Caractérisation des comatrices

1. Regarde les n^2 équations polynomiales qui définissent les cœfficients de $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{r} t^i A_i$: chacune a plus de r racines en étant de degré au plus r, donc

   $\boxed{\text{chacun des cœfficients de chacune des matrices } A_i \text{ est nul.}}$

2. (a) Chacun des cœfficients de $\mathrm{Com}(A-tI_n)$ est un cofacteur, donc plus ou moins un mineur qui est un déterminant de taille $n-1$ de type polynôme caractéristique dans lequel t apparaît au plus une fois dans chaque ligne et colonne.
   La formule du déterminant ($\det M = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n-1),n-1}$) donne une combinaison linéaire de termes polynomiaux de degré au plus $n-1$, donc chaque cœfficient de $\mathrm{Com}(A-tI_n)$ est un terme polynomial de degré au plus $n-1$ en t.

   $\boxed{\text{On a donc bien des matrices } R_0,\dots,R_{n-1} \text{ telles que, pour tout } t\in\mathbb{C},\ [\mathrm{Com}(A-tI_n)]^\intercal=\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i.}$

   $\boxed{\text{L'unicité}}$ provient de la première question car si $R_0,\dots,R_{n-1}$ d'une part et $S_0,\dots,S_{n-1}$ d'autre part conviennent, alors pour tout $t\in\mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{n-1} t^i(R_i-S_i)=0$ et donc pour tout i, $R_i=S_i$.

   (b) Comme 0 est racine de $\chi_A(0)-\chi_A$, X divise $\chi_A(0)-\chi_A$ et le polynôme P est bien défini.
   On a $XP=(-1)^n\big(\chi_A(0)-\chi_A\big)$ donc, en évaluant en $A^\intercal$, $A^\intercal P(A^\intercal)=(-1)^n\big(\chi_A(0)I_n-\chi_A(A^\intercal)\big)$.
   Or A et $A^\intercal$ on même polynôme caractéristique car le déterminant est invariant par transposition.
   Donc $\chi_A(A^\intercal)=\chi_{A^\intercal}(A^\intercal)=0_n$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi,

   $$A^\intercal P(A^\intercal)=(-1)^n\chi_A(0)I_n=(-1)^n\det(-A)I_n=(\det A)I_n.$$

   On fait une disjonction de cas selon l'inversibilité de A (donc de $A^\intercal$) :

   - Si A est inversible, $A^\intercal$ l'est et on a alors

     $$P(A^\intercal)=(\det A)(A^\intercal)^{-1}=\big((\det A)A^{-1}\big)^\intercal=\mathrm{Com}\,A$$

     d'après la formule de la comatrice.
   - Le cas où A n'est pas inversible est vraiment difficile et demande d'utiliser les questions précédentes.
     On peut toujours écrire $A^\intercal P_A(A^\intercal)=(\det A)I_n$ quelle que soit la matrice A, où on note plutôt $P=P_A$.
     $A-tI_n$ est inversible pour tout t qui ne soit pas valeur propre de A qui n'en possède qu'un nombre fini.
     En appliquant le cas précédent, on obtient, pour $t\notin \mathrm{Sp}\,A$, $P_{A-tI_n}((A-tI_n)^\intercal)=\mathrm{Com}(A-tI_n)$. En transposant, on obtient $P_{A-tI_n}((A-tI_n))=[\mathrm{Com}(A-tI_n)]^\intercal$ (par linéarité de la transposée et $BC^\intercal=C^\intercal B^\intercal$, on a bien pour tout polynôme Q et matrice carrée B, $Q(B)=Q(B^\intercal)$.)
     Donc, d'après la question précédente, on a des matrices $R_0,\dots,R_{n-1}$ telles que

     $$P_{A-tI_n}(A-tI_n)=\sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i.\ (1)$$

     Écrivons $\chi_{A-tI_n}=\det(XI_n-(A-tI_n))=\chi_A(X+t)$, donc $P_{A-tI_n}=(-1)^n\dfrac{\chi_A(t)-\chi_A(X+t)}{X}$.

On peut poser $\chi_A=\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors $P_{A-tI_n}=(-1)^n\sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{t^i-(X+t)^i}{X}=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i t^j (X+t)^{i-1-j}$ et $P_{A-tI_n}(A-tI_n)=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i t^j A^{i-1-j}=\sum_{j=0}^{n-1}\left((-1)^{n+1}\sum_{i=j+1}^{n} a_i A^{i-1-j}\right)t^j$. (2)

Par (1) et (2) et par la question 1, $\mathbb{C}\setminus \operatorname{Sp} A$ étant infini, $\operatorname{Com} A^\intercal = R_0=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1}=P_A(A)$ donc en transposant, $\boxed{\operatorname{Com} A = P(A^\intercal).}$

Notons qu'il existe une rédaction plus simple utilisant des arguments topologiques : comme $A\mapsto P_A(A)$ est continue car les cœfficients de P_A sont polynomiaux en ceux de A et car les fonctions $A\mapsto A^k$ sont aussi continues (les applications k-linaires sur un espace de dimension finie $(A_1,\dots,A_k)\mapsto A_1\times\cdots\times A_k$ sont automatiquement continues), le fait que l'application soit nulle sur $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et la densité de ce sous-espace dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (comme vu en question **4.b**) permettent de conclure. Cela demande de connaître ces arguments et ne semble pas être l'esprit dans lequel le sujet a été écrit vu les question précédentes... Mais c'est plus simple !

3. (a) Si A est de rang n, elle est inversible et, avec la formule de la comatrice, $\operatorname{Com} A$ l'est aussi donc $\boxed{\operatorname{Com} A \text{ est de rang } n.}$

De plus, $\operatorname{Com} A=(\det A)\left(A^{-1}\right)^\intercal=(\det A)(A^\intercal)^{-1}$ et comme $\operatorname{Com} A$ est inversible, on a aussi

$$\operatorname{Com}(\operatorname{Com} A)=(\det(\operatorname{Com} A))((\operatorname{Com} A)^\intercal)^{-1}=\frac{\det(\operatorname{Com} A)}{\det A}A.$$

Or, en prenant le déterminant de la formule de la comatrice, on obtient

$$\det A\det(\operatorname{Com} A)=\det((\det A)I_n)=(\det A)^n$$

donc $\det(\operatorname{Com} A)=(\det A)^{n-1}$ (avec $\det A\neq 0$).

Finalement, $\boxed{\operatorname{Com}(\operatorname{Com} A)=(\det A)^{n-2}A.}$

(b) Comme $(\operatorname{Com} A)\times A^\intercal=(\det A)I_n=0_n$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $L_i^\intercal$ est la i^{e} colonne de $A^\intercal$ et donc $\boxed{(\operatorname{Com} A)\times L_i^\intercal \text{ est la } i^{\text{e}} \text{ colonne de } 0_n \text{ soit la colonne nulle.}}$

Ainsi, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $L_i^\intercal\in\operatorname{Ker}(\operatorname{Com} A)$. Comme $A^\intercal$ est de rang $n-1$, la famille de ses colonnes l'est aussi, donc $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{Com} A))\geqslant n-1$ et comme $\operatorname{Com} A$ n'est pas nulle, car au moins un des mineurs de A est non nul vu que $\operatorname{rg} A=n-1$, on a $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{Com} A))=n-1$, puis, par théorème du rang, $\boxed{\operatorname{rg}(\operatorname{Com} A)=1.}$

(c) Si $\operatorname{rg} A\leqslant n-2$, alors tous ses mineurs sont nuls donc $\boxed{\operatorname{Com} A=0_n.}$

4. (a) On suppose M et N sont inversibles, donc MN l'est. Alors

$$\operatorname{Com}(MN)=\det(MN)\left((MN)^{-1}\right)^\intercal=\det(M)\det(N)\left(N^{-1}M^{-1}\right)^\intercal=\det(M)\det(N)\left(M^{-1}\right)^\intercal\left(N^{-1}\right)^\intercal$$

donc $\boxed{\operatorname{Com}(MN)=\operatorname{Com} M\operatorname{Com} N.}$

(b) La question revient à montrer que si $|t|$ est assez petit, alors $M(t)=M-tI_n$ et $N(t)=N-tI_n$ sont inversibles, donc $t\notin\operatorname{Sp} M\cap\operatorname{Sp} N$. Or M et N ne possèdent qu'un nombre fini de valeurs propres non nulles. Il suffit de prendre $|t|$ strictement plus petit que $\min\limits_{\lambda\in(\operatorname{Sp} M\cup\operatorname{Sp} N)\setminus\{0\}}|\lambda|$ si $\operatorname{Sp} M\cup\operatorname{Sp} N\neq\{0\}$ et t quelconque sinon. Alors $M(t)$ et $N(t)$ sont inversibles et la question précédente donne

$$\boxed{\operatorname{Com}\big(M(t)N(t)\big)=\operatorname{Com}\big(M(t)\big)\operatorname{Com}\big(N(t)\big).}$$

(c) Les cœfficients de la comatrice sont des cofacteurs qui sont eux-mêmes des combinaisons linéaires de produits de cœfficients de la matrices.
Donc lorsque $t \to 0$, $\operatorname{Com}(M(t)) \to \operatorname{Com} M$, $\operatorname{Com}(N(t)) \to \operatorname{Com} N$ et $\operatorname{Com}(M(t)N(t)) \to \operatorname{Com}(MN)$ en regardant cœfficients à cœfficients.
Ensuite, le produit matriciel donnant des somme de produit, on va bien avoir, toujours cœfficients à cœfficients, $\operatorname{Com}(M(t))\operatorname{Com}(N(t)) \to \operatorname{Com} M \operatorname{Com} N$.
Finalement, par unicité de la limite, en utilisant la question précédente, $\boxed{\operatorname{Com}(MN) = \operatorname{Com} M \operatorname{Com} N.}$

Autre rédaction possible : utiliser $2.a$ pour voir l'égalité de la question précédente comme une écriture
$\sum_{i=0}^{2n-2} t^i R_i = \sum_{i=0}^{2n-2} t^i S_i$ pour une infinité de t, et déduire de la première question que l'égalité est aussi vraie pour $t = 0$, ce qui permet de conclure.

(d) Si M est une matrice de projection, $M^2 = M$ et avec la question précédente,

$$\operatorname{Com} M = \operatorname{Com}(M^2) = (\operatorname{Com} M)^2$$

donc $\boxed{\operatorname{Com} M \text{ est aussi une matrice de projection.}}$

5. (a) Soit p projection canoniquement associée à A. Dans une base adaptée à

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker} p,$$

la matrice de p est $B = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 0 \end{pmatrix}$ qui est donc semblable à A.

Alors $\boxed{\chi_A = \chi_B = X(X-1)^{n-1}.}$

(b) On utilise 2.b : $\operatorname{Com} A = P(A^\intercal)$. Or ici $\chi_A(0) - \chi_A(X) = -\chi_A(X)$ donc $P = (-1)^{n-1}(X-1)^{n-1} = (1-X)^{n-1}$. On a donc, $\operatorname{Com} A = (I_n - A^\intercal)^{n-1}$. Mais $A^\intercal$ est aussi une matrice de projection car idempotente, et $I_n - A^\intercal$ qui représente la projection associée est aussi une matrice de projection donc $\boxed{\operatorname{Com} A = I_n - A^\intercal.}$

(c) Si M est une matrice de projection de rang 1 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, soit $A = I_n - M^\intercal$. Alors $A^2 = I_n - 2M^\intercal + (M^\intercal)^2$ car I_n et $M^\intercal$ commutent.
Donc $A^2 = I_n - 2M^\intercal + (M^2)^\intercal = I_n - 2M^\intercal + M^\intercal = I_n - M^\intercal = A$ car M est une matrice de projection.
Ainsi, A est une matrice de projection. Reste à voir que son rang est $n-1$. Or

$$\operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im}(I_n - M^\intercal)) = n - \dim(\operatorname{Ker}(I_n - M^\intercal)) = n - \dim(\operatorname{Im} M^\intercal) = n - \operatorname{rg} M^\intercal = n - \operatorname{rg} M = n-1$$

car $M^\intercal$ est aussi une matrice de projection.
Ainsi, avec la question précédente, $\boxed{\operatorname{Com} A = M \text{ qui est une comatrice.}}$

6. (a) M est de rang 1 donc 0 valeur propre et $\dim E_0(M) = \dim \operatorname{Ker} M = n-1$.
Donc on a $a \in \mathbb{C}^*$ tel que M est semblable à $\operatorname{diag}(a, 0, \dots, 0)$ et donc

$$\boxed{a^{-1}M \text{ est une matrice de projection.}}$$

(b) Avec 5.c, on a A telle que $a^{-1}M = \operatorname{Com} A$, donc $M = a \operatorname{Com} A$. Soit $b \in C$ une racine $n-1^{\text{e}}$ de a (il en existe toujours, $n-1 \geqslant 2$), alors $\boxed{M = \operatorname{Com}(bA)}$ par $n-1$-linéarité des mineurs de bA.

7. (a) A est de rang 1 donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.
Comme A n'est pas diagonalisable, il n'y a pas d'autre valeur propre.
Soit u endomorphisme canoniquement associé à A, F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.

Dans une base adaptée à $\operatorname{Ker} u \oplus F = \mathbb{C}^n$, la matrice de u est de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

Mais comme 0 est la seule valeur propre, $a_n = 0$ et on a alors $B^2 = 0$, donc $u^2 = 0$ et $\boxed{A^2 = 0.}$

Comme $u^2=0$, $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $e_1 \neq 0$ un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Im} u$. alors (e_1) est une famille libre de $\operatorname{Ker} u$ qu'on complète en $(e_1,\dots,e_{n-1})$ base de $\operatorname{Ker} u$. Comme $e_1 \in \operatorname{Im} u$ donc on a $e_n \in \mathbb{C}^n$ tel que $u(e_n)=e_1$.

On vérifie que $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Vect}(e_n)=\mathbb{C}^n$: on a bien $\dim \operatorname{Ker} u+1=n$ et si $x\in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Vect}(e_n)$, on a $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x=\lambda e_n \in \operatorname{Ker} u$ et $u(x)=0=\lambda u(e_n)=\lambda e_1$ avec $e_1\neq 0$ donc $\lambda=0$ puis $x=0$ donc la somme est bien directe.

Finalement, $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et par construction, la matrice de u dans cette base est $\boxed{A_1=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ semblable à } A.}$

(b) L'endomorphisme canoniquement associé à $D_1=\begin{pmatrix}0 & & & -1\\ & 1 & (0) & \\ & & \ddots & \\ & (0) & 1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ est

$$v:(x_1,\dots,x_n)\mapsto(-x_n,x_2,\dots,x_{n-1},0).$$

Alors $v^2:(x_1,\dots,x_n)\mapsto(0,x_2,\dots,x_{n-1},0)$ donc $v^2-v:(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_n,0,\dots,0)$ donc $\boxed{D_1^2-D_1=A_1.}$

Puis $v\circ(v^2-v)=v^3-v^2=v^2-v^2=0$ donc $\boxed{D_1A_1=0_n}$ et comme A_1 est un polynôme en D_1, elle commute avec D_1 : $\boxed{A_1D_1=0_n.}$

Enfin, dans D_1, les colonnes 2 à n sont libres (colonnes de la base canonique au signe près) et la première colonne est nulle donc $\boxed{\operatorname{rg} D_1=n-1.}$

(c) Soit $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A=PA_1P^{-1}$. On pose $D=PD_1P^{-1}$.

Alors, vu les résultats de la question précédente, $\boxed{D^2-D=A \text{ et } AD=DA=0.}$

Puis $\boxed{\operatorname{rg}(I_n-D)}=\operatorname{rg}(I_n-D_1)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\boxed{=2.}$

Puis, comme dans la question précédente $v^2=v^3$, $D_1^2=D_1^3$ et $\boxed{D^2=D^3.}$

(d) On a $\chi_D=\chi_{D_1}=\begin{vmatrix}X & & & 1\\ & X-1 & (0) & \\ & & \ddots & \\ & (0) & X-1 & \\ & & & X\end{vmatrix}$ donc $\boxed{\chi_D=X^2(X-1)^{n-2}}$.

Puis avec la question 2.b, $P=(-1)^{n+1}X(X-1)^{n-2}=-X(1-X)^{n-2}$ et $\operatorname{Com} D=-D^{\intercal}(I_n-D^{\intercal})^{n-2}$.
Mais avec la question précédente, pour tout $k\geqslant 2$, $D^k=D^2$ donc $(D^{\intercal})^k=(D^{\intercal})^2$ et comme I_n et $D^{\intercal}$ commutent, par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\operatorname{Com} D &= -\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k(D^{\intercal})^{k+1}=-D^{\intercal}-\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k(D^{\intercal})^2\\ &=-D^{\intercal}-\big((1-1)^{n-2}-1\big)(D^{\intercal})^2\end{aligned}$$

et comme $n-2>0$, $\boxed{\operatorname{Com} D=-D^{\intercal}+(D^{\intercal})^2=A^{\intercal}.}$

(e) Avec les deux questions précédentes, $\boxed{A=(\operatorname{Com} D)^{\intercal}=\operatorname{Com}(D^{\intercal}),}$ cette dernière égalité découlant de la définition de la comatrice.

8. D'après 3, les comatrices sont soit inversibles, soit de rang 1, soit nulles.
   Réciproquement,
   - Si A est inversible, $A = \dfrac{1}{(\det A)^{n-2}}\,\mathrm{Com}(\mathrm{Com}\,A) = \mathrm{Com}(\alpha\,\mathrm{Com}\,A)$ où α est une racine $(n-1)^{\text{e}}$ de $\dfrac{1}{(\det A)^{n-2}}$ donc A est une comatrice.
   - Si A est de rang 1, qu'elle soit ou non diagonalisable, c'est une comatrice d'après les questions 6 et 7.
   - Si A est nulle, alors $A = \mathrm{Com}\,0_n$.

   Finalement, les comatrices sont exactement les matrices de rang $0, 1$ ou n.

Fin