

I Inégalités d'interpolation des dérivées

I.A - Cas particulier $K = 1$

La norme infinie des fonctions continues sur un segment (compact) existe bien selon le théorème des bornes atteintes.

Q 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. Soit $x \in [0, 1]$.

Selon l'inégalité des accroissements finis appliquée à f dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$. On a

$$|f(x) - f(x_1)| \leq \|f'\|_\infty \cdot |x - x_1| \leq \|f'\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire, on a donc $|f(x)| \leq \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)|$

Comme c'est vrai pour tout $x \in [0, 1]$, on a alors

$$\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)|$$

Ceci montre l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1$

Q 2. Pour $C \in]0, 1[$ et la fonction $f : x \mapsto 1$ l'inégalité d'interpolation (I.2) est fautive car

$$\|f\|_\infty = 1 > C = 0 + C \times 1 = \|f'\|_\infty + C \cdot |f(x_1)|$$

I.B - Cas particulier $K = 2$

Q 3. Soit $x \in [0, 1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$. L'égalité des accroissements finis appliquée à f dérivable sur $]x_1, x_2[$ et continue sur $[x_1, x_2]$, nous fournit $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Ainsi l'inégalité des accroissements finis appliquée à f' de classe \mathcal{C}^1 nous donne :

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(x) - f'(c)| \leq \|f''\|_\infty \cdot |x' - c|$$

Ce qui permet de conclure : $\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \|f''\|_\infty$

Q 4. Avec l'inégalité triangulaire et comme $x_2 - x_1 > 0$, on en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| + \|f''\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$$

on a bien $\|f'\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$

Q 5. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$. Avec $C = 1 + \frac{1}{x_2 - x_1}$, on a $C \geq \frac{1}{x_2 - x_1}$, on déduit de Q4 que

$$\|f'\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + C(|f(x_1)| + |f(x_2)|)$$

On a selon I.2 selon Q2 et Q4 :

$$\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)| \leq \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1} + 1 \cdot |f(x_1)|$$

Comme $C \geq \frac{1}{x_2 - x_1}$, on a alors $\|f\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + C|f(x_1)| + C|f(x_2)|$

Dans le cas $K = 2$, on a bien montré l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $C = 1 + \frac{1}{x_2 - x_1}$

I.C - Cas général par interpolation de Lagrange

Q 6. On a facilement $\forall P, Q \in \mathbb{R}_{K-1}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \psi(\lambda P + Q) = \lambda \Psi(P) + \Psi(Q)$ ainsi $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{K-1}[X], \mathbb{R}^K)$.

Soit $P \in \ker(\Psi)$. On a $\Psi(P) = 0$.

Donc $P(x_1) = \dots = P(x_K) = 0$. Ainsi P admet au moins K racines distinctes.

Or $\deg(P) \leq K - 1$, d'où $P = 0$.

L'autre inclusion étant évidente, on a $\ker(\Psi) = \{0\}$ d'où Ψ est injective.

Comme $\dim(\mathbb{R}_{K-1}[X]) = K = \dim(\mathbb{R}^K)$, on conclut que

l'application Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Q 7. Je note (e_1, \dots, e_K) la base canonique de \mathbb{R}^K .

Pour $i \in \llbracket 1, K \rrbracket$, je pose $L_i = \Psi^{-1}(e_i)$ de sorte que

$$L_i \in \mathbb{R}_{K-1}[X] \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, K \rrbracket, L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Ainsi $P = \sum_{j=1}^K f(x_j) L_j \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\forall \ell \in \llbracket 1, K \rrbracket, P(x_\ell) = \sum_{j=1}^K f(x_j) \delta_{j,\ell} = f(x_\ell)$

On aurait pu poser $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ mais cela ne semble pas être dans l'esprit du sujet.

Q 8. On procède par récurrence bornée.

L'initialisation est obtenu par Q7, qui nous donne K réels $x_1 < \dots < x_K$ de $[0, 1]$ en lesquels $f^{(0)} - P^{(0)}$ s'annule.

Pour l'hérédité : soit $k \in \llbracket 0, K - 2 \rrbracket$ tel qu'il existe au moins $K - k$ réels distincts que je note $y_1 < \dots < y_{K-k}$ de $[0, 1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

Soit $j \in \llbracket 1, K - k \rrbracket$. On a $f^{(k)} - P^{(k)}$ est dérivable sur $[y_j, y_{j+1}]$ et $f(y_j) = f(y_{j+1})$.

Rolle nous fournit alors $z_j \in]y_j, y_{j+1}[$ tel que $(f^{(k+1)} - P^{(k+1)})(z_j) = 0$.

Comme $y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \dots < y_{K-k-1} < z_{K-k-1} < y_{K-k}$, on a obtenu $K - k - 1 = K - (k + 1)$ points d'annulation de $f^{(k+1)} - P^{(k+1)}$. Ce que l'on voulait.

On peut conclure la récurrence : pour tout $k \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket$,

il existe au moins $K - k$ réels distincts de $[0, 1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule

Q 9. Soit $k \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket$. On a $f^{(k)} - P^{(k)} \in \mathcal{C}^{K-k}([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

On peut appliquer Q1 pour $x'_1 \in [0, 1]$:

$$\|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leq \left\| (f^{(k)} - P^{(k)})' \right\|_\infty + |(f^{(k)} - P^{(k)})(x'_1)|$$

Je choisis $x'_1 \in [0, 1]$ tel que $(f^{(k)} - P^{(k)})(x'_1) = 0$, ce qui est possible selon Q8 car $K - k \geq 1$.

On en déduit l'inégalité $\|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty$

Q 10. Par croissance de la suite $(\|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty)_{0 \leq k \leq K}$ (selon Q9), et comme $P^{(K)} = 0$ car $\deg(P) \leq K - 1$, alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket, \|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)} - P^{(K)}\|_\infty = \|f^{(K)}\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire, on a donc $\forall k \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket, \|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)}\|_\infty + \|P^{(k)}\|_\infty$. Ainsi

$$\forall k \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket, \|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)}\|_\infty + \sum_{i=0}^{K-1} \|P^{(i)}\|_\infty$$

En utilisant Q7, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket, \|P^{(i)}\|_\infty = \left\| \sum_{\ell=1}^K f(x_\ell) L_\ell^{(i)} \right\|_\infty \leq \sum_{\ell=1}^K |f(x_\ell)| \|L_\ell^{(i)}\|_\infty \leq \left(\max_{1 \leq j \leq K} \|L_j^{(i)}\|_\infty \right) \sum_{\ell=1}^K |f(x_\ell)|$$

En posant $C = \sum_{i=0}^{K-1} \left(\max_{1 \leq j \leq K} \|L_j^{(i)}\|_\infty \right)$ qui ne dépend que de x_1, \dots, x_K , on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket, \|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)}\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^K |f(x_\ell)|$$

On trouve une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée

II Dérivation \mathcal{C}^K pour les séries de fonctions

II.A - Énoncé général

Q 11. Soit $k \in \llbracket 0, K - 1 \rrbracket$. Q10 nous donne $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n^{(k)}\|_\infty \leq \|f_n^{(K)}\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^K |f_n(x_\ell)|$$

Les séries $\sum \|f_n^{(K)}\|_\infty$ et $\sum |f_n(x_\ell)|$ ($1 \leq \ell \leq K$) sont convergentes selon (H1) et (H2)

donc la série $\sum_{n \geq 0} \left(\|f_n^{(K)}\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^K |f_n(x_\ell)| \right)$ converge par linéarité

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n^{(k)}\|_\infty$ converge.

d'où la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0, 1]$ par définition.

Q 12. Je définis la fonction $\sigma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & [a, b] \\ t & \longmapsto & (1-t)a + tb \end{cases}$.

De sorte que σ est continue strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que $\sigma(0) = a$ et $\sigma(1) = b$.

Ainsi σ est bijective de $[0, 1]$ vers $[a, b]$.

Je pose pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n \circ \sigma$ et pour $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$, $y_\ell = \sigma^{-1}(x_\ell)$. De sorte que $g_n^{(k)}(y_\ell) = (b-a)^k f_n^{(k)}(x_\ell)$.

Comme σ est affine, g_n est de classe \mathcal{C}^K de dérivées : $\forall k \in \llbracket 0, K \rrbracket$, $g_n^{(k)} = (b-a)^k f_n^{(k)} \circ \sigma$.

Soit $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Je note $\|h\|_{\infty, [a, b]} = \sup_{t \in [a, b]} |h(t)|$.

On remarque que comme σ est bijective que : $\{|h(t)| \mid t \in [a, b]\} = \{|h(\sigma(x))| \mid x \in [0, 1]\}$.

Ainsi $\|h\|_{\infty, [a, b]} = \|h \circ \sigma\|_{\infty, [0, 1]} = \|h \circ \sigma\|_{\infty}$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, K \rrbracket, \|g_n^{(k)}\|_{\infty} = \|(b-a)^k f_n^{(k)}\|_{\infty, [a, b]} = (b-a)^k \|f_n^{(k)}\|_{\infty, [a, b]}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, K \rrbracket, \|f_n^{(k)}\|_{\infty, [a, b]} = \frac{1}{(b-a)^k} \|g_n^{(k)}\|_{\infty} \quad (\star).$$

On vérifie maintenant les hypothèses pour utiliser Q11 :

- $y_1 < \dots < y_K$ sont des réels distincts de l'intervalle $[0, 1]$ car σ^{-1} est également strictement croissante.
- (g_n) est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^K sur $[0, 1]$ vérifiant les deux hypothèses :

(H1) la série de fonctions $\sum g_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a, b]$;

car $\sum \|g_n^{(K)}\|$ converge selon (\star) et car $\sum \|f_n^{(K)}\|_{\infty, [a, b]}$ converge.

(H2) pour tout $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$ la série numérique $\sum g_n(y_\ell) = \sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Ainsi la série $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0, 1]$, pour tout $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$.

D'où pour $\sum \|f_n^{(k)}\|_{\infty, [a, b]}$ converge pour tout $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$ en utilisant (\star)

d'où la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$, pour tout $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$

Q 13. (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^K sur $[a, b]$.

(ii) Soit $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$.

La série de fonction $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement donc simplement sur $[a, b]$ selon Q12 de somme F_k .

(ii) La série de fonction $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a, b]$ de somme F_K .

Avec (i), (ii) et (iii), par théorème de cours :

$$\boxed{F_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^K \text{ sur } [a, b] \text{ et } F_0^{(k)} = F_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, K \rrbracket}$$

II.B - Application sur un exemple

Q 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Existence : La fonction $x \mapsto (-1)^n 2^{-nx^2}$ est continue par théorème généraux sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Le théorème fondamental nous fournit alors une primitive sur $]0, +\infty[$ qui y est donc continue.

Cette primitive admet donc une primitive g_n vérifiant donc $\forall x > 0$, $g_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$

Je considère alors la fonction affine h_n telle que $h_n(1) = g_n(1)$ et $h_n(2) = g_n(2)$ et je pose $f_n = g_n - h_n$

Alors f_n est de classe $f_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ vérifiant $f_n(1) = 0$, $f_n(2) = 0$ et $\forall x > 0$, $f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$

Unicité : On note f_n et g_n vérifiant la condition voulue et je note $d_n = f_n - g_n$.

On a alors $d_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ vérifiant $d_n(1) = 0$, $d_n(2) = 0$ et $\forall x > 0$, $d_n''(x) = 0$.

Donc d_n est polynomiale de degré ≤ 1 avec au moins deux racines, d'où $d_n = 0$

Ainsi $f_n = g_n$ ce qui prouve l'unicité.

Il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ vérifiant $f_n(1) = 0$, $f_n(2) = 0$ et $\forall x > 0$, $f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$

Q 15. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $]0, +\infty[$.

Je pose $a = \min(\alpha, 1)$ et $b = \max(\beta, 1)$.

On veut appliquer II.A sur le segment $[a, b]$ avec $K = 2$:

— $1 < 2$ sont des réels distincts de $[a, b]$;

— $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ vérifiant les deux hypothèses :

(H1) La série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(2)}$ converge normalement sur $[a, b]$ car

$$\forall x \in [a, b], \left| f_n^{(2)}(x) \right| \leq 2^{-na^2}$$

et car la série géométrique $\sum_{n \geq 1} 2^{-na^2}$ converge car $2^{-a^2} \in [0, 1[$.

(H2) pour tout $\ell \in \{1, 2\}$, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x_\ell)$ converge absolument car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_\ell) = 0$

Ainsi pour tout $i \in [0, 2]$, $\sum f_n^{(i)}$ converge normalement sur $[a, b]$ de somme F qui est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ vérifiant $\forall x \in [a, b]$, $F^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(i)}(x)$.

Comme c'est valable sur $[a, b]$, c'est valable sur $[\alpha, \beta]$ et donc

la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et F est de classe \mathcal{C}^2 car F est de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de tout point de $]0, +\infty[$.

Q 16. Par somme géométrique :
$$F''(x) = \frac{(-1)^1 2^{-x^2}}{1 + 2^{-x^2}} = \frac{-1}{1 + 2^{x^2}}$$

Q 16. On définit $G : t \mapsto F(t+1)$ sur $[0, 1]$ qui est de classe \mathcal{C}^2 car F l'est sur $[1, 2]$.

D'après Q10 (ou Q5), comme $0 < 1$ dans $[0, 1]$, alors il existe $C > 0$ indépendant de G tel que

$$\|G\|_\infty \leq \|G''\|_\infty + C(|G(0)| + |G(1)|)$$

or on a $G(0) = F(1) = \sum_{n=1} f_n(1) = 0$ et de même $G(1) = 0$

d'où $\|G\|_\infty \leq \|G''\|_\infty$. Par ailleurs, on a

$$\forall t \in [0, 1], G''(t) = F''(t+1) = \frac{-1}{1 + 2^{(t+1)^2}}$$

d'où $\forall t \in [0, 1]$, $|G''(t)| = \frac{1}{1 + 2^{(t+1)^2}} \leq \frac{1}{1 + 2^{(0+1)^2}} = \frac{1}{3}$. Ainsi

$$\forall t \in [0, 1], |G(t)| \leq \|G\|_\infty \leq \|G''\|_\infty \leq \frac{1}{3}$$

D'où
$$\forall x \in [1, 2], |F(x)| = |G(x-1)| \leq \frac{1}{3}$$

III Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

III.A - Construction de la suite $(\phi(j))_{j \in \mathbb{N}}$ et majoration de $\mathbb{P}(A_j)$

Q 18. Comme la série $\sum a_n^2$ converge, la suite des restes converge vers 0 : $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}$. Cela nous fournit $\psi(j) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq \psi(j) \implies \sum_{n=p}^{+\infty} a_n^2 \leq \frac{1}{8^j}$$

On construit alors ϕ par :

$$\phi(0) = \psi(0) \text{ et la relation de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \phi(n) = 1 + \max\{\psi(n), \phi(0), \dots, \phi(n-1)\}$$

Ainsi la suite ϕ est bien strictement croissante et $\forall j \in \mathbb{N}, \sum_{n > \phi(j)}^{+\infty} a_n^2 \leq \frac{1}{8^j}$

Q 19. Chaque X_n admet un moment d'ordre 2 car bornée

d'où par linéarité, les S_n admettent un moment d'ordre 2.

$$\text{On a } S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)} = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n X_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \mathbb{E}(1) - 0^2 = 1$

Par linéarité, on a :

$$\mathbb{E}(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n \mathbb{E}(X_n) = 0$$

Comme les X_n sont deux à deux indépendants, il en est de même des $a_n X_n$ par le lemme des coalitions.

On a donc

$$\mathbb{V}(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{V}(a_n X_n) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n^2 \mathbb{V}(X_n)$$

Ainsi $\mathbb{E}(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}) = 0$ et $\mathbb{V}(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n^2$

Q 20. On utilise l'inégalité de Pafnouty et de Jules-Irénée, avec $2^{-j} > 0$:

$$\mathbb{P}(|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)} - \mathbb{E}(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)})| \geq 2^{-j}) \leq \frac{\mathbb{V}(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)})}{(2^{-j})^2}$$

donc selon Q19 :

$$\mathbb{P}(|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}| \geq 2^{-j}) \leq 2^{2j} \sum_{n > \phi(j)} a_n^2$$

Ainsi par définition de A_j et avec Q18, on a la majoration $\mathbb{P}(A_j) \leq 2^{-j}$

III.B - Inégalité maximale de Lévy $\mathbb{P}(B_j) \leq 2\mathbb{P}(A_j)$

Q 21. Soit $j \in \mathbb{N}$.

\supseteq : Soit $m \in \llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket$. On remarque que

$$B_j = \bigcup_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \{|S_n - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}\} \quad \text{et} \quad B_{j,m} = \{|S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}\} \cap \left(\bigcap_{n=\phi(j)}^{m-1} \{|S_n - S_{\phi(j)}| \leq 2^{-j}\} \right)$$

d'où $B_{j,m} \subset B_j$. D'où

$$\bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} B_{j,m} \subset B_j$$

\subseteq : Soit $\omega \in B_j$.

Alors l'ensemble $\{n \in \llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket \mid |S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| > 2^{-j}\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} majorée par $\phi(j + 1)$. Cet ensemble admet donc un maximum que je note m de sorte que

$$m \in \llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket \phi(j), m - 1 \rrbracket, \quad |S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| \leq 2^{-j}$$

Ainsi $\omega \in \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} B_{j,m}$. On a prouvé :

$$B_j \subset \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} B_{j,m}$$

disjoints deux à deux : Soit $m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $\phi(j) < m < m' \leq \phi(j + 1)$.

On a alors

$$B_{j,m} \subset \{|S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}\} \quad \text{et} \quad B_{j,m'} \subset \{|S_m - S_{\phi(j)}| \leq 2^{-j}\}$$

D'où

$$B_{j,m} \cap B_{j,m'} = \emptyset$$

Ainsi les évènements $B_{j,m}$, pour m parcourant $\llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket$, sont disjoints deux à deux

et on a l'égalité d'évènements $B_j = \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} B_{j,m}$

Q 22. À l'aide de l'expression de B_j (Q21), on a :

$$A_j = \{|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}\} \subset B_j$$

donc à l'aide du résultat précédent

$$A_j = A_j \cap B_j = \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} (A_j \cap B_{j,m})$$

Comme la réunion est disjointe (Q21), on a bien la formule $\mathbb{P}(A_j) = \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m})$

Q 23. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} = \left\{ \left| \alpha \sum_{n=m+1}^{\phi(j+1)} X_n a_n + \sum_{n=\phi(j)+1}^m X_n a_n \right| > 2^{-j} \right\}$
 et $B_{j,m} = \left\{ \left| \sum_{n=\phi(j)+1}^m X_n a_n \right| > 2^{-j} \right\} \cap \left(\bigcap_{k=\phi(j)+1}^{m-1} \left\{ \left| \sum_{n=\phi(j)+1}^k X_n a_n \right| \leq 2^{-j} \right\} \right)$ car $\left\{ \left| \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j)} X_n a_n \right| \leq 2^{-j} \right\} = \Omega$

On peut alors trouver une partie E_α de $\{-1, 1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}$ tel que

$$\left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} \cap B_{j,m} = \left\{ (X_{\phi(j)+1}, \dots, X_{\phi(j+1)}) \in E \right\}$$

Soit $e = (e_{\phi(j)+1}, \dots, e_{\phi(j+1)}) \in \{-1, 1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}$.

Par ailleurs, par indépendance mutuelle des X_i , on a

$$\mathbb{P} \left(\left\{ (X_{\phi(j)+1}, \dots, X_{\phi(j+1)}) = e \right\} \right) = \prod_{i=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P} (\{X_i = e_i\}) = \frac{1}{2^{\phi(j+1)-\phi(j)}} = \frac{1}{|\{-1, 1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}|}$$

Ainsi le vecteur $(X_{\phi(j)+1}, \dots, X_{\phi(j+1)})$ suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}$. D'où

$$\mathbb{P} \left(\left\{ (X_{\phi(j)+1}, \dots, X_{\phi(j+1)}) \in E_\alpha \right\} \right) = \frac{|E_\alpha|}{|\{-1, 1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}|}$$

d'où $2^{\phi(j+1)-\phi(j)} \mathbb{P} \left(\left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} \cap B_{j,m} \right) = |E_\alpha|$

Ainsi la fonction $\alpha \mapsto 2^{\phi(j+1)-\phi(j)} \mathbb{P} \left(\left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} \cap B_{j,m} \right)$ est à valeurs dans \mathbb{N}

Par ailleurs, on remarque que

$$(e_{\phi(j)+1}, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{\phi(j+1)}) \in E_\alpha \iff (e_{\phi(j)+1}, \dots, e_m, -e_{m+1}, \dots, -e_{\phi(j+1)}) \in E_{-\alpha}$$

Ainsi l'application $(e_{\phi(j)+1}, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{\phi(j+1)}) \in E_\alpha \mapsto (e_{\phi(j)+1}, \dots, e_m, -e_{m+1}, \dots, -e_{\phi(j+1)}) \in E_{-\alpha}$ est bijective.

D'où $|E_\alpha| = |E_{-\alpha}|$ d'où la fonction à valeurs entières est paire

Q 24. Soit $m \in \llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket$. Soit $\omega \in B_{j,m}$. On a alors $|S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| > 2^{-j}$.

Si $S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_m(\omega)$ est du même signe de que $S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)$ alors :

$$|1 \cdot S_{\phi(j+1)}(\omega) - 1 \cdot S_m(\omega) + S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| > 2^{-j}$$

Sinon on a : $|(-1) \cdot S_{\phi(j+1)}(\omega) - (-1) \cdot S_m(\omega) + S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| > 2^{-j}$.

On a ainsi prouvé que :

$$B_{j,m} \subset \bigcup_{\alpha \in \{-1, 1\}} \left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\}$$

Ainsi $B_{j,m} \subset \bigcup_{\alpha \in \{-1, 1\}} \left(\left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} \cap B_{j,m} \right)$

Avec Q21, on obtient

$$B_j \subset \bigcup_{\substack{\alpha \in \{-1, 1\} \\ \phi(j)+1 \leq m \leq \phi(j+1)}} \left(\left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} \cap B_{j,m} \right)$$

Selon les termes étranges de l'énoncé, on montré que :

si l'évènement B_j se réalise, alors il existe $m \in \llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket$ et $\alpha \in \{-1, +1\}$ tels que

$$\text{l'évènement } \left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} \cap B_{j,m} \text{ se réalise également}$$

Q 25. En utilisant l'inclusion de la question précédente, la formule de Boole donne :

$$\mathbb{P}(B_j) \leq \sum_{\substack{\alpha \in \{-1,1\} \\ \phi(j)+1 \leq m \leq \phi(j+1)}} \mathbb{P}\left(\{|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}\} \cap B_{j,m}\right)$$

En utilisant la parité de la fonction de Q23, on a (en gardant $\alpha = 1$) :

$$\mathbb{P}(B_j) \leq 2 \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}\left(\{|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}| > 2^{-j}\} \cap B_{j,m}\right) = 2 \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m})$$

À l'aide de Q22, on conclut que $\boxed{\mathbb{P}(B_j) \leq 2\mathbb{P}(A_j)}$

III.C - Convergence de la série aléatoire $\sum X_n a_n$

Q 26. Soit $J \in \mathbb{N}$. On utilise à nouveau la formule de Boole puis Q25 et enfin Q20, par calcul dans $[0, +\infty]$, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geq J} B_j\right) \leq \sum_{j=J}^{+\infty} \mathbb{P}(B_j) \leq 2 \sum_{j=J}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j) \leq 2 \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-j} = 2^{-J+2}$$

Par théorème des gendarmes, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geq J} B_j\right) \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} 0$$

La suite d'événements $\left(\bigcup_{j \geq J} B_j\right)_{J \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

Ainsi par continuité décroissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geq J} B_j\right) \xrightarrow{J \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{J \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \geq J} B_j\right) = \mathbb{P}(B)$$

L'unicité de la limite nous donne l'égalité $\boxed{\mathbb{P}(B) = 0}$

Q 27. On a l'égalité entre les événements :

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists J \in \mathbb{N}, \forall j \geq J, \forall n \in [\phi(j) + 1, \phi(j + 1)], |S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| \leq 2^{-j}\}$$

et

$$\bigcup_{J \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq J} \bigcup_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \{|S_n - S_{\phi(j)}| \leq 2^{-j}\} = \bigcup_{J \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq J} \overline{B_j} = \overline{B}$$

Comme $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, on peut conclure avec Q26 et les termes du poète (zeugma) :

$\boxed{\text{l'évènement } \{\exists J \in \mathbb{N}, \forall j \geq J, \forall n \in [\phi(j) + 1, \phi(j + 1)], |S_n - S_{\phi(j)}| \leq 2^{-j}\} \text{ se réalise avec probabilité } 1}$

Q 28. Soit $\omega \in \bar{B}$. Cela nous fournit $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall j \geq J, \forall n \in [\phi(j) + 1, \phi(j + 1)], |S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| \leq 2^{-j}$$

Par conséquent, on a :

$$\forall j \geq J, |S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| \leq 2^{-j}$$

Par comparaison à la série géométrique $\sum 2^{-j}$ à termes positifs convergente,
la série $\sum |S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)|$ converge

D'où la série $\sum (S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega))$ converge absolument donc converge

Ainsi la suite $(S_{\phi(j)}(\omega))_{j \in \mathbb{N}}$ converge (série télescopique)

D'où $\omega \in \left\{ \text{la suite } (S_{\phi(j)})_{j \in \mathbb{N}} \text{ est convergente} \right\}$

On a montré que $\bar{B} \subset \left\{ \text{la suite } (S_{\phi(j)})_{j \in \mathbb{N}} \text{ est convergente} \right\}$.

Avec Q27 : « l'évènement » $\left\{ \text{la suite } (S_{\phi(j)})_{j \in \mathbb{N}} \text{ est convergente} \right\}$ a également une probabilité 1

On n'a pas montré que cet ensemble était un événement et ce point n'est pas un attendu de ce sujet. Faisable mais pas facilement sans indication.

Q 29. Soit $\omega \in \bar{B}$. Il s'agit d'établir que la suite de sommes partielles $(S_n(\omega))_{n \geq 0}$ converge.

On sait que la suite $(S_{\phi(j)}(\omega))_{j \in \mathbb{N}}$ est convergente d'après la question précédente.

L'égalité de \bar{B} et de l'évènement de Q27, nous fournit $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall j \geq J, \forall n \in [\phi(j) + 1, \phi(j + 1)], |S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)| \leq 2^{-j}$$

Soit $n \geq \phi(0) + 1$. Comme ϕ est une suite strictement croissante d'entiers naturels selon Q18,

On peut alors poser $j_n = \max \{j \in \mathbb{N} \mid \phi(j) + 1 \leq n\}$ (partie majorée non vide de \mathbb{N})

On a ainsi $\phi(j_n) + 1 \leq n < \phi(j_n + 1) + 1$ donc $n \in [\phi(j_n) + 1, \phi(j_n + 1)]$.

On montre facilement que (j_n) est croissante non majorée ainsi

$$j_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On n'est pas obligé de détailler autant pour j_n .

Cela nous fournit $N \geq \phi(0) + 1$ tel que $j_N \geq J$. Soit alors $n \geq N$. On a

$$S_n(\omega) = S_{\phi(j_n)}(\omega) + S_n(\omega) - S_{\phi(j_n)}(\omega)$$

Comme $2^{-j_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $S_n(\omega) - S_{\phi(j_n)}(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Par somme de suites convergentes, la suite de sommes partielles $(S_n(\omega))_{n \geq 0}$ converge

On peut conclure que « l'évènement » $\left\{ \text{la série } \sum X_n a_n \text{ est convergente} \right\}$ a une probabilité 1

IV Dérivation \mathcal{C}^K pour des séries aléatoires de fonctions

Q 30. On considère une série de réels $\sum a_n$ absolument convergente.

On a alors $|a_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, d'où $a_n^2 = |a_n|^2 = o(|a_n|)$.

Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n^2$ converge

Cela permet d'établir que l'hypothèse (H2) implique (H2')

Q 31. Soit $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$. La suite réelle $(f_n(x_\ell))_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que la série $\sum f_n(x_\ell)^2$ converge.

En appliquant la partie III (Q29), l'évènement $\{ \text{la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente} \}$ est de probabilité 1. Une intersection finie ou dénombrable d'évènements presque sûr étant un évènement presque sûr, on conclut que :

$$\boxed{\text{l'évènement } \bigcap_{\ell=1}^K \left\{ \text{la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente} \right\} \text{ a une probabilité 1}}$$

Q 32. Soit $\omega \in \Omega$.

Pour $n \in \mathbb{N}$. Je note $g_n = X_n(\omega) (f_n - P_n)$.

On a $P_n \in \mathcal{C}^K([0, 1])$ et $P_n^{(K)} = 0$ car $P_n \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$.

Ainsi $g_n \in \mathcal{C}^K([0, 1])$ et $\forall k \in \llbracket 1, K \rrbracket$, $g_n^{(k)} = X_n(\omega) (f_n - P_n)^{(k)}$ et $g_n^{(K)} = X_n(\omega) f_n^{(K)}$.

Ainsi comme $X_n(\omega) \in \{-1, 1\}$, on a $\|g_n^{(K)}\|_\infty = \|f_n^{(K)}\|_\infty$ (fonctions continues sur un segment).

Comme la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[0, 1]$,

alors la série $\sum \|f_n^{(K)}\|_\infty = \sum \|g_n^{(K)}\|_\infty$ converge

d'où la série de fonctions $\sum g_n^{(K)}$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Ainsi la suite (g_n) vérifie l'hypothèse (H1) de la sous-partie IIA.

Pour tout $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$, on a convergence absolue de $\sum g_n(x_\ell)$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(x_\ell) = f_n(x_\ell) - P_n(x_\ell) = 0$.

Ainsi la suite (g_n) vérifie l'hypothèse (H2) de la sous-partie IIA.

On en déduit avec Q11 et Q13 que

- pour tout $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$, la série de fonctions $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$;
- la fonction somme $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^K sur $[0, 1]$;
- pour tout $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$, $G^{(k)} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n^{(k)}(x)$.

On en déduit que l'évènement qui suit est certain donc de probabilité 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } k \in \llbracket 0, K \rrbracket, \text{ la série de fonctions } \sum X_n (f_n - P_n)^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0, 1], \\ \text{la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^K, \\ \text{pour tout } k \in \llbracket 0, K \rrbracket, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n) \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n)^{(k)} \end{array} \right\}$$

Q 33. Il nous suffit de montrer que l'intersection des évènements des 31 et 32 est inclus dans celui proposé dans cette question. On se donne donc $\omega \in \Omega$ tel que

$$\text{pour tout } \ell \in \llbracket 1, K \rrbracket, \text{ la série réelle } \sum X_n(\omega) f_n(x_\ell) \text{ converge}$$

et tel que ω est dans l'évènement de la question 32 (ce qui, en réalité, est toujours vérifié).

On pose $g_n = X_n(\omega) f_n$ et, en adoptant les mêmes notations que dans la question précédente, on remarque que

$$g_n = X_n(\omega) P_n + X_n(\omega) (f - P_n)$$

- Par choix de ω , $X_n(\omega)(f - P_n)$ est le terme général d'une série qui converge uniformément sur $[0, 1]$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre K . De plus, la somme de la série est de classe \mathcal{C}^K et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme.
- On veut maintenant obtenir la même propriété pour la série de fonctions de terme général $Q_n = X_n(\omega)P_n$. Montrons que l'on peut appliquer le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions.

(i) En utilisant les notations de la question 7, on a $Q_n = \sum_{j=1}^K X_n(\omega) f_n(x_j) L_j$ qui définit une fonction (polynomiale de degré $\leq K - 1$) de classe \mathcal{C}^K et

$$\forall k \in \llbracket 0, K \rrbracket, Q_n^{(k)} = \sum_{j=1}^K X_n(\omega) f_n(x_j) L_j^{(k)}$$

(ii) Comme les séries $\sum X_n(\omega) f_n(x_\ell)$ convergent, alors pour tout $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$, la série de fonctions $\sum Q_n^{(k)}$ converge simplement sur $[0, 1]$.

(iii) $Q_n^{(K)} = 0$ est le terme général d'une série qui converge uniformément sur $[0, 1]$.

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème du cours s'applique, on obtient que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^K sur $[0, 1]$, que ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme ET que toutes les séries dérivées intermédiaires convergent uniformément sur $[0, 1]$. (*cerise sur le gâteau du théorème*)

On en déduit alors que la même propriété est vraie pour g_n et on a montré que

l'évènement proposé est presque sûr

Q 34. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. (à déterminer)

On considère des réels distincts $x_1 < \dots < x_K$ de $[0, 1]$.

Soit $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$ tel que $x_\ell \neq 0$. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\frac{x_\ell}{n} \rightarrow 0$ donc $\sin\left(\frac{x_\ell}{n}\right) \sim \frac{x_\ell}{n}$

Ainsi $f_n(x_\ell) = \ln\left(1 + \sin\left(\frac{x_\ell}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{x_\ell}{n}\right) \sim \frac{x_\ell}{n}$

D'où $f_n(x_\ell)^2 \sim \frac{x_\ell^2}{n^2}$

Par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum f_n(x_\ell)^2$ converge et ceci est valable si $x_\ell = 0$

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^∞ par théorèmes généraux.

donc la série de fonctions $\sum f_n$ de classe \mathcal{C}^K sur $[0, 1]$ vérifie l'hypothèse (H2).

Pour vérifier l'hypothèse (H1), il suffit de trouver l'exemple d'un $K \in \mathbb{N}^*$ tel que la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Soit $x \in [0, 1]$. On a $f_n'(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{n\left(1 + \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + \sin\left(\frac{x}{n}\right)}$

donc $f_n''(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{-\frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} \cos^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1 + \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2} = \frac{-1 \sin\left(\frac{x}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2}$ d'où

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n''(x)| = \frac{1}{n^2} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right) + 1}{\left(1 + \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

or la série $\sum \frac{2}{n^2}$ converge donc la série de fonctions $\sum f_n''$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Ainsi pour $K = 2$, l'évènement précédent se réalise avec les fonctions f_n définies par :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_n(x) = \ln\left(1 + \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

On peut remarquer que la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge pour tout $x \in]0, 1]$.