CCINP PSI 2024 Mathématiques - Un corrigé

PROBLÈME 1

File d'attente

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. Par définition, T_1 correspond au rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Donc T_1 suit une loi géométrique de paramètre p, ce qui correspond au résultat attendu.
De manière plus élémentaire, soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors :

$$\{T_1 = k\} = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i = 0\}\right) \cap \{X_k = 1\}.$$

Donc, par indépendance des variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$,

$$\mathbf{P}(T_1 = k) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X_i = 0)\right) \times \mathbf{P}(X_k = 1) = (1-p)^{k-1}\, p\,.$$

Finalement, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}\, p\,.}$

Q2. L'événement A est réalisé si et seulement si aucun des événements $\{T_1 = k\}$ n'est réalisé :

$$\boxed{A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{T_1 = k\}} = \Omega \setminus \left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \{T_1 = k\}\right).}$$

Or, par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \{T_1 = k\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(T_1 = k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\, p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Donc $\boxed{\mathbf{P}(A) = 0}$ et $\boxed{\text{presque sûrement, un nouveau client doir arriver dans la file.}}$

Q3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $a_k = \mathbf{P}(T_1 = k) = p\,(1-p)^{k-1} > 0$. Alors :

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1-p \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1-p\,.$$

Donc, par le critère de d'Alembert appliqué aux séries entières, $\boxed{R = \frac{1}{1-p}\,.}$

Soit $t \in\,]-R, R\,[$. Alors

$$G_{T_1}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} t^k = pt \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{k-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Finalement, $\boxed{\forall t \in\,]-R, R\,[,\ G_{T_1}(t) = \frac{pt}{1+(p-1)t}\,.}$

Q4. Comme $R > 1$, la fonction G_{T_1} est de classe $\mathscr{C}^2$ en 1, donc T_1 est de variance finie. De plus, après calcul,

$$\forall t \in]-R, R[\,, G'_{T_1}(t) = \frac{p}{(1+(p-1)t)^2} \quad \text{et} \quad G''_{T_1}(t) = -\frac{2p(p-1)}{(1+(p-1)t)^3}\,.$$

On en déduit tout d'abord que $\boxed{E(T_1) = G'_{T_1}(1) = \frac{1}{p}\,.}$

De plus, par la formule de transfert,

$$G''_{T_1}(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\,\mathbf{P}(T_1 = k) = E(T_1(T_1-1)).$$

Cela entraîne, par la formule de Koenig-Huygens et par linéarité de l'espérance :

$$V(T_1) = E(T_1^2) - (E(T_1))^2 = G''_{T_1}(1) + E(T_1) - (E(T_1))^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\,.$$

Finalement, $\boxed{V(T_1) = \frac{1-p}{p^2}\,.}$

Q5. Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{E(D_n) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = nE(T_1) = \frac{n}{p}\,.}$$

De plus, comme les variables aléatoires (T_k) sont indépendantes (deux à deux),

$$\boxed{V(D_n) = \sum_{k=1}^{n} V(T_k) = nV(T_1) = \frac{n(1-p)}{p^2}\,.}$$

Enfin, par indépendance des variables (T_k),

$$\boxed{\forall t \in]-R, R[\,, G_{D_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{T_k}(t) = G_{T_1}^n(t) = \left(\frac{pt}{1+(p-1)t}\right)^n.}$$

Q6. Le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 est donné par :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[\,,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+1-k)}{k!}\,x^k\,.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $t \in]-R, R[$. Alors, $|(p-1)t| < 1$ donc, par ce qui précède,

$$G_{D_n}(t) = p^n t^n (1+(p-1)t)^{-n} = p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (p-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, p^n (p-1)^k t^{n+k}$$

où $c_k = \dfrac{-n(-n-1)\ldots(-n+1-k)}{k!} = (-1)^k \dbinom{k+n-1}{k}$.

Finalement,

$$\boxed{\forall t \in]-R,R[\,,\ G_{D_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} p^n (1-p)^k t^{n+k} = \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{j-n} p^n (1-p)^{j-n} t^j.}$$

Alors, par unicité du développement en série entière, sachant que $P_{D_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(D_n = k) t^k$,

$$\boxed{\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbf{P}(D_n = k) = \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n}}$$

avec, par convention, $\displaystyle\binom{k-1}{k-n} = 0$ si $k < n$.

