Partie I

1°) Posons $u_n = h\varphi(nh)$, $v_n = \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, $U_n = u_1 + \cdots + u_n$ et $V_n = v_1 + \cdots + v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. On note aussi $S(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$.

a) $V_n = \int_0^{nh} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, la série $\sum v_n$ converge et a pour somme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Comme φ est décroissante, $u_n \leqslant v_n$ d'où la convergence de la série à terme positifs $\sum u_n$ par domination.

b) Toujours grâce à la décroissance de φ, on a $v_{k-1} \leqslant u_k \leqslant v_k$ et, en sommant ces inégalités, on a

$$V_{n+1} - v_1 \leqslant U_n \leqslant V_n$$

et, par passage à la limite, quand $n \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^h \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(h) \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vu que $\lim_{h\to 0} \int_0^h \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on a

$$\lim_{h\to 0} S(h) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

2°) $s(x)$ s'écrit de la manière suivante : $s(x) = \sum_{k=1}^{E(x)} \varphi(k)$

a) C'est le théorème du cours ! On a

$$C = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

et $C \leqslant \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Considérons tout d'abord le cas $x < 1$: on a

$$\psi(x) = -\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^k \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(k)\right]$$

et donc, grâce à la question précédente, $\psi(x) \leqslant -\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $\varphi(x) > 0$ on a

$$\psi(x) \leqslant \int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (1-x)\varphi(x) \leqslant \varphi(x)$$

Il nous faut maintenant l'inégalité $\psi(x) \geqslant -\varphi(x)$.

$$\begin{aligned}\psi(x) &= -\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^k \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(k)\right] \\ &\geqslant \int_x^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(1) \geqslant -\varphi(1) \text{ car } \varphi \text{ est croissante} \\ &\geqslant -\varphi(x) \qquad\qquad \text{car } -\varphi \text{ est décroissante}\end{aligned}$$

Pour traiter le cas $x \geqslant 1$, on écrit, après transformation,

$$\psi(x) = -\int_{E(x)}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=E(x)+1}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^k \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(k)\right]$$

puis on applique l'encadrement précédent aux fonctions $\varphi_1(t) = \varphi(t + E(x))$ et $\psi_1(t) = \psi(t + E(x))$, ce qui amène $-\varphi_1(t) \leqslant \psi_1(t) \leqslant \varphi_1(t)$, et on applique cette inégalité à $t = x - E(x)$. ♦

Partie II

3°) Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.
Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$, on a

$$f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

donc $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = +\infty$.

4°) On écrit que $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}e^{-nh}$ et on utilise le I1° appliqué à la fonction $\varphi(t)=\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$, décroissante, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$. On a alors

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{n=1}^{+\infty}h\varphi(nh)\sim\frac{I}{\sqrt{h}}$$

où $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).

a) En conclusion, comme $h=-\ln x\sim 1-x$ en 1, on a bien

$$f(x)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

5°) Là encore, on a $s(y)=\sum\limits_{n=1}^{E(y)}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Et, si $y\in[n,n+1[$ on aura

$$\begin{aligned}
h\int_n^{n+1}s(y)e^{-hy}\,\mathrm{d}y&=s(n)(e^{-nh}-e^{-(n+1)h})\qquad\text{d'où}\\
h\int_0^{n}s(y)e^{-hy}\,\mathrm{d}y&=\sum_{k=0}^{n-1}s(k)(e^{-kh}-e^{-(k+1)h})\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}s(k)e^{-kh}-\sum_{k=1}^{n}s(k-1)e^{-kh}\\
&=-s(n)e^{-nh}+\sum_{k=1}^{n}[s(k)-s(k-1)]e^{-kh}\\
&=-s(n)e^{-nh}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-kh}.
\end{aligned}$$

Comme $s(t)e^{-ht}\geqslant 0$ et $s(n)e^{-nh}$ a une limite nulle en $+\infty$ (car $s(n)\leqslant n$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n s(t)e^{-ht}\,\mathrm{d}t$ existe. On peut donc prendre la limite dans l'égalité du dessus, et, on en déduit que

$$\boxed{f(x)=h\int_0^{+\infty}s(y)e^{-hy}\,\mathrm{d}y.}$$

6°) **a)** Avec les notations du I.2. on sait que

$$|\psi(x)|=|s(x)-2\sqrt{x}+C|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc

$$\left|\int_0^{+\infty}h\psi(t)e^{-ht}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{h}{\sqrt{t}}e^{-ht}\,\mathrm{d}t=\sqrt{h}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}=\sqrt{\pi}\sqrt{h}$$

et, vu le résultat de la question précédente,

$$f(e^{-h})=h\int_0^{+\infty}\psi(t)e^{-ht}\,\mathrm{d}t+2h\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-ht}\,\mathrm{d}t-Ch\int_0^{+\infty}e^{-ht}\,\mathrm{d}t\,.$$

