Programme de colle – MPI

1. Compacité

Reprise pour exercices.

2. Connexité par arcs

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Connexité par arcs	
Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points; partie connexe par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

3. Topologie matricielle

S'ajoute à la liste de la dernière colle :

- Connexité par arcs ou non de l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, des matrices diagonalisables, de $\mathscr{O}(n)$.

4. Fonctions vectorielles

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

Contenus	Capacités & commentaires
Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction en termes de coordonnées dans une base.
Dérivabilité à droite et à gauche.	
Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire.	
Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est multilinéaire.	Cas du produit scalaire, du déterminant.
Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	
Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$.	Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire $\displaystyle\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.	
Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	
Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	
Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Dérivation de $t\mapsto\exp(ta)$ de $t\mapsto\exp(tA)$. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.

Adaptation au cas vectoriel de l'étude des séries, des suites de fonctions, des séries de fonctions.

C'est l'occasion de réviser tous ces chapitres vus il y a quelques mois dans le cas numérique et qui peuvent donner lieu à des exercices.

La propriété sur l'exponentielle d'une somme sera démontrée dans le chapitre *équations différentielles*.

5. Endomorphismes des espaces euclidiens

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
Linéarité de $u\mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint. Matrice de l'adjoint en base orthonormée. Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion. Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte. Groupe spécial orthogonal.	Notation $\mathrm{SO}(E)$.

Pas de réduction des isométries, de descriptions des matrices orthogonales en dimension 2 ou 3 ni d'automorphismes autoajoints au programme cette semaine.

Semaine de la rentrée : Endomorphismes des espaces euclidiens (suite), calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$, équations différentielles.

6. Questions de cours

- *Les questions de cours (i) à (v) sont posables à tout le monde.*
- *Les questions de cours muni d'un astérisque ✻ ne sont posables qu'aux trinômes 5, 6, 7.*
- ***Les membres de ces trois trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne seront pas interrogés dessus.***

(i) Image continue d'un compact et théorème des bornes atteintes.

(ii) Relation d'équivalence des chemins continus.
Les convexes et parties étoilées sont connexes par arcs.

(iii) Connexes par arcs de $\mathbb{R}$, image continue d'un connexe par arcs (application : TVI).

(iv) Théorème de représentation de Riesz. Application : si E euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$, $(u(x)|y) = (x|v(y))$ (assurant la bonne définition de l'adjoint).

(v) Les différentes propriétés de l'adjoint : linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité, matrice en BON, adjoint et sous-espace stable.

(vi) **Exercice CCINP 40, 61, 63, 78.**

(vii) ✻ Continuité de $\exp$ sur $\mathscr{L}(E)$, où E est de dimension finie. Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(viii) ✻ Caractérisations des isométries vectorielles (conservation du produit scalaire, transformation de base orthonormée en base orthonormée, matrice orthogonale en base orthonormée, inversibilité et adjoint égal à l'inverse).

(ix) ✻ **Exercice classique : topologie matricielle**

1. Densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
2. Densité de l'ensemble des matrices diagonalisable dans l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (donc dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
3. Continuité de $\det$, de $A \mapsto \chi_A$, de $A \mapsto \operatorname{Com} A$, de $A \mapsto A^{-1}$.
4. $\mathscr{O}(n)$ est compact et n'est pas connexe par arcs.
5. $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

(x) ✻ **Exercice classique : décomposition QR et inégalité de Hadamard**

1. Montrer que si $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $Q \in \mathscr{O}(n)$ et une matrice $R \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = QR$.
2. Connaissant une telle décomposition, les déterminer toutes.
3. On veut montrer l'**inégalité de Hadamard** : si M est une matrice carrée réelle, $(C_1, \dots, C_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $||.||$ la norme euclidienne canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors
$$|\det M| \leqslant ||C_1|| \cdots ||C_n||$$
   a) Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.
   b) Montrer l'inégalité lorsque M est inversible en utilisant une décomposition QR.

(xi) ✻ **Exercice classique : théorème des compacts emboîtés et propriété de Borel Lebesgue**
Les deux questions sont indépendantes.
Soit K une partie compacte non vide d'un espace normé $(E, ||\cdot||)$.

1. Montrer que si (F_n) une suite décroissante de parties fermées de K (donc compactes) et non vides, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$..
2. On veut montrer que K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : « De tout recouvrement de K par des ouverts : $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i$, on peut extraire un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{i \in J} \mathscr{O}_i$ où J partie finie de I. »
   a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.
   b) On suppose que $K \subset \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i$ où les $\mathscr{O}_i$ sont des ouverts. Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$,
$$\exists\, i \in I, \quad B(x, \varepsilon) \subset \mathscr{O}_i.$$
   En déduire que K vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

7. Exercices CCINP

- **CCINP 40** Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $||\ ||$.
On suppose que : $\forall (u, v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.
   1. Soit u un élément de A tel que $||u|| < 1$.
      (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
      (b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que
$$(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$
   2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

- **CCINP 61**
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose
$$||A|| = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |a_{i,j}|.$$
   1. Prouver que $||\cdot||$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   2. Démontrer que
$$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2, \ ||AB|| \leqslant n||A||\,||B||.$$
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$,
$$\left\|A^p\right\| \leqslant n^{p-1} ||A||^p.$$
   3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?

- **CCINP 63 : endomorphismes normaux**

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$. On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   (ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   (iii) $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

- **CCINP 78**

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $\left(x|y\right)$ le produit scalaire de x et de y et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que

$$\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||x||.$$

   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. C'est-à-dire

$$\mathscr{O}(E) = \{u \in \mathscr{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}.$$

   Démontrer que $\mathscr{O}(E)$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathscr{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.