CCP 2018 - MP2

Exercice I

Q.1 L'intégrale d'une fonction continue existe sur un segment et $(.|.)$ est bien définie.

- La symétrie provient de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- La linéarité par rapport à la première variable découle essentiellement de la linéarité du passage à la limite (et de la distributivité de la multiplication sur l'addition).
- Si $f \in E$ alors $f^2 \geq 0$ et donc $(f|f) \geq 0$. Si cette quantité est nulle, f^2 est une fonction continue positive d'intégrale nulle et est donc nulle. f l'est donc aussi. Ceci nous donne le caractère défini positif.

$$\boxed{(.|.) \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

Q.2 On pourrait utiliser les formules de Schmidt. Cepedant, il est immédiuat que $(u|v)$ et il nous suffit de normer les vecteurs pour obtenir une base orthonormée.

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u, \sqrt{\frac{3}{2}}v\right) \text{ est une b.o.n. de } F}$$

Q.3 D'après les règles de calcul en base orthogonale (et en notant p la projection orthogonale sur F)

$$p(w) = \frac{(w|u)}{\|u\|^2}u + \frac{(w|v)}{\|v\|^2}v$$

Une intégration par partie donne, en posant $I_n = \int_{-1}^{1} t^n e^t \, dt$,

$$I_n = e - \frac{(-1)^n}{e} - nI_{n-1}$$

On en déduit que

$$I_0 = e - \frac{1}{e},\ I_1 = \frac{2}{e},\ I_2 = e - \frac{5}{e}$$

et ainsi

$$\boxed{p(w) = \frac{e + e^{-1}}{2}u + \frac{3}{e}w}$$

On remarque que

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 \, dt = \inf_{f\in F} \|w - f\|^2 = d(w,F)^2$$

D'après le cours, cette distance est atteinte pour $f = p(w)$ et vaut donc $\|w - p(w)\|^2$. En écrivant que $w = (w - p(w)) + p(w)$ et en remarquant que $w - p(w)$ et $p(w)$ sont orthogonaux, on a alors aussi (par Pythagore)

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 \, dt = \|w\|^2 - \|p(w)\|^2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \frac{(w|u)^2}{\|u\|^2} - \frac{(w|v)^2}{\|v\|^2}$$

Un calcul au brouillon permet de simplifier cette expression et d'ontenir

$$\boxed{\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left(e^t - (a+bt)\right)^2 \, dt = 1 - \frac{7}{e^2}}$$

Exercice II

Q.4 Dans le produit proposé il y a k termes, ce qui est un nombre indépendant de n. Chacun des termes est de limite 1 quand $n \to +\infty$. Par théorème d'opération,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}\right)=1}$$

Par définition de la loi binomiale, et en posant $p_n = \frac{\lambda}{n}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}\right)(np_n)^k(1-p_n)^{n-k}
\end{aligned}$$

$(np_n)^k$ est égal à λ^k. $(1-p_n)^{n-k} = (1-p_n)^{-k} e^{n\ln(1-p_n)}$ tend vers $1 \times e^{-\lambda}$ (en écrivant que $\ln(1-p_n) \sim -\frac{\lambda}{n}$ puis par continuité de exp). Finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$$

Q.5 Pour$1 \leq i \leq n$, on note B_i la variable de Bernouilli valant 1 si le candidat est interrogé le jour de son anniversaire. C'est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{365}$.
X_n est la somme de B_i. Comme les B_i sont des variables indépendantes, X_n suit une loi binomiale (dont l'espérance est donnée par le cours ou par linéarité comme somme des espérances des B_i).

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/365),\ \mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{365}}$$

Q.6 Comme $\frac{1}{365} \leq 0,01$, on est dans le cadre d'approximation précédente et on peut considérer que X_n suit une loi de Poisson de paramère $\frac{219}{365} = \frac{3}{5}$. La probabilité que X_n soit égal à 2 (c'est une façon de comprendre l'énoncé) est approché par $e^{-3/5}\frac{9}{25}\frac{1}{2!}$ et comme $-3/5 = -0,6$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 2) \approx 0,099}$$

On peut aussi comprendre l'énoncé comme "au moins deux étudiants sont convoqués le jours de leur anniversaire". Il faut alors estimer $\mathbb{P}(X_n \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - e^{-0,6}(1 + 3/5)$. On obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 2) \approx 0,12}$$

Problème

Questions préliminaires

Q.7 Par hypothèse, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ où les d_i sont tous des valeurs propres de u (il suffit de choisir une base de diagonalisation). $P(u)$ est alors représenté par $P(D) = \mathrm{diag}(P(d_1), \dots, P(d_n))$. Chaque d_i étant racine de P, on conclut que $P(D) = 0$ et donc que $P(u) = 0$.

$$\boxed{P = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_p) \text{ est annulateur de } u}$$

Q.8 Les μ_i étant deux à deux distincts, les polynômes $X-\mu_i$ sont premiers entre eux deux à deux. Par lemme des noyaux,

$$\ker(Q(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u-\mu_i Id)$$

Q annulant u, cet espace est égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier. En ne conservant que les μ_i tels que $\ker(u-\mu_i Id) \neq \{0\}$ et en concaténant des bases de ces espaces, on obtient une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux font tous partie des μ_i. Ainsi,

$$\boxed{u \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable et } \mathrm{Sp}(u) \subset \{\mu_1, \dots, \mu_r\}}$$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q.9 On a $\chi_V = X^2-3X+2 = (X-1)(X-2)$ et les valeurs propres de V sont donc 1 et 2. Il y a deux valeurs propres et on est en dimension 2 et ainsi V est diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1. Comme $(2,-3)$ et $(1,-1)$ sont propres, ils engendrent chacun un sous-espace propre. On a

$$\boxed{V = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Q.10 En faisant un produit par bloc, on vérifie que Q est inversible d'inverse

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$$

(il suffit de vérifier que $QQ^{-1} = I_{2n}$). Un produit par blocs montre alors que

$$\boxed{Q^{-1} \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}}$$

ce qui donne la similitude voulue.

