Programme de colle – MPI

1. Probabilités

Révisions du chapitre, auquel s'ajoute :
Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
k) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t)=\mathrm{E}(t^X)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)\,t^k$.	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X)=G_X{}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

2. Espaces vectoriels normés

Extrait du programme officiel :

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé. Distance associée à une norme. Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	Vecteurs unitaires. Inégalité triangulaire. On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Normes $\\|\ \\|_1$, $\\|\ \\|_2$, $\\|\ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\\|\ \\|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA)=k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.	Notations $\\|\ \\|_1$ et $\\|\ \\|_2$.
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.
j) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Semaine prochaine : Réduction, topologie (suite).

3. Questions de cours

Les questions de cours (i) à (v) sont posables à tout le monde.
Les questions de cours muni d'une ∗ ne sont posables qu'aux trinômes 5, 6, 7.
Les membres de ces trinômes doivent savoir faire les exercices CCINP mais ne seront pas interrogés dessus.

(i) Pour chaque loi au programme (Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson) : calcul de la fonction génératrice, on retrouve alors l'espérance et la variance.

(ii) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

(iii) Norme N_∞ sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur un ensemble X non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes N_1 et N_2 sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

(iv) Comparaisons (les 6) des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$, avec au moins un cas d'égalité pour chaque comparaison.

(v) Toutes les définitions concernant la topologie.

(vi) **Exercices CCINP 34, 37, 44, 45, 96, 110**.

(vii) ∗ 1-lipschtzianité de la fonction distance à une partie A dans un espace vectoriel normé.

(viii) ∗ Comparaisons des normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

(ix) ∗ L'adhérence est le plus petit fermé contenant la partie.
L'intérieur est le plus grand ouvert contenu dans la partie.

(x) ∗ Caractérisations séquentielles des fermés et des points adhérents.

(xi) ∗ **Identité de Wald** : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi et d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance finie tel que N et toutes les X_n soient indépendantes.
Déterminer la fonction génératrice de $Y=\sum_{\ell=1}^{N}X_\ell$ (on admet que c'est bien une variable aléatoire discrète) et en déduire l'identité de Wald
$$\mathbf{E}\left(\sum_{\ell=1}^{N}X_\ell\right)=\mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1).$$
Retrouver le résultat sans utiliser les fonctions génératrices.

(xii) ∗ **Fonction de répartition** : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction
$$F_X : x\in\mathbb{R}\mapsto \mathbf{P}(X\leqslant x).$$
(a) Montrer que F_X est croissante et déterminer ses limites en $\pm\infty$.
(b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F_X(t)\xrightarrow[t\to x^+]{}\mathbf{P}(X\leqslant x)$ et $F_X(t)\xrightarrow[t\to x^-]{}\mathbf{P}(X<x)$.
Traduction en terme de continuité ?
(c) En déduire que deux variables aléatoires réelles ont même loi si et seulement si leurs fonctions de répartition sont égales.

(xiii) ∗ **Inégalités de Chernov et de Tchebychev-Cantelli**
(a) Soit X une variable aléatoire discrète réelle centrée et vérifiant $|X|\leqslant 1$. Montrer que pour tout $\lambda>0$,
$$\mathbf{E}\left(e^{\lambda X}\right)\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right).$$
(b) Soit X une variable aléatoire discrète réelle qui admet un moment d'ordre 2. Montrer que pour tout $\lambda>0$,
$$\mathbf{P}(X\geqslant\mathbf{E}(X)+\lambda)\leqslant\frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X)+\lambda^2}.$$

Exercices CCINP

- **CCINP 34** : Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.
  1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
  2. Démontrer que : $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $x_n \to x$.
  3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
  4. Soit B une autre partie non vide de E.
     Montrer que $\overline{A\times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

- **CCINP 37** : On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

  On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.
  1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
     (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
     (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
  2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

- **CCINP 44** : Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
  1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
     (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
  2. Montrer que : $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
     Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
  3. (a) Montrer que : $\overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
     (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

- **CCINP 45** : **Les questions 1. et 2. sont indépendantes**.
  Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.
  1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
     (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
  2. On pose : $\forall x \in E$, $\mathrm{d}_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x-a\|$.
     (b) Soit $x \in E$. Prouver que $\mathrm{d}_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
     (b) On suppose que A est fermée et que
     $$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall t \in [0,1],\ \mathrm{d}_A(tx+(1-t)y) \leqslant t\mathrm{d}_A(x) + (1-t)\mathrm{d}_A(y).$$
     Prouver que A est convexe.

- **CCINP 96** : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X=n) = p_n$. La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = \mathbf{E}\left[t^X\right] = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.
  1. Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
  2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
     On pose $S = X_1 + X_2$.
     Démontrer que $\forall t \in]-1,1[,\ G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:
     (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
     (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = \mathbf{E}\left[t^X\right]$.
     Remarque : on admetra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
     On note S_n la somme des numéros tirés.
     Soit $t \in]-1,1[$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

- **CCINP 110** : Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.
  1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
     On considère la série entière $\sum t^n \mathbf{P}(X=n)$ de variable réelle t.
     On note R_X son rayon de convergence.

     (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
     On pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbf{P}(X=n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
     Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

     Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
     (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $\mathbf{P}(X=k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
  2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
     Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
     (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
     Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.