Cependant, on sait que $2h\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-ht}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{h}$ et $h\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ht}\,\mathrm{d}t=1$. Il vient ainsi :

$$\left|f(e^{-h})-\frac{\sqrt{\pi}}{h}+C\right|\leqslant\sqrt{\pi h}.$$

Or, par un calcul simple, on prouve que $\dfrac{1}{\sqrt{h}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ tend vers 0 quand $x\nearrow 1$ et donc

$$\lim_{x\nearrow 1}f(x)-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}=-C$$

où

$$C=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}-1-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}2\sqrt{n}-1-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) $f(-1)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est bien définie comme somme d'une série alternée. On pose alors :

$$A_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}},\ B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On sépare dans chacune de ces deux sommes les termes pairs et impairs, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
A_{2n}&=-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\\
B_{2n}&=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$A_{2n}+B_{2n}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\sqrt{2}B_n.$$

Comme $B_n = 2\sqrt{n} - C + o(1)$ et $B_{2n} = 2\sqrt{2n} - C + o(1)$ on en déduit que

$$A_{2n} = \sqrt{2}B_n - B_{2n} = (1-\sqrt{2})C + o(1)$$

i.e. $f(-1) = (1-\sqrt{2})C$ soit encore $\boxed{-C = (\sqrt{2}+1)f(-1).}$

Partie III

7°) La fonction considérée est équivalente en $+\infty$ à e^{-u^2} donc, il n'y a pas de problème de convergence en $+\infty$.

a) Si x est un réel > 1, soit $y = \ln x$, au voisinage de y on a

$$\frac{1}{e^{u^2} - x} \sim \frac{1}{(u - \ln x)2ye^{a^2}}$$

donc la fonction n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Si $x = 1$ alors $\dfrac{1}{e^{u^2} - 1} \sim \dfrac{1}{u^2}$ et on a la même conclusion.

Si $x \in C \setminus [1, +\infty[$ la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{e^{u^2} - x}$ est continue sur R_+ et, vu son comportement en $+\infty$, cette fonction est intégrable.

En conclusion, la fonction g est définie sur $C \setminus [1, +\infty[$.

8°) f et g sont bien définies sur le disque ouvert $|x| < 1$.

a) En utilisant le développement de $\dfrac{1}{1-z}$ appliqué à $z = xe^{-u^2}$ on a : $\dfrac{1}{1 - xe^{-u^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nu^2}$. Considérons d'abord le cas où $x \in]0, 1[$. Nous avons alors une série de fonctions positives, dont on sait que l'intégration terme à terme réussit toujours, quitte à se conclure par une réponse $+\infty$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(n+1)u^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-(n+1)u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= g(x) < +\infty\end{aligned}$$

or $\dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-(n+1)u^2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; il en résulte que l'on a déjà $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

Dans le cas général ($|x| < 1$) on applique le théorème d'interversion série-intégrale, dont la seule hypothèse supplémentaire est la convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, ce qui s'écrit ici

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} |x|^n e^{-(n+1)u^2}\,\mathrm{d}u < +\infty\,;$$

mais cette série est très exactement celle qu'on vient de voir auparavant, elle coïncide avec $f(|x|)$ (qui converge bien ici).

On en tire aussitôt $\boxed{f(x) = g(x) \text{ sur le disque ouvert } |x| < 1.}$

9°) Si on pose $x = -e^{-t^2}$, on a $g(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_t(u)\,\mathrm{d}u$.

a) Il suffit donc de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_t(u)\,\mathrm{d}u = t + o(1)$.

Soit $\varepsilon = \sqrt{t}$ (comme $t > 1$, on a bien $0 < \varepsilon < t$) alors

$$\int_0^{+\infty} \Phi_t(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \int_0^{t-\varepsilon} \Phi_t(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{t-\varepsilon}{1 + e^{-2\varepsilon t + \varepsilon^2}}$$

car $e^{u^2 - t^2} + 1 \leqslant e^{(t-\varepsilon)^2 - t^2} + 1 = e^{-2\varepsilon t + \varepsilon^2} + 1$. Or,

$$\left| \frac{t-\varepsilon}{1 + e^{-2\varepsilon t + \varepsilon^2}} - t \right| \leqslant \frac{\varepsilon + te^{-2\varepsilon t + \varepsilon^2}}{1 + e^{-2\varepsilon t + \varepsilon^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} + te^{-2\sqrt{t} + 1/t} = o(1)\,.$$

On écrit ensuite $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi_t(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t \Phi_t(u)\,\mathrm{d}u + \int_t^{+\infty} \Phi_t(u)\,\mathrm{d}u$ et on utilise les inégalités $e^{u^2 - t^2} + 1 \geqslant 1 + e^{-t^2}$ dans la première intégrale, $e^{u^2 - t^2} + 1 \geqslant e^{u^2 - t^2}$ dans la deuxième. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \Phi_t(u)\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{t}{1 + e^{-t^2}} + e^{t^2} \int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Mais $\dfrac{t}{1 + e^{-t^2}} - t \to 0$ quand $t \to +\infty$ et vu que $\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \sim \frac{e^{-t^2}}{2t}$ on peut encadrer $g(x) + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\ln|x|}$ par deux quantités qui tendent vers 0, ce qu'il fallait.

Partie IV

10°) Nous supposerons, dans cette question, que $\theta \in]0, 2\pi[$ (sinon $C(\theta)$ diverge). Considérons $E_N(\theta) = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$ ainsi que

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} e^{ip\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n+1)\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

dans l'optique d'une transformation d'Abel :

$$E_N(\theta) = \sum_1^N \frac{s_n - s_{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_1^N \frac{s_n}{\sqrt{n}} - \sum_0^{N-1} \frac{s_n}{\sqrt{n+1}}$$
$$= \sum_1^N s_n\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big) + \frac{s_N}{\sqrt{N}} - 1\,.$$

La suite (s_n) est bornée (par $\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$ qui existe vu que $\frac{\theta}{2} \in]0,\pi[$), ce qui entraîne la convergence de $\frac{s_N}{\sqrt{N}}$ vers 0, alors que la série nouvellement apparue converge absolument, car son terme général se laisse majorer par $w_n = \frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)$, qui est terme général d'une série convergente (par télescopages). Finalement, $E_N(\theta)$ admet une limite, et ses parties réelle et imaginaire font de même, ce qui assure l'existence de $C(\theta)$ et $S(\theta)$.

11°) a) Pour $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$ on a $\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{k\pi}{4n} \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc en minorant le sinus par sa plus petite valeur et la somme par le nombre de termes fois la plus petite il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\frac{k\pi}{4n} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{2.2n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}\,.$$

b) Si la convergence de la série qui définit $S(\theta)$ était uniforme, le critère de Cauchy uniforme serait vérifié, ce qui, en particulier, donnerait, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, un entier n_0 tel que $\big|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin k\theta}{\sqrt{k}}\big| \leqslant \frac{1}{2}$ ait lieu pour tout θ ; mais avec $\theta = \frac{\pi}{4n}$ on a vu à la question précédente que n'est pas possible.

12°) Tentons une interversion de série et intégrale ; notre but est de justifier le calcul formel suivant.

$$g\big(e^{i\theta}\big) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{e^{u^2} - e^{i\theta}} = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{ik\theta-(k+1)u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$= \sum_{k=0}^\infty e^{ik\theta} \int_0^\infty e^{-(k+1)u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^\infty e^{ik\theta} \int_0^\infty e^{-(k+1)u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{k+1}} = f\big(e^{i\theta}\big)$$

Le seul point litigieux est l'interversion ; le théorème du programme relatif à ce point ne s'applique pas ici parce que la série des intégrales des modules diverge. On considère donc la suite des sommes partielles :

$$T_N(u) = \sum_{k=0}^N e^{ik\theta-(k+1)u^2} = e^{-u^2}\frac{1 - e^{i(N+1)(\theta-u^2)}}{1 - e^{i(\theta-u^2)}}$$
$$\Rightarrow\ |T_N(u)| \leqslant \frac{2}{|e^{u^2} - e^{i\theta}|} = \varphi(u)$$

fonction majorante qui est continue sur $\mathbb{R}$ parce que $x = e^{i\theta}$ n'est pas égal à 1 (question 10°), et intégrable puisqu'équivalente à l'infini à e^{-u^2}. Le théorème de convergence dominée est, ainsi, applicable à la suite (T_N) et amène le résultat espéré :

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } x \text{ tel que } f(x) \text{ existe on a } f(x) = g(x).}$$

En particulier, si on prend les parties réelles il vient

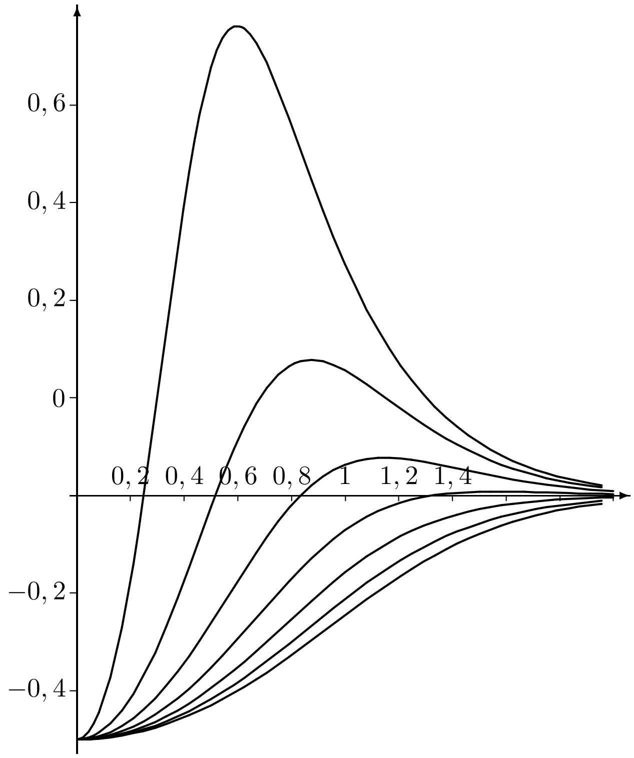
$$C(\theta) = \mathrm{Re}(f(e^{i\theta})) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{i\theta}}{e^{u^2} - e^{i\theta}}\Big)\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{i\theta}e^{u^2} - 1}{e^{2u^2} - 2\cos\theta e^{u^2} + 1}\Big)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty W_\theta(u)\,\mathrm{d}u$$

avec $W_\theta(u) = \dfrac{e^{u^2}\cos\theta - 1}{e^{2u^2} - 2\cos\theta e^{u^2} + 1}$.

13°) W_θ s'annule pour $e^{u^2} = \frac{1}{\cos\theta}$ soit $\theta = \pm\sqrt{-\ln\cos\theta}$; elle est aussi paire et vérifie $W(0) = -\frac{1}{2}$; elle tend vers 0 à l'infini. Concernant W', il est commode de poser $X = e^{u^2} \geqslant 1$ ce qui conduit à étudier la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X\cos\theta - 1}{X^2 - 2X\cos\theta + 1}$; on a $F'(X) = \frac{-X^2\cos\theta + 2X - \cos\theta}{D^2}$ qui chaneg de signe pour $X = \frac{1\pm\sin\theta}{\cos\theta}$. Ici on a

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\big(\tfrac{\theta}{2} + \tfrac{\pi}{4}\big) > 1 > \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\big(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\theta}{2}\big)$$

de sorte que, par composition, W' ne s'annule qu'en $\pm\sqrt{\ln\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$ ainsi qu'en 0 évidemment.



14°) On pose $v = u^2$. Il vient, tenant compte du fait que pour θ assez petit $e^v \cos\theta \geqslant 1$ pour tout $v \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} C(\theta) &\geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^v \cos\theta - 1}{e^{2v} - 2e^v \cos\theta + 1}\, \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\ln(1 - 2e^{-v}\cos\theta + e^{-2v})\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \ln \frac{1 - 2e^{-1}\cos\theta + e^{-2}}{2(1-\cos\theta)} \end{aligned}$$

Quand θ tend vers zéro, le numérateur tend vers une limite non nulle et le dénominateur tend vers 0. On trouve ainsi que $\boxed{\lim_{\theta \to 0^+} C(\theta) = +\infty.}$