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Q7. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = \exp(-a) > 0$ et $f(1) = \exp(0) = 1$. On en déduit que :

$$\forall t \in]0,1[,\ f(t) \in\,]f(0), f(1)[\, \subset\,]0,1[\,.$$

Autrement dit, l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition

$$(\mathscr{H}_n) :\ (z_n \in\,]0,1[\quad \text{et} \quad z_{n+1} - z_n \text{ est du même signe que } z_2 - z_1)\,.$$

(a) Initialisation : Par hypothèse, $z_1 \in\,]0,1[\,$, donc $(\mathscr{H}_1)$ est vérifiée.

(b) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\mathscr{H}_n)$ est vraie.
Alors $z_n \in\,]0,1[$ donc par stabilité de $]0,1[$ par f, $z_{n+1} = f(z_n) \in\,]0,1[\,$.
De plus, par croissance de f, $z_{n+2} - z_{n+1} = f(z_{n+1}) - f(z_n)$ a même signe que $z_{n+1} - z_n$, donc $z_{n+2} - z_{n+1}$ a même signe que $z_2 - z_1$. Finalement, $(\mathscr{H}_{n+1})$ est vérifiée.

(c) Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \in\,]0,1[\quad \text{et } z_{n+1} - z_n \text{ est du même signe que } z_2 - z_1.}$

Q8. La suite (z_n) est une suite réelle monotone et bornée.
Donc, par le théorème de la limite monotone, (z_n) converge. On note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} z_n$.
Par ce qui précède,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < z_n < 1$$

donc, par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. De plus, par définition de (z_n),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n)\,.$$

Alors, par passage à la limite et par continuité de f, on obtient :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} z_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(z_n) = f(\ell)\,.$$

Finalement, $\boxed{\text{la suite } (z_n) \text{ converge, et sa limite } \ell \in [0,1] \text{ est un point fixe de } f.}$

Q9. Soit $x \in]0,1]$. Alors, par croissance de exp,

$$\boxed{0 \leqslant \psi(x) \iff a(x-1) \leqslant \ln(x) \iff \exp(a(x-1)) \leqslant \exp(\ln(x) \iff f(x) \leqslant x.}$$

De même, par bijectivité de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\psi(x) = 0 \iff a(x-1) = \ln(x) \iff \exp(a(x-1)) = \exp(\ln(x) \iff f(x) = x.}$$

Q10. La fonction ψ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1[\,,\ \psi'(x) = \dfrac{1}{x} - a > 1 - a \geqslant 0.$

On en déduit que ψ est strictement croissante sur $]0,1]$ et $\boxed{\forall x \in]0,1]\,,\ \psi(x) \leqslant \psi(1) = 0.}$

De plus, comme ψ est strictement croissante sur $]0,1]$, $\boxed{\psi \text{ ne s'annule qu'en } 1.}$

Alors, par la question **Q9**, $\forall x \in]0,1]\,,\ f(x) = x \iff \psi(x) = 0 \iff x = 1\,.$

Autrement dit, 1 est l'unique point fixe de f dans $]0,1]$, et donc dans $[0,1]$ car $f(0) \neq 0$.

Alors, par la question **Q8.**, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 1.}$

Q11. Sachant que $a > 1$, les variations de ψ sont données par :

x	0		$1/a$		1
$\psi'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$\psi(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\psi(1/a)$	$\searrow$	0

Alors $\psi(1/a) > 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \psi(x) < 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0, 1/a[$ tel que $\psi(\alpha) = 0$. La stricte croissance de ψ sur $]0, 1/a[$ assure l'unicité de α.
Finalement, $\boxed{\text{il existe } \alpha \in]0,1] \text{ tel que } \forall x \in]0,1],\ \psi(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \alpha.}$

La question **Q9.** entraîne alors que

$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ f(x) = x \iff \psi(x) = 0 \iff x = \alpha \text{ ou } x = 1.}$$

1er cas : $z_1 \in]0, \alpha]$. Par croissance de f,

$$\forall x \in]0, \alpha],\ f(x) \leqslant f(\alpha) = \alpha.$$

On en déduit que $]0, \alpha]$ est stable par f et $\forall n \geqslant 1,\ z_n \leqslant \alpha$.
Par passage à la limite, on en déduit que $\ell \leqslant \alpha$. Or α est l'unique point fixe de f sur $[0, \alpha]$.
Donc, par la question **Q8**, $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \alpha$.

