Concours Commun INP 2023

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

(corrigé)

EXERCICE
Fonction de Bessel

Q 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \cos(x\sin(t))$ est continue sur le SEGMENT $[0,\pi]$ (en tant que composition de l'application $t \mapsto x\sin(t)$, continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et du cosinus qui est continu sur $\mathbb{R}$), donc l'intégrale $f(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et même absolument, ce qui servira dans la question suivante si l'on veut utiliser les énoncés au programme). Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q 2. Nous allons utiliser le théorème de classe C^2 des intégrales à paramètres. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$, posons :

$$g(x,t) = \cos(x\sin(t)).$$

Alors :

— pour tout $t \in [0,\pi]$, l'application $x \mapsto \cos(x\sin(t))$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x\sin(t)$ et le cosinus le sont (ce sont des fonctions usuelles), et on a pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -(\sin(t))^2\cos(x\sin(t))$$

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto g(x,t) = \cos(x\sin(t))$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0,\pi]$, comme on l'a justifié dans la question précédente ;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, un raisonnement analogue assure que $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t))$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0,\pi]$ (la seule différence avec $t \mapsto g(x,t)$ est la multiplication par $t \mapsto -\sin(t)$, qui est aussi une fonction continue ; on a ainsi une fonction continue par morceaux sur un segment, donc intégrable) ;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,\pi]$ (c'est toujours le même raisonnement), et on a pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi]$:

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 1 \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

or l'application $\varphi : t \mapsto 1$ est trivialement continue par morceaux sur le segment $[0,\pi]$: elle y est donc intégrable.

Toutes les hypothèses du théorème de classe C^2 des intégrales à paramètres sont vérifiées. On en déduit d'une part que $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est intégrable sur $[0,\pi]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ce qui était trivial), et d'autre part que l'on peut dériver sous le signe intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t, \quad f''(x) = \int_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \int_0^\pi -\sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t, \quad f''(x) = \int_0^\pi -(\sin(t))^2\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.$$

Q 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les applications cosinus et sinus sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par composition et produit, $t \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ existe. On a par ailleurs :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x(\cos(t))^2\cos(x\sin(t)).$$

Par anticipation sur la question suivante, remarquons qu'il apparaît $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ (où g a été définie dans la résolution de la question précédente). Mieux : en écrivant : $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on a pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) + x\cos(x\sin(t)) - x(\sin(t))^2\cos(x\sin(t)),$$

c'est-à-dire :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) + xg(x,t) + x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t). \tag{1}$$

Q 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, avec les notations des questions précédentes :

$$\begin{aligned}
xf''(x) + f'(x) + xf(x) &\overset{[\mathbf{Q\,2}]}{=} x\int_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t + x\int_0^\pi g(x,t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \left(x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) + xg(x,t) \right)\mathrm{d}t \\
&\overset{(1)}{=} \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t \\
&= [h(x,t)]_0^\pi \\
&= h(x,\pi) - h(x,0) \\
&= -\sin(x\sin(\pi)) - \sin(x\sin(0)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi f vérifie bien l'équation différentielle (E), ce qu'il fallait démontrer.

Q 5. Soit S la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$. Alors S est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et dérivable terme à terme, en tant que fonction développable en série entière, et on a :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-R,R[$, après un changement d'indice adéquat :

$$\begin{aligned}
xS''(x) + S'(x) + xS(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)n a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right) x^n + a_1 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\Big) x^n + a_1.
\end{aligned}$$

On en déduit que S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\Big((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\Big)x^n + a_1 = 0.$$

Par unicité des coefficients d'une somme de série entière, S vérifie (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1 &= 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} &= 0, \end{cases}$$

d'où le résultat, après avoir isolé a_{n+1} dans la deuxième égalité, puis remplacé n par $n-1$ dans la deuxième égalité (il faut et suffit alors d'avoir $n \geqslant 2$ pour que $n-1$ soit dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$).