Q.11 On obtien

$$\boxed{\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0 \\ 0 & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}}$$

A est semblable à B elle même semblable à une matrice diagonale. Par transitivité de la relation de similitude,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$$

Q.12 On a vu que

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = QBQ^{-1}$$

Appliquons le polynôme T qui annule la matrice de droite :

$$0 = QT(B)Q^{-1}$$

En multipliant par Q^{-1} à gauche et Q à droite, on conclut que $T(B) = 0$.
On montre par une récurrence immédiate que $B^k = \mathrm{diag}(A^k, (2A)^k)$ et en combinant linéairement, $T(B) = \mathrm{diag}(T(A), T(2A))$.
On en déduit alors que

$$\boxed{T(A)=0}$$

Ainsi , A est diagonalisable puisqu'elle est annulée par un polynôme scindé simple. Finalement,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A \text{ l'est}}$$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q.13 On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice E. On a

$$f(1,1) = (1,1) \quad \text{et} \quad f(-1,0) = (-3,-2) = -2(1,1) + (-1,0)$$

On peut alors obtenir la matrice de f dans la base $((1,1),(-1,0))$ et on le traduit matriciellement par

$$\boxed{P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Q.14 De manière similaire à précédemment, $Z = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et un calcul par blocs donne

$$\boxed{Z^{-1}\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}}$$

Q.15 Montrons par récurrence que

$$F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

- C'est vrai au rang $k = 0$ car $F^0 = I_{2n}$.
- Supposons le résultat vrai au rang k. Il suffit alors d'un calcul par bloc pour voir que cela reste vrai au rang $k+1$.

En notant $U = \sum_{k=0}^{d} u_k X^k$, on en déduit que

$$U(F) = \begin{pmatrix} U(A) & V(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad V(A) = -2\sum_{k=1}^{d} k u_k A^{k-1} = -2AU'(A)$$

Comme $U(F) = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} = 0}$$

Q.16 Ce qui précède montre que U et XU' annulent A et sont donc multiples du polynôme minimal de μ_A de A (l'ensemble des polynômes annulateurs étant l'idéal engendré par μ_A). On en déduit que μ_A divise $U \wedge XU'$.
Or, U étant scindé simple, U et U' sont premiers entre eux (aucun des diviseurs irréductible de U ne divise U') et donc $U \wedge XU' = U \wedge X$.
Ainsi, μ_A est un diviseur de X. Or $\deg(\mu_A) \geq 1$ (un polynôme constant non nul n'annule aucune matrice) et ainsi $\mu_A = X$ (μ_A est unitaire). Comme μ_A annule A, A est nulle.

$$\boxed{\mu_A = X \text{ et } A = 0}$$

Q.17 Si $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable alors F (qui lui est semblable) l'est aussi. On vient alors de voir que $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$ alors $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est nulle est donc diagonalisable.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A = 0}$$

Q.18 $\chi_F(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - F)$ est un déterminant bloc triangulaire. Avec la formule rappelée par l'énoncé,

$$\boxed{\chi_F = \chi_A^2}$$

Si F est trigonalisable alors χ_F est scindé et tout diviseur de χ_F l'est donc aussi. Ainsi, χ_A est scindé et A est trigonalisable.
Réciproquement, si A est trigonalisable alors χ_A est scindé et donc χ_F aussi. F est alors trigonalisable.

$$\boxed{F \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } A \text{ l'est}}$$

Q.19 Soit $A = \operatorname{diag}(M, 0)$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\chi_A = X^{n-2}(X^2+1)$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et A n'est donc pas trigonalisable. Avec la question précédente, F ne l'est pas.

Applications

Q.20 Si on pose $V = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (symétrique réelle). On vérifie aisément que $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres. Comme en Q10, on vérifie que $Q = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ et que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 3V & 0 \\ 0 & -V \end{pmatrix}$$

Cette forme diagonale par bloc montre que les sous-espaces engendré par les 2 premiers (resp. 2 derniers) vecteurs de la nouvelle base (celle formée par les colonnes de Q) engendrent un espace stable par l'endomorphisme u.

$$\boxed{\operatorname{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1)) \text{ et } \operatorname{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)) \text{ sont stables par } u}$$

Q.21 On a cette fois $M = \begin{pmatrix} 4I_2 & 2I_2 \\ 2I_2 & 4I_2 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable (symétrique réelle) et on vérifie aisément que $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres (associés à 6 et 2). Comme en Q10, on vérifie que $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 6I_2 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{pmatrix}$$

Q.22 En notant $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$U'(t) = MU(t)$$

Le cours nous apprend que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 4. Si X est vecteur propre de M associé à λ, on vérifie que $t \mapsto e^{\lambda t} X$ est une solution. La question précédente donne alors quatre solutions indépendantes qui forment une base de l'ensemble des solutions. La solution générale est ainsi

$$\boxed{t \mapsto c_1 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Q.23 La solution telle que $\varphi(0) = (a, b, c, d)$ est associée à des constantes c_i telles que

$$P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

On a alors

$$e^M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \varphi(1) = c_1 e^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$e^M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 & e^2 \\ e^6 & 0 & -e^2 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 & -e^2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^M = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 & e^2 \\ e^6 & 0 & -e^2 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 & -e^2 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 & 0 \\ 0 & e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 \\ e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 & 0 \\ 0 & e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 \end{pmatrix}}$$