2ème cas : $z_1 \in]\alpha, 1[$. De même, par stricte croissance de f, $\forall x \in]\alpha, 1[\,,\ f(x) > f(\alpha) = \alpha$.
Donc $]\alpha, 1[$ est stable par f et $\forall n \geqslant 1,\ \alpha < z_n < 1$.
De plus $\psi \geqslant 0$ sur $]\alpha, 1]$ donc, par la question **Q9**, $\forall x \in]\alpha, 1],\ f(x) \leqslant x$.
Cela entraîne que la suite (z_n) est décroissante, donc $\ell \leqslant z_1 < 1$ et, comme précédemment, $\ell = \alpha$.

Finalement, dans les deux cas, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \alpha.}$

II.2 - Groupes de clients

Q12. L'événement Z se réalise s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $V_n = 0$, c'est-à-dire si un groupe est passé au guichet sans qu'aucun nouveau client n'arrive entretemps. Donc l'événement Z correspond à la situation où $\boxed{\text{à un moment donné, le guichet s'est libéré sans aucun nouveau client à servir.}}$

Q13. La variable aléatoire N_n correspond au nombre de succès lors de la succession de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Donc N_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$:

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbf{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.}$$

Q14. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Par définition, V_1 est le nombre de clients arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,S]\!]$. Donc, avec les notations précédentes, $V_1 = N_S$. On en déduit :

$$\boxed{\mathbf{P}(V_1 = k | S = n) = \mathbf{P}(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, par la formule des probabilités totales, en utilisant que $(\{S = n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(V_1 = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(V_1 = k | S = n)\, \mathbf{P}(S = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\,.
\end{aligned}$$

Finalement, après simplification,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(V_1 = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, e^{-\lambda}\, e^{(1-p)\lambda} = e^{-\lambda p}\, \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,,$$

donc $\boxed{V_1 \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda p.}$

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\{V_n = 0\} \subset \{V_{n+1} = 0\}$. Donc, par continuité croissante de $\mathbf{P}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\{V_n = 0\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{V_n = 0\} \right) = P(Z)\,.$$

Cela signifie que $\boxed{(z_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} z_n = P(Z).}$

Q16. Soit $j \in \mathbb{N}$.

1er cas : $j = 0$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbf{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = 0\right) = 1 = \mathbf{P}(V_n = 0)^0$.

2ème cas : $j \geqslant 1$. Supposons que $V_1 = j$. Alors le premier groupe est composé des clients de 1 à j. Par analogie avec les groupes de clients définis dans l'énoncé, pour tout client d'indice $1 \leqslant i \leqslant j$, on note $G_1^{(i)}$ l'ensemble des clients du deuxième groupe qui sont arrivés pendant que i est servi. Puis, récursivement, pour tout $k \geqslant 2$, on note $G_k^{(i)}$ l'ensemble des clients du $(k+1)$-ième groupe arrivés pendant que les clients de $G_{k-1}^{(i)}$ sont servis.

Alors, par construction, le $(k+1)$-ième groupe est l'union disjointe des $(G_k^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant j}$, donc

$$V_{k+1} = \sum_{i=1}^{j} V_k^{(i)} ,$$

où $V_k^{(i)}$ représente le nombre de clients de $G_k^{(i)}$.
Or, pour tout i, la variable $V_k^{(i)}$ suit un processus identique à celui de la variable V_k en ne considérant que les temps de passage des clients appartenant aux groupes issus du client i.
On en déduit que $V_k^{(i)}$ suit la même loi que V_k et, faute de preuve rigoureuse, il est intuitivement raisonnable de considérer que les variables $\left(V_k^{(i)}\right)_{1\leqslant i\leqslant j}$ sont indépendantes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par positivité des variables $V_n^{(i)}$,

$$\{V_{n+1} = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{V_n^{(i)} = 0\}$$

donc, par indépendance,

$$\mathbf{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) = \prod_{i=1}^{j} \mathbf{P}\left(V_n^{(i)} = 0\right) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j.$$