Q 6. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f(x) = \int_0^\pi \cos\left(x\sin(t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}t.$$

Justifions l'interversion de la somme et de l'intégrale, grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment, dont nous allons vérifier les hypothèses. Posons :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times[0,\pi], \quad f_n(t) = (-1)^n\frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est évidemment continue (par morceaux) sur $[0,\pi]$. Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[0,\pi]$, en montrant qu'elle converge normalement sur cet intervalle. On a :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times[0,\pi], \quad |f_n(t)| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Cette majoration est indépendante de la variable t. Par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ converge : il s'agit du développement en série entière du cosinus hyperbolique évalué en $|x|$, dont on sait qu'il converge en tout nombre réel. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0,\pi]$, et sa somme est continue (par morceaux) puisqu'il s'agit de $t \mapsto \cos(x\sin(t))$.

Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\pi f_n$ converge, et d'autre part :

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^\pi(-1)^n\frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^\pi(\sin(t))^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{W_{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$

d'où le résultat.

Q 7. Nous avons démontré dans la question **Q 5** que si $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est développable en série entière et solution de (E) au voisinage de 0, alors on a nécessairement : $a_1 = 0$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}$. Nous allons montrer de plus que si : $S(0) = \pi$, alors ses coefficients vérifient nécessairement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k \pi}{2^{2k}(k!)^2},$$

ce qui montre bien qu'il existe au plus une fonction développable en série entière à être solution de (E) et à vérifier $S(0) = \pi$ (la fonction en question étant celle dont les coefficients ont l'expression ci-dessus). Pour comprendre comment l'on conjecture ces valeurs, voir la remarque à la fin de la résolution de cette question.

Nous allons démontrer cette affirmation par récurrence sur k. Soit P_k la proposition ci-dessus. Pour $k = 0$, on sait déjà qu'on a $a_{2\times 0+1} = a_1 = 0$, tandis que : $a_{2\times 0} = a_0 = S(0) = \pi = \dfrac{(-1)^0 \pi}{2^{2\cdot 0}(0!)^2}$.

D'où P_0, ce qui initialise la propriété.

Montrons qu'elle est héréditaire : soit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_k. Alors :

$$a_{2(k+1)+1} = a_{2k+1+2} \overset{[\mathbf{Q\,5}]}{=} -\frac{1}{(2k+1+2)^2} a_{2k+1} \overset{[\mathrm{P}_k]}{=} -\frac{1}{(2k+1+2)^2} \times 0 = 0,$$

et :

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} \overset{[\mathbf{Q\,5}]}{=} -\frac{1}{(2k+2)^2} a_{2k} \overset{[\mathrm{P}_k]}{=} -\frac{1}{2^2(k+1)^2} \times \frac{(-1)^k \pi}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{(-1)^{k+1}\pi}{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2},$$

donc on a bien :

$$a_{2(k+1)+1} = 0, \quad a_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}\pi}{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2},$$

ainsi P_k implique P_{k+1} : on a montré l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a obtenu les expressions de a_{2k} et a_{2k+1} annoncées, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déduisons-en le résultat de l'énoncé : la question **Q 4** montre que f est une solution de (E), et la question **Q 6** qu'elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$f(0) = \int_0^\pi \cos(0)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{d}t = \pi,$$

donc f est une fonction développable en série entière, solution de (E), qui vérifie : $f(0) = \pi$. Par unicité d'une telle fonction (obtenue par l'explicitation des coefficients a_n ci-dessus), on a donc nécessairement, pour tout x au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k},$$

ce qui montre bien le résultat voulu (et même un peu plus).

Remarque. Il n'y a ici pas besoin de vérifier réciproquement que la série entière $\sum_{k\geqslant 0} a_{2k} x^{2k}$ est bien de rayon de convergence non nul : si ce n'était pas le cas, alors il n'existerait pas du tout de fonction développable en série entière et solution de (E)... Or on sait qu'il en existe, puisque f en est une. Par l'absurde, le rayon de convergence est non nul (et c'est $+\infty$ puisque f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$).

