in\mathbb{R}^*$. On note $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\{ap+bq\mid p,q\in\mathbb{Z}\}$.
   Montrer que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$.
3. Montrer qu'entre π et $\pi+10^{-9}$, il y a un réel de la forme $p+q\sqrt{2}$ où $p,q\in\mathbb{Z}$.

Solution de 32 :

Déjà vu : introduire $\alpha=\in G\cap\mathbb{R}_*^+$ lorsqu'il existe et séparer les cas où $\alpha=0$ (dense, semblable à la densité de $\mathbb{Q}$) ou $\alpha>0$ (discret, avec une presque division euclidienne, semblable aux sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ ou aux idéaux de $(\mathbb{K}[X],+)$).

Applications :

1. **Densité de $\left\{\frac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\}$** :

   Soit b un entier au moins égal à 2. On note $G = \left\{\dfrac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\}$. On a bien sûr $G \neq \varnothing$ et $G \neq \{0\}$.
   De plus, si x et y sont des éléments de G, on a $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{b^k}$ et $y = \frac{a'}{b^{k'}}$.
   Mais alors $x - y = \frac{a b^{k'} - a' b^k}{b^{k+k'}}$ avec $a b^{k'} - a' b^k \in \mathbb{Z}$ et $k + k' \in \mathbb{N}$, donc $x - y \in G$.
   De plus, comme 0 minore $G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{b^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ (car $b > 1$) avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{b^k} \in G$,

   $$\alpha = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) = 0.$$

   C'est donc que $\boxed{\left\{\dfrac{a}{b^k} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

   Remarque : cette densité se retrouve directement en remarquant que la suite de terme général $x_n = \dfrac{\lfloor b^n x \rfloor}{b^n}$ élément de G converge vers $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

2. **CNS pour que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$** :
   Soit $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. On vérifie sans mal que G n'est ni vide, ni réduit à 0 et que la différence de deux éléments de G est encore dans G.
   Remarquons que dire que

   « $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ »

   c'est dire que

   « $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. »

   - Si $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, alors, d'après ce qui précède, $G = \alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$. Donc, comme $a \in G$ et $b \in G$, on a deux entiers k et k' (non nuls car a et b sont non nuls) tels que $a = \alpha k$ et $b = \alpha k'$.
     Alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k'}{k} \in \mathbb{Q}$.
   - Réciproquement, si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, soient n et m deux entiers tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{n}{m}$.
     Pour tout $x \in G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, on a $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $x = ap + bq$. Mais alors

     $$x = b\frac{n}{m}p + bq = \frac{b}{m}(np + mq) \in \frac{b}{m}\mathbb{Z}.$$

     Ainsi, $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset \dfrac{b}{m}\mathbb{Z}$. Mais alors G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car on ne peut pas, par exemple, trouver d'élément de G entre $\dfrac{b}{3m}$ et $\dfrac{b}{2m}$.
     (On peut aussi voir que $\inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right) \geqslant \dfrac{b}{m} > 0$.)
     (*Remarque : le théorème de Bézout permet de dire que si la fraction $\dfrac{n}{m}$ est irréductible,* $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \dfrac{b}{m}\mathbb{Z}\left(= \dfrac{a}{n}\mathbb{Z}\right)$.)

   Conclusion : $\boxed{a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}.}$

3. **Autre application** :

D'après la question précédente, comme $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Donc entre π et $\pi + 10^{-9}$, il y a un réel de la forme $p + q\sqrt{2}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$.

33 Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé est soit fermé, soit dense.

Solution de 33 :

Supposons H hyperplan non fermé. On a alors une suite $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x \notin H$. Mais comme H est un hyperplan, $H \oplus \mathbb{K}x = E$.

Soit $y \in E$. Il s'écrit $y = h + \lambda x$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Mais alors $(h + \lambda x_n)_n$ est une suite d'éléments de H qui converge vers y donc H est dense dans E.

Remarque : en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé comme noyau d'une forme linéaire, qui est automatiquement continue.

Autre rédaction possible : Sachant que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel en est un (ce résultat n'apparaît pas dans le programme, mais c'est facile à remontrer avec la caractérisation séquentielle) , on a $\overline{H}$ un sous-espace de E tel que $H \subset \overline{H} \subset E$. Or, si $\overline{H} \neq H$, on a $x \in \overline{H} \setminus H$ et alors par propriété des hyperplans, $H \oplus \mathbb{K}x = E$ avec $H \subset \overline{H}$ et $x \in \overline{H}$ donc (c'est là qu'on utilise le fait que $\overline{H}$ est un sous-espace) $E = H \oplus \mathbb{K}x \subset \overline{H} \subset E$ donc $H = E$.

34 Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $U \cap V$ est dense.