Finalement, $\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j.}$

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par la formule des probabilités totales, en utilisant que $(\{V_1 = j\})_{j\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements,

$$z_{n+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(V_{n+1} = 0 | V_1 = j\right) \mathbf{P}\left(V_1 = j\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(V_n = 0)^j e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} = e^{-\lambda p} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p z_n)^j}{j!} .$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = e^{-\lambda p}\, e^{\lambda p z_n} = \exp(\lambda p(z_n - 1)) .}$

Q18. D'après la question précédente, la suite (z_n) vérifie toutes les hypothèses de la partie **II.1.** avec $a = \lambda p$.

Donc, d'après la question **Q10**, $\boxed{\text{si } \lambda p \leqslant 1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} z_n = 1.}$

De plus, d'après la question **Q11**, $\boxed{\text{si } \lambda p > 1, \text{ alors } (z_n) \text{ converge vers un réel } \alpha < 1.}$

EXERCICE

Équivalent de Stirling

Q.19 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f_x : t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$; les seuls problèmes d'intégrabilité sont en 0 et en $+\infty$.

- Au voisinage de 0, $0 \leqslant f_x(t) \sim t^{x-1}$ donc, d'après les intégrales de Riemann et les théorèmes de comparaison sur les fonctions positives, f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1-x < 1$, soit $x > 0$.
- Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(1/t^2)$ par croissances comparées et, pour des raisons analogues, f_x est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.
- Finalement f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \text{ converge si et seulement si } x > 0.}$$

Q20. Soient $x > 0$. et $(u : t \longmapsto t^x)$ et $(v : t \longmapsto -e^{-t})$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et uv possède des limites finies (et nulles) en 0 et en $+\infty$. Donc par théorème d'intégration par parties, $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u\,v'$ et $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u'\,v$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_{]0,+\infty[} u\,v' = \Big[uv\Big]_0^{+\infty} - \int_{]0,+\infty[} u'\,v.$$

Or dans $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} u\,v'$ on reconnait $\Gamma(x+1)$ qui est donc une intégrale convergente, et on a alors :

$$\Gamma(x+1) = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_0^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).$$

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad \forall\, x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Un calcul direct donne :

$$\Gamma(1) = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1.$$

La formule précédente donne alors par récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Q21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$.
On a $u_0 = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2}\,u_n = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)}u_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)}\right) u_0 = \frac{(2n)!}{4^n\,n!}\,u_0$$

ce qui est également vrai pour $n = 0$.
Or, le changement de variable $t = u^2$ donne :

$$u_0 = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

On en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\sqrt{\pi}.}$$

Q22. Remarquons que puisque la fonction ln est continue sur $[1/2, +\infty[$, les ρ_k sont bien définis pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.
Soit $n \geqslant 2$. La relation de Chasles et les propriétés du logarithme fournissent :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) - \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = \ln(n-1)! - \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt.$$

La convention citée par l'énoncé dit que ce résultat reste valable pour $n = 1$; donc par **Q20.** :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\Gamma(n) = \int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k.}$$

Q23. Fixons k dans $\mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u = t - k$ fournit :

$$\int_{k-1/2}^{k+1/2} \ln t\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \ln(u+k)\, du = \int_{-1/2}^{0} \ln(u+k)\, du + \int_{0}^{1/2} \ln(u+k)\, du.$$

Puis en posant $w = -u$, on a $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \ln(u+k)\, du = \int_{0}^{1/2} \ln(k-w)\, dw.$ Finalement :

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \ln k - \int_0^{1/2} \ln(t+k)\, dt - \int_0^{1/2} \ln(k-t)\, dt \\
&= \int_0^{1/2} \left(2\ln k - \ln(t+k) - \ln(k-t)\right)\, dt \\
&= \int_0^{1/2} \ln\left(\frac{k^2}{(k+t)(k-t)}\right)\, dt = \int_0^{1/2} -\ln\left(\frac{k^2-t^2}{k^2}\right)\, dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{et} \quad \rho_k = \int_0^{1/2} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)\, dt.}$$