Remarque : comment conjecturer l'expression de a_{2k+1} et a_{2k}. Pour comprendre d'où viennent les expressions de a_{2k+1} et a_{2k} proposées dans P_k, on réitère la relation (†), d'abord avec

$n = 2k-1$ ou $n = 2k-2$, puis $n = 2k-3$ ou $n = 2k-4$, etc., autant que possible, c'est-à-dire jusqu'à $n = 1$ ou $n = 0$ (selon qu'on parte de a_{2k+1} ou a_{2k}). En écrivant informellement le produit qui apparaît ainsi, on trouve :

$$\begin{aligned} a_{2k+1} = -\frac{1}{(2k+1)^2} a_{2k-1} &= \frac{-1}{(2k+1)^2} \cdot \frac{-1}{(2k-1)^2} a_{2k-3} \\ &= \frac{-1}{(2k+1)^2} \cdot \frac{-1}{(2k-1)^2} \times \cdots \times \frac{-1}{1^2} \underbrace{a_1}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} a_{2k-2} = \frac{-1}{(2k)^2} \cdot \frac{-1}{(2k-2)^2} a_{2k-4} &= \frac{-1}{(2k)^2} \cdot \frac{-1}{(2k-2)^2} \times \cdots \times \frac{-1}{2^2} a_0 \\ &= \frac{-1}{2^2 k^2} \cdot \frac{-1}{2^2 (k-1)^2} \times \cdots \times \frac{-1}{2^2} a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2^2)^k} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{(k-1)^2} \times \cdots \times \frac{1}{1^2} a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{a_0}{(k \times (k-1) \times \cdots 1)^2} = \frac{(-1)^k \pi}{2^{2k} (k!)^2}. \end{aligned}$$

Comme $a_0 = S(0) = \pi$, cela donne la forme annoncée. Le raisonnement par récurrence plus haut est une rédaction plus soignée de cette réitération.

Q 8. Les deux questions précédentes montrent que l'on a, pour tout x au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n \frac{W_{2n}}{(2n)!} = \frac{(-1)^n \pi}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Après simplifications, cela donne le résultat demandé :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

PROBLÈME 1
Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Partie I – Un développement en série entière

Q 9. C'est un développement en série entière usuel. On a, pour rappel :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Q 10. Soit $x \in]-1, 1[$. Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans l'identité de la question précédente. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $-x \in]-1, 1[$, et on peut donc évaluer en $-x$ l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x)^n.$$

Simplifions le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\cdot(2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard : on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n}\times\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a : $(-x)^n = (-1)^n x^n$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n,$$

d'où le résultat, étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie II – Probabilité de retour à l'origine

Q 11. Soit $t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On montre facilement que $X_t = -1$ si et seulement si $\dfrac{X_t+1}{2} = 0$, et $X_t = 1$ si et seulement si $\dfrac{X_t+1}{2} = 1$. Comme X_t ne prend que les valeurs -1 et 1, cela donne l'ensemble des valeurs possibles prises par $\dfrac{X_t+1}{2}$. Autrement dit : $\left(\dfrac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = \{0,1\}$, ce qui assure déjà que $\dfrac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli. Pour connaître son paramètre, on calcule la probabilité que $\dfrac{X_t+1}{2} = 1$:

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = \mathrm{P}(X_t = 1) = p.$$

Donc : $\dfrac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Ainsi $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$ est une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre p, indépendantes grâce au lemme des coalitions (puisque les X_t le sont par hypothèse), donc on sait que $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Q 12. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On remarque que l'on a :

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{n}X_t + \sum_{t=1}^{n}1\right) = \frac{S_n+n}{2}.$$

On en déduit :

$$S_n = 0 \Longleftrightarrow \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Or : $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} \sim \mathcal{B}(n,p)$, donc en particulier : $\displaystyle\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = [\![0,n]\!]$. On retient surtout que c'est une variable aléatoire à valeurs entières, donc si n est impair, on a $\displaystyle\frac{n}{2} \notin \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega)$, donc : $\displaystyle\mathrm{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}\right) = 0$. Par l'équivalence ci-dessus, on a donc aussi, si n est impair : $\mathrm{P}(S_n = 0) = 0$.

En revanche, si n est pair, alors $\frac{n}{2} \in [\![0,n]\!]$ et on a, pour une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\mathrm{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n-n/2} = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}.$$

Ainsi, si n est pair : $\mathrm{P}(S_n=0) = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}$. Comme $u_n = \mathrm{P}(S_n = 0)$, on a bien montré :

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. On pouvait justifier autrement que $u_n = 0$ pour n impair : pour que $(S_n = 0)$ se réalise, du fait que $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$ soit une somme de 1 et -1, il faut qu'il y ait eu autant de 1 que de -1 dans cette somme, ce qui n'est possible que si la somme a un nombre pair de termes. Comme cette somme a n termes, il faut donc que n soit pair pour que $(S_n = 0)$ se réalise. Par contraposée, si n est impair alors $(S_n = 0)$ est l'évènement impossible.

Q 13. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $2n$ est un entier pair, donc on a :

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n.$$

Or, d'après la formule de Stirling :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

On en déduit :

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Or l'application $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en $x = \frac{1}{2}$, et ce maximum vaut $\frac{1}{4}$. Donc, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. Par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} = 0$. Deux suites équivalentes ayant même limite, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_{2n} = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0.$$

Ainsi, après un temps arbitrairement long, il est presque certain que le mobile ne se trouve pas en l'origine (n'oublions pas que $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les deux suites extraites des indices pairs et des indices impairs ont la même limite, et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$).

Partie III – Nombre de passages par l'origine

Q 14. La variable aléatoire T_n compte le nombre de passages du mobile à l'origine entre le début de l'observation et l'instant $2n$.

Q 15. Comme : $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$, la variable aléatoire O_{2j} suit une loi de Bernoulli. On détermine son paramètre en calculant la probabilité qu'elle soit égale à 1. Or :

$$O_{2j} = 1 \Longleftrightarrow S_{2j} = 0,$$

donc : $\mathrm{P}(O_{2j} = 1) = \mathrm{P}(S_{2j} = 0) = u_{2j} = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. En résumé :

$$O_{2j} \sim \mathcal{B}\left(\binom{2j}{j}(p(1-p))^j\right).$$

Donc : $\mathrm{E}(O_{2j}) = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j.$$

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{(j!)^2}(p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j.$$

Comme $p \neq \frac{1}{2}$, l'étude des variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ montre qu'on a : $0 \leqslant 4p(1-p) < 1$. Ainsi $4p(1-p)$ appartient à l'intervalle ouvert de convergence du développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. On en déduit que la série $\sum\limits_{j \geqslant 0} \dfrac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j$ converge, et que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{E}(T_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$. Le membre de droite de cette égalité est croissant (comme fonction de p) sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et décroissant sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ (en vérité, le fait que cette quantité reste inchangée en composant par $p \mapsto 1-p$ assure que le graphe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$, donc l'étude sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ suffit). Quand $p \to 0^+$, cette quantité vaut 1 et quand $p \to \frac{1}{2}^-$, elle tend vers l'infini.

On en déduit qu'après un temps infini, le mobile passe un nombre fini de fois en moyenne par l'origine : en moyenne une fois environ si p est proche de 0 ou de 1 (ce qui correspondrait logiquement au fait que la position initiale soit l'origine).

Q 17. Notons que si $p = \frac{1}{2}$, alors on a d'après la question **Q 15** :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}.$$

Conformément à l'indication de l'énoncé, on va montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors : $\mathrm{E}(T_0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{0} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = \frac{1}{2^{2\cdot 0}}\binom{2\cdot 0}{0} = \frac{2\cdot 0+1}{2^{2\cdot 0}}\binom{2\cdot 0}{0}$.
D'où le résultat au rang $n = 0$.
À présent, montrons l'hérédité de cette formule. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.
Alors :

$$\mathrm{E}(T_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1} = \mathrm{E}(T_n) + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1}.$$

Et donc, par hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(2^2(2n+1)\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\right).$$

Or (l'objectif des calculs qui suivent est de faire apparaître $\binom{2n+2}{n+1}$, conformément à ce qu'on a envie de démontrer) :

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(n!)^2} = \frac{(2n+2)!}{2(n+1)(2n+1)(n!)^2} &= \frac{1}{2(2n+1)}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!n!}\\ &= \frac{n+1}{2(2n+1)}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\\ &= \frac{n+1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1},\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T_{n+1}) = \frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(2(n+1)\binom{2n+2}{n+1} + \binom{2n+2}{n+1}\right) &= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1}\\ &= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1},\end{aligned}$$

d'où l'hérédité : le résultat au rang n implique le résultat au rang $n+1$.
Par principe de récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$. En reprenant le calcul d'équivalent de la question **Q 13**, on en déduit :

$$\mathrm{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n+1}{2^{2n}}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n) = +\infty$. Ainsi, en moyenne, la particule passe une infinité de fois par l'origine quand on observe l'expérience pendant un temps arbitrairement long.
Remarque. Nul besoin de passer par un raisonnement par récurrence, si l'on remarque que $\mathrm{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}$ est le coefficient général du produit de Cauchy de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n$ par $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ (cela tombe bien, on sait expliciter ces deux séries ; pour la première, cela découle de la question **Q 10**). Pour tout x au voisinage de 0, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{E}(T_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-3/2}.$$

Or on sait développer en série entière $x \mapsto (1-x)^{-3/2}$, par exemple en imitant le raisonnement de la question **Q 10** où l'on pose cette fois $\alpha = -\frac{3}{2}$. Mais on va l'obtenir encore plus facilement en exploitant les calculs déjà effectués, puisque $x \mapsto (1-x)^{-3/2}$ n'est rien d'autre que la dérivée de $x \mapsto 2(1-x)^{-1/2}$ dont on connaît déjà le développement en série entière. En le dérivant terme à terme, on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{3}{2}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}(n+1)x^n,$$

d'où, pour tout x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}(T_n)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^{2n+2}(n+1)n!n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^2\frac{(n+1)(2n+1)(2n)!}{2^{2n+2}(n+1)!n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n,
\end{aligned}$$

donc par unicité des coefficients : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

Cette approche n'est bien entendu pas plus élémentaire que celle proposée par l'énoncé, mais elle est relativement rapide et a l'avantage de donner la valeur de $\mathrm{E}(T_n)$ recherchée sans avoir la moindre idée de sa valeur *a priori* (ce qui était le cas de votre serviteur).

PROBLÈME 2
Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Partie I – Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Q 18. La matrice $M(a,b)$ est symétrique, réelle dans cette question puisqu'on suppose que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donc par le théorème spectral elle est diagonalisable.

Q 19. La somme des coefficients de chaque ligne égale $b+(n-1)a$. Un calcul direct montre donc que : $M(a,b)V = (b+(n-1)a)V$. Comme $V \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, on en déduit que c'est un vecteur propre de M, et que $b+(n-1)a$ est la valeur propre associée à V.

Q 20. Soit $x \in \mathbb{C}$. On a :

$$P_{1,0}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ x-(n-1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ x-(n-1) & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} \left(C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^n C_i\right)$$

$$= \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & x+1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \vdots \\ (L_n \leftarrow L_n - L_1) \end{matrix}$$

C'est le déterminant d'une matrice triangulaire : il se calcule donc en faisant le produit des coefficients diagonaux. De là on déduit facilement : $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X+1)^{n-1}$. D'où le résultat.

Autre démonstration. On peut trouver ce polynôme caractéristique sans calcul, par un bon usage du théorème du rang. En effet, la matrice $M(1,0) + \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est évidemment de rang 1, donc par le théorème du rang : $\dim(\ker(M(1,0) + \mathrm{I}_n)) = n - 1 > 0$. On en déduit que -1 est valeur propre, d'ordre de multiplicité exactement $n-1$ (comme $(1,0) \in \mathbb{R}^2$, on sait par la question **Q 18** que $M(1,0)$ est diagonalisable, donc par le critère de diagonalisation on sait que les ordres de multiplicité des valeurs propres sont exactement égaux aux dimensions des sous-espaces propres associés). De plus, en appliquant la question précédente avec $(a,b) = (1,0)$, on observe que $n-1$ est valeur propre de $M(1,0)$. Cela fait n valeurs propres de $M(1,0)$ (en comptant les ordres de multiplicité), donc n racines de $P_{1,0}$. Comme il est de degré n, le compte est bon et on a : $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X+1)^{n-1}$.

Q 21. L'énoncé nous invite à remarquer que l'on a : $M(a,b) = b\mathrm{I}_n + aM(1,0)$. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P_{a,b}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - M(a,b)) &= \det(x\mathrm{I}_n - b\mathrm{I}_n - aM(1,0)) \\ &= \det((x-b)\mathrm{I}_n - aM(1,0)) \\ &= \det\left(a\left(\frac{x-b}{a}\mathrm{I}_n - M(1,0)\right)\right) \\ &= a^n \det\left(\frac{x-b}{a}\mathrm{I}_n - M(1,0)\right) \\ &= a^n P_{1,0}\left(\frac{x-b}{a}\right), \end{aligned}$$

d'où : $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. On en déduit, grâce à la question précédente :

$$P_{a,b}(X) = a^n \left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a} + 1\right)^{n-1} = (X - b - (n-1)a)\,(X - b + a)^{n-1}.$$

On en déduit que les valeurs propres de $M(a,b)$ sont $b + (n-1)a$ (qui est d'ordre de multiplicité 1) et $b - a$ (qui est d'ordre de multiplicité $n-1$).

On a bien $b - (n-1)a \neq b - a$, puisque l'égalité équivaut à $na = 0$, or on a supposé a non nul.

Q 22. La matrice $M(1,0)$ est diagonalisable par la question **Q 18** avec $(a,b) = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, donc par le critère polynomial de diagonalisation on sait que $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M(1,0))} (X - \lambda) = (X+1)(X-(n-1))$ est un polynôme annulateur de $M(1,0)$ (les valeurs propres de $M(1,0)$ sont $n-1$ et -1 d'après n'importe laquelle des deux questions précédentes). C'est-à-dire :

$$(M(1,0) + \mathrm{I}_n)(M(1,0) - (n-1)\mathrm{I}_n) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Voyons comment en déduire que $Q_{a,b} = (X - (b-a))(X - (b + (n-1)a))$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$. On rappelle que l'on a : $M_{a,b} = b\mathrm{I}_n + aM(1,0)$. Donc :

$$\begin{aligned} Q_{a,b}(M_{a,b}) &= (M(a,b) - (b-a)\mathrm{I}_n)\,(M(a,b) - (b + (n-1)a)\mathrm{I}_n) \\ &= (b\mathrm{I}_n + aM(1,0) - (b-a)\mathrm{I}_n)\,(b\mathrm{I}_n + aM(1,0) - (b + (n-1)a)\mathrm{I}_n) \\ &= (aM(1,0) + a\mathrm{I}_n)\,(aM(1,0) - (n-1)a\mathrm{I}_n) \\ &= a^2\,(M(1,0) + \mathrm{I}_n)\,(M(1,0) - (n-1)\mathrm{I}_n) \\ &= 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}, \end{aligned}$$

d'où le résultat : $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$. On va en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$:

— si $a = 0$, alors $M(0,b) = b\mathrm{I}_n$, qui est diagonale donc diagonalisable ;

— si $a \neq 0$, alors $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$, scindé, et à racines simