

## Programme de colle – MPI

### 1. Réduction

Révision de la première partie du chapitre, à laquelle s'ajoute

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée</b>	
Pour $u$ dans $\mathcal{L}(E)$ , morphisme d'algèbres $P \rightarrow P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ . Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de $u$ . Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$ . Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. Si $d$ est le degré du polynôme minimal de $u$ , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ . Si $P$ annule $u$ , toute valeur propre de $u$ est racine de $P$ . Les racines de $\pi_u$ dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de $u$ .	Traduction matricielle.  Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$ .  Si $u(x) = \lambda x$ , alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .
<b>h) Lemme de décomposition des noyaux</b>	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à $P$ , alors :	
$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$	
<b>i) Polynômes annulateurs et réduction</b>	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.	Traduction matricielle.  Traduction matricielle.
<b>j) Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques</b>	
Théorème de Cayley-Hamilton. Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; $E$ est somme directe des sous-espaces caractéristiques de $u$ . Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	La démonstration n'est pas exigible. Dimension d'un sous-espace caractéristique.

### 2. Topologie (Limite, continuité, compacité)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>e) Étude locale d'une application, continuité</b>	
Limite en un point adhérent à une partie $A$ . Caractérisation séquentielle.  Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\ x\ $ tend vers $+\infty$ , limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $A$ est une partie de $\mathbb{R}$ , limite infinie en $a$ adhérent à $A$ pour une fonction réelle.  Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue. Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où $A$ est une partie non vide de $E$ .
<b>f) Applications linéaires et multilinéaires continues</b>	
Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que	Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$ .
$\forall x \in E, \ u(x)\  \leq C \ x\ .$	
Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.	Notations $\  \ u\  \ , \  \ u\ _{op}$ . La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ . Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices. La démonstration n'est pas exigible.
Critère de continuité des applications multilinéaires.	
<b>g) Parties compactes d'un espace normé</b>	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Un fermé relatif d'une partie compacte est compact. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
<b>h) Applications continues sur une partie compacte</b>	
Image continue d'une partie compacte. Théorème de Heine. Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.	On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.
<b>i) Espaces vectoriels normés de dimension finie</b>	
Équivalence des normes en dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé. Si $E$ est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$ . Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Étude sur quelques exemples de la limite et de la continuité d'une fonction réelle de deux variables réelles : celles des applications partielles sont nécessaires mais non suffisantes. Changement de variable (par composition) par exemple en polaire.

### 3. Topologie matricielle

Rien n'est officiellement au programme, mais les notions suivantes ont été travaillées en TD et peuvent donner lieu à des exercices. Tous ces résultats sont à démontrer pour être utilisés.

- Normes matricielles usuelles, normes subordonnées associées.
- Continuité de  $\det, \text{Com}$  (application : coefficient de degré 1 de  $\chi_M$ ,  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^{-1}$ ,  $M \mapsto \chi_M$ ).
- Non continuité du rang, de  $M \mapsto \pi_M$ .

- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (exemple d'application : théorème de Cayley-Hamilton), absence de densité en remplaçant  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$ .
- $\theta(n)$  est compact (à partir de la définition, aucune interprétation géométrique pour le moment.)
- Caractère ouvert et/ou fermé de l'ensemble des matrices de rang  $p$  fixé.

**Semaine prochaine :** Connexité par arcs, fonctions vectorielles, endomorphismes des espaces euclidiens.

## 4. Questions de cours

- Les questions de cours (i) à (v) sont posables à tout le monde.
  - Les questions de cours muni d'un astérisque \* ne sont posables qu'aux trinômes 5, 6, 7.
  - Les membres de ces trinômes doivent savoir faire tous les exercices CCINP mais ne pourront être éventuellement interrogés que sur les exercices 13, 36, 38.
- (i)  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme simplement scindé.
- (ii) Si  $F$  est un sous-espace stable, relation entre polynôme caractéristique (révision), polynôme minimal, diagonalisabilité de l'endomorphisme induit par rapport à ceux de l'endomorphisme. Savoir en déduire les sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.
- (iii)  $x \mapsto d(x, A)$  est 1-lipshitzienne.
- (iv) Image continue d'un compact et théorème des bornes atteintes.
- (v) Théorème de Bolzano-Weierstraß dans un espace de dimension finie. Application : un sous-espace de dimension finie est fermé.
- (vi) **CCINP 1, 13, 35, 36, 38, 65, 88, 91, 93.**
- (vii) \* Lemme de décomposition des noyaux (pour un produit de deux polynômes).
- (viii) \* Caractérisation de la trigonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur scindé.
- (ix) \* Théorème de Cayley-Hamilton.
- (x) \* Propriétés des sous-espaces caractéristiques : ce sont des sous-espaces stables, supplémentaires, de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante. Matrice dans une base adaptée.
- (xi) \* Théorème de Heine. Une suite d'un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Application aux suites bornées en dimension finie.
- (xii) \* **Exercice classique – Décomposition de Dunford**  
Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est tel que  $\chi_u$  est scindé, unicité de la décomposition  $u = d + n$  où  $d$  et  $n$  sont respectivement diagonalisable et nilpotent, et commutent. L'existence est déjà démontrée dans la question de cours (x). Ce sont en outre des polynômes en  $u$ .
- (xiii) \* **Exercice classique – Codiagonalisabilité**
- Deux endomorphismes diagonalisables sont simultanément diagonalisables (ou codiagonalisables) si et seulement s'ils commutent.
  - Expliquer comment cela se généralise à une famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'endomorphisme diagonalisables commutant deux à deux.

## 5. Exercices CCINP

- **CCINP 1** On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On pose  $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$  et  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

- Les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  sont-elles équivalentes ? Justifier.
- Dans cette question, on munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

(a) Soit  $u : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(0) \end{cases}$

Prouver que  $u$  est une application continue sur  $E$ .

(b) On pose  $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ .

Prouver que  $F$  est une partie fermée de  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

- Dans cette question, on munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ .

Soit  $c : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 \end{cases}$

On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\|f_n - c\|_1$ .

(b) On pose  $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ .

On note  $\bar{F}$  l'adhérence de  $F$ .

Prouver que  $c \in \bar{F}$ .

$F$  est-elle une partie fermée de  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$  ?

- **CCINP 13**

- Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
- Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
- Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
- On se place sur  $E = \mathbb{R}[X]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  définie pour tout polynôme  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  de  $E$  par :  $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$ .
  - Justifier que  $S(0, 1) = \{P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_1 = 1\}$  est une partie fermée et bornée de  $E$ .
  - Calculer  $\|X^n - X^m\|_1$  pour  $m$  et  $n$  entiers naturels distincts.  $S(0, 1)$  est-elle une partie compacte de  $E$ ? Justifier.

- **CCINP 35** :  $E$  et  $F$  désignent deux espaces vectoriels normés.

- Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $a$  un point de  $E$ . On considère les propositions suivantes :

**P1.**  $f$  est continue en  $a$ .

**P2.** Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ , alors  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$ .

Prouver que les propositions **P1** et **P2** sont équivalentes.

- Soit  $A$  une partie dense dans  $E$ , et soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $E$  dans  $F$ . Démontrer que si, pour tout  $x \in A, f(x) = g(x)$ , alors  $f = g$ .

■ **CCINP 36** : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur le corps  $\mathbb{R}$ .

- Démontrer que si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

**P1.**  $f$  est continue sur  $E$ .

**P2.**  $f$  est continue en  $0_E$ .

**P3.**  $\exists k > 0$  tel que :  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ .

- Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme définie par :  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ . On considère l'application  $\varphi$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$ . Démontrer que  $\varphi$  est linéaire et continue.

■ **CCINP 38** :

- On se place sur  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme  $\| \cdot \|_1$  définie par :  $\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

$$\text{Soit } u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ f & \longmapsto u(f) = g \end{cases} \text{ avec } \forall x \in [0, 1], g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On admet que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .

Prouver que  $u$  est continue et calculer  $\|u\|$ .

**Indication** : considérer, pour tout entier  $n$  non nul, la fonction  $f_n$  définie par  $f_n(t) = ne^{-nt}$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  un  $n$ -uplet **non nul, fixé**.

$$\text{Soit } u : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{cases}$$

- Justifier que  $u$  est continue quel que soit le choix de la norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

- On munit  $\mathbb{R}^n$  de  $\| \cdot \|_2$  où  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ .

Calculer  $\|u\|$ .

- On munit  $\mathbb{R}^n$  de  $\| \cdot \|_\infty$  où  $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ .

Calculer  $\|u\|$ .

- Déterminer un espace vectoriel  $E$ , une norme sur  $E$  et un endomorphisme de  $E$  non continu pour la norme choisie. Justifier.

**Remarque** : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

■ **CCINP 65** : Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

- Démontrer que :  $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .
- (a) Démontrer que :  $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ .  
(b) Démontrer que, pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$  :

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \implies (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

- Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Écrire le polynôme caractéristique de  $A$ , puis en déduire que le polynôme  $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

■ **CCINP 88** :

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Prouver que si  $P$  annule  $u$ , alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On pose  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la matrice de  $E$  définie par  $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par :  $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$ .

- Prouver que le polynôme  $X^2 - 2X + 1$  est annulateur de  $u$ .

- $u$  est-il diagonalisable ?

Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question a).

■ **CCINP 91** : On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- Montrer que  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
- La matrice  $A$  est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
- Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de  $A$ . Vérifier que le polynôme caractéristique de  $A$  en est un polynôme annulateur.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X-1)^2$  et en déduire la valeur de  $A^n$ .

■ **CCINP 93** : Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n > 0$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 + u^2 + u = 0$ . On notera  $\text{Id}$  l'application identité sur  $E$ .

- Montrer que  $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$ .
- (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.  
(b) En déduire que  $\text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ .
- On suppose que  $u$  est non bijectif.  
Déterminer les valeurs propres de  $u$ . Justifier la réponse.

**Remarque** : les questions 1., 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.