Q24. Par croissance de la fonction $(x \mapsto -\ln(1-x))$, on obtient :

$$0 \leqslant \rho_k \leqslant \int_0^{1/2} -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)\, dt = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \quad \sim \frac{1}{8k^2}.$$

Les théorèmes de comparaison sur les séries permettent de conclure que $\boxed{\text{la série } \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k \text{ converge.}}$

Q25. La fonction ln admet pour primitive $(t \longmapsto t\ln t - t)$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{n-1/2} \ln t\, dt = [t\ln t - t]_{1/2}^{n-1/2} &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1 \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - n + \frac{\ln 2}{2} + 1.
\end{aligned}$$

Or $\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{n}{2n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)=-\frac{1}{2}$. Donc :

$$\int_{1/2}^{n-1/2}\ln t\,dt=\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}+\circ(1).$$

D'après **Q24.**, il existe un réel ℓ tel que $\sum_{k=1}^{n-1}\rho_k=\ell+\circ(1)$ donc, d'après **Q22.** :

$$\boxed{\exists\, c\in\mathbb{R}\ /\ \ln\Gamma(n)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n-n+c+\circ(1).}$$

On en déduit que

$$\Gamma(n)=\exp\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln n-n+c+\circ(1)\right)=n^{n-\frac{1}{2}}\ e^{-n}\ e^{c}\ e^{\circ(1)}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}e^{\circ(1)}=1$, on obtient bien

$$\boxed{\Gamma(n)\underset{+\infty}{\sim}e^{c}\ n^{n-\frac{1}{2}}\ e^{-n}.}$$

Q26. Pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $\Gamma_n(x)=\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\,dt.$

En utilisant le changement de variable $u=\frac{t}{n}$, on obtient :

$$\boxed{\Gamma_n(x)=n^x\int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)^n\ du.}$$

Q27. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ l'assertion $\mathscr{H}_n$ suivante : $\boxed{\forall\, x>0,\quad \Gamma_n(x)=\frac{n^x\ n!}{x(x+1)\dots(x+n)}}.$

- Initialisation :

$$\forall\, x>0,\quad \Gamma_1(x)=\int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)\ du=\left[\frac{u^x}{x}-\frac{u^{x+1}}{x+1}\right]_{x\to 0}^1=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1^x\ 1!}{x(x+1)}.$$

  Cela prouve que $\mathscr{H}_1$ est vraie.
- Hérédité : supposons $\mathscr{H}_n$ vraie à un rang fixé n et montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

  Prenons $x>0$. On a $\Gamma_{n+1}(x)=(n+1)^x\int_0^1 u^{x-1}\,(1-u)^{n+1}\ du.$

  On procède à une intégration par parties à l'aide de

$$\forall x\in]0,1],\quad \alpha(u)=(1-u)^{n+1},\quad \alpha'(u)=-(n+1)(1-u)^n,\quad \beta'(u)=u^{x-1},\quad \beta(u)=\frac{u^x}{x}.$$

  Comme $x>0$, $\lim_{u\to 0}\alpha(u)\beta(u)=0$ et $\alpha(1)\beta(1)=0$, donc

$$\begin{aligned}\Gamma_{n+1}(x)&=(n+1)^x\int_0^1(n+1)(1-u)^n\frac{u^x}{x}\,du=\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\ \frac{\Gamma_n(x+1)}{n^{x+1}}\\&\underset{\mathscr{H}_n}{=}\frac{(n+1)^{x+1}}{x}\ \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+1+n)}\\&=\frac{(n+1)^x\ (n+1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

- On a bien montré le résultat par récurrence.

Q28. Désignons par $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t\in]0,n[\\ 0 & \text{si } t\geqslant n. \end{cases}$$

Pour $x>0$ fixé, on a : $\forall\, n\geqslant 1,\quad \Gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt.$

Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée :

- Les fonctions f_n sont continues (par morceaux) sur l'intervalle d'intégration $\mathbb{R}_+^*$.
- Convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
  On fixe $t>0$. Alors $\exists\, n_0\in\mathbb{N}^* \;/\; \forall\, n\geqslant n_0,\quad 0<t<n.$
  Ainsi $f_n(t) = \exp\left(n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\right) t^{x-1} = \exp\left(n\left(-\dfrac{t}{n}+\circ\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) t^{x-1} = \exp\left(-t+\circ(1)\right) t^{x-1}$
  et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}\,t^{x-1}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction $f: t\longmapsto e^{-t}\,t^{x-1}$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Domination : Par concavité de ln, on a $\forall\, u>-1,\quad \ln(1+u)\leqslant u$, et par croissance de l'exponentielle :

$$\forall\, t\in]0,n[,\quad 0\leqslant f_n(t)\leqslant t^{x-1}\,e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\leqslant t^{x-1}e^{-t}$$

  et l'inégalité reste vraie pour $t\geqslant n$. Donc

$$\forall\, t\in]0,+\infty[,\quad 0\leqslant f_n(t)\leqslant t^{x-1}e^{-t} = f(t)$$

  et f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque $\Gamma(x)$ existe.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt = \Gamma(x).}$$

La question **Q27.** fournit :

$$\boxed{\forall\, x>0,\quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x\;n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.}$$

Q29. Fixons $x>0$. Une récurrence utilisant le résultat de **Q20.** montre que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x)$$

Donc

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\;n^x} = \frac{x(x+1)\dots(x+n)\Gamma(x)}{(x+n)\;(n-1)!\;n^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x(x+1)\dots(x+n)\Gamma(x)}{n!\;n^x}$$

On déduit alors de **Q28.** que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\;n^x} = 1 \quad\text{soit}\quad \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\;n^x}\underset{n\to+\infty}{\sim} 1.}$$

Avec $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right) \sim \Gamma(n)\,\sqrt{n}$. Puis **Q21.** fournit $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi} \sim \Gamma(n)\,\sqrt{n}$.
Mais d'après **Q20.**, $(2n)! = \Gamma(2n+1)$ et $n! = n\Gamma(n)$. Donc $\Gamma(2n+1)\sqrt{\pi} \sim n\,\Gamma^2(n)\sqrt{n}\,2^{2n}$.
On utilise ensuite **Q25.** sur $\Gamma(2n+1)$ et $\Gamma^2(n)$ et on arrive à

$$e^c \sim \frac{(2n+1)^{2n}\sqrt{2}\,e^{-1}\sqrt{\pi}}{(2n)^{2n}} \sim \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} e^{-1}\sqrt{2\pi}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} = e$ donc

$$\boxed{e^c = \sqrt{2\pi}.}$$

PROBLÈME 2

Blocs de Jordan

Partie I - Irréductibilité de J_λ

Q.30 On a $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\left\{\begin{array}{rcl} \forall j \in [\![1, p-1]\!],\quad u_0(e_j) & = & e_{j+1} \\ u_0(e_p) & = & 0 \end{array}\right.$, puis $\left\{\begin{array}{rcl} \forall j \in [\![1, p-2]\!],\quad u_0(e_j) & = & e_{j+2} \\ u_0(e_p) & = & 0 \\ u_0(e_{p-1}) & = & 0 \end{array}\right.$.

$$\boxed{\text{Ainsi}\quad J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

De manière analogue :

$$\boxed{J_0^{p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_0^p = 0_p.}$$

On en déduit donc que $\boxed{J_0 \text{ est nilpotente d'indice } p.}$

Q31. J_λ est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Et u_λ et J_λ ont même spectre donc

$$\boxed{Sp(u_\lambda) = \{\lambda\}.}$$

De plus $J_\lambda - \lambda I_p = J_0$ et le rang de J_0 vaut $p-1$ donc, par le théorème du rang :

$$dim(\ker(J_\lambda - \lambda I_p)) = p - (p-1) = 1.$$

Il est clair que e_p est un vecteur non nul tel que $u_\lambda(e_p) = \lambda e_p$ donc

$$\boxed{\text{Le sous espace propre de } u_\lambda \text{ associé à } \lambda \text{ est Vect}(e_p).}$$

Q32. On remarque que : $u_\lambda = u_0 + \lambda Id_{\mathbb{R}^p}$, donc $\forall X \in E, \quad u_\lambda(X) = u_0(X) + \lambda X$.
Soit V un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

- Supposons V stable par u_λ. On a alors

  $$\forall X \in V, \quad u_0(X) = \underbrace{u_\lambda(X)}_{\in V} - \underbrace{\lambda X}_{\in V} \quad \text{donc} \quad u_0(X) \in V.$$

  Donc V est stable par u_0.
- On montre de même que si V est stable par u_0 alors V est stable par u_λ.
- Conclusion : $\boxed{V \text{ est stable par } u_\lambda \text{ si et seulement si } V \text{ est stable par } u_0.}$

Q33. La matrice de u_λ dans la base $\tilde{\mathscr{B}}$ est une matrice par blocs de la forme :

$$W = \begin{pmatrix} A \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R}) & B \in \mathscr{M}_{p-k,k}(\mathbb{R}) \\ & \\ 0 \in \mathscr{M}_{k,p-k}(\mathbb{R}) & D \in \mathscr{M}_{p-k,p-k}(\mathbb{R}) \end{pmatrix}$$

où A est la matrice de v dans la base $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$.

Q34. Notons P le polynôme caractéristique de u_λ et Q celui de v. On a pour tout réel x

$$P(x) = det(xI_p - W) = det \begin{pmatrix} xI_k - A & -B \\ & \\ 0 & xI_{p-k} - D \end{pmatrix} = det(xI_k - A) \times det(xI_{p-k} - D) = Q(x) \times R(x).$$

Or $det(xI_k - A) = Q(x)$ et R est un polynôme.
Donc $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } v \text{ divise celui de } u_\lambda.}$

On en déduit que $Sp(v) = \{\lambda\}$. Si X est un vecteur propre de v associé à λ alors $X \in V$ et $v(X) = \lambda X$ donc $u_\lambda(X) = \lambda X$ donc X est est un vecteur propre de u_λ associé à λ. Et comme l'espace propre de u_λ associé à λ est de dimension 1 engendré par e_p, $X \in Vect(e_p)$. Puisque X est non nul, nécessairement

$$\boxed{e_p \in V}$$

Q35. Supposons par l'absurde qu'il existe deux sous espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^p$, stables par u_λ, non réduits à $\{0\}$ et tels que $V \oplus W = \mathbb{R}^p$.
Comme ces sous espaces sont non nuls, d'après **Q34.**, ils contiennent tous deux e_p et cela contredit le fait qu'ils soient en somme directe.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de sous espaces vectoriels } V \text{ et } W \text{ de } \mathbb{R}^p\text{, stables par } u_\lambda\text{, non réduits à } \{0\} \text{ et tels que } \quad V \oplus W = \mathbb{R}^p.}$$

Partie II - Stabilité du système linéaire associé

Q36. Par hypothèse X_0 est un vecteur non nul tel que $\quad J_\lambda X_0 = \lambda X_0$.
La fonction $\tilde{X}$ est bien de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{X}'(t) = \lambda e^{\lambda t} X_0 = e^{\lambda t} \lambda X_0 = e^{\lambda t} J_\lambda X_0 = J_\lambda \tilde{X}(t).$$

$$\boxed{\text{Donc } \tilde{X} \text{ est solution particulière de } (S).}$$

Q37. Par opérations sur les fonctions de classe C^1, la fonction φ est de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k + e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k.$$

Par ailleurs, $\quad J_\lambda = J_0 + \lambda I_p \quad$ donc

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad J_\lambda \varphi(t) &= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^{k+1} + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \\
&= e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \\
&= e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_0^k + \lambda e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \quad \text{car, avec } \textbf{Q30.}, \quad J_0^p = 0_p.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = J_\lambda \varphi(t) = J_\lambda exp(tJ_\lambda)$$

Comme $J_\lambda = J_0 + \lambda I_p$ commute avec J_0, J_λ commute aussi avec $exp(tJ_\lambda)$ et

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = J_\lambda exp(tJ_\lambda) = exp(tJ_\lambda) J_\lambda.}$$

Q38. D'après **Q30.**, $\quad \forall k \geqslant p, \quad J_0^k = 0_p. \quad$ Donc on peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad exp(tJ_\lambda) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} J_0^k$$

et cette somme est en fait une somme finie. $\quad$ On a aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad exp(-tJ_\lambda) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} J_0^k.$$

On peut donc calculer en manipulant en réalité des sommes finies :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad exp(tJ_\lambda) \times exp(-tJ_\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \left(\frac{t^\ell}{\ell!} J_0^\ell \, \frac{(-t)^{k-\ell}}{(k-\ell)!} J_0^{k-\ell} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} \right) J_0^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \left(1 + (-1)\right)^k J_0^k \\
&= I_p \quad \text{car les termes autres que pour } k = 0 \text{ sont nuls.}
\end{aligned}$$

On en conclut que, pour tout réel t,

$$\boxed{\text{la matrice } exp(tJ_\lambda) \text{ est inversible d'inverse } exp(-tJ_\lambda).}$$

Q39. Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $Y : t \longmapsto exp(-tJ_\lambda)X(t)$. On a donc, par **Q38.**, $X : t \longmapsto exp(tJ_\lambda)Y(t)$. La fonction φ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on déduit que X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Supposons donc X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et , par **Q37.** :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) &= -\varphi'(-t)X(t) + \varphi(-t)X'(t) \\ &= -exp(-tJ_\lambda)J_\lambda X(t) + exp(-tJ_\lambda)X'(t) \\ &= exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t)).\end{aligned}$$

- Si X est solution de (S), on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = 0,$ et comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, Y est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si Y est constante sur $\mathbb{R}$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, \quad exp(-tJ_\lambda)(X'(t) - J_\lambda X(t)) = 0.$ Comme la matrice $exp(-tJ_\lambda)$ est inversible, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) - J_\lambda X(t) = 0$ et X est solution de (S).
- Conclusion : $\boxed{X \text{ est solution de } (S) \text{ si et seulement si } Y \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$

Or Y est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $X_0 \in E$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = X_0.$
Ce qui précède et **Q38.** permettent de conclure que

$$\boxed{X \text{ est solution de } (S) \text{ si et seulement si } \quad \exists\, X_0 \in E \;/\; \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = exp(tJ_\lambda)X_0.}$$

Q40. On suppose $\lambda > 0.$ Prenons $X_0 = e_p.$ On a alors :

$$J_0 X_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J_0^k X_0 = 0 \quad \textbf{mais} \quad J_0^0 X_0 = X_0.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = exp(tJ_\lambda)X_0 = e^{\lambda t}X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

D'après **Q39.**, X est solution de (S) et comme $\lambda > 0$, cette solution n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{Si} \quad \lambda > 0, \quad (S) \text{ admet une solution non bornée sur } \mathbb{R}_+.}$$

Q41. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et $X \in E.$ Alors $AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j.$

Donc

$$||AX||^2 = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \right)^2.$$

À i fixé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans $\mathbb{R}^p$ donne

$$\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2 \right) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2 \right) ||X||^2.$$

On en déduit :

$$||AX||^2 \leqslant ||X||^2 \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2 \right) \leqslant ||X||^2 \; (N(A))^2.$$

Ainsi, comme on a des nombres positifs :

$$\boxed{\forall\, A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}), \quad \forall\, X \in E, \quad ||AX|| \leqslant N(A)||X||.}$$

Considérons ensuite $\lambda < 0$ et une solution X de (S). D'après **Q39.**, il existe $X_0 \in E$ tel que $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = exp(tJ_\lambda)X_0$. Donc, par ce qui précède et comme N est une norme :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad ||X(t)|| \leqslant N(exp(tJ_\lambda))||X_0|| \leqslant e^{\lambda t} N \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} J_0^k \right) ||X_0|| \leqslant ||X_0|| e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k).$$

Comme $\lambda < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} ||X_0|| e^{\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k) = 0$.

De plus, la fonction $\left(t \longmapsto |X_0|| e^{\lambda t} \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N(J_0^k) \right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{Si} \quad \lambda < 0 \quad \text{alors toutes les solutions de } (S) \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}_+.}$$

Q42. Supposons à présent $\lambda = 0$. D'après **Q30.** :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad exp(tJ_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ t & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} & \dots & \dots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons $X_0 \in E$ et $X : t \longmapsto exp(tJ_\lambda)X_0$ une solution de (S).
On déduit de la matrice ci-dessus :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si} \quad X_0 \text{ est un vecteur de Vect}(e_p) \text{ alors } X \text{ est bornée.} \\ \text{Sinon, } X \text{ n'est pas bornée.} \end{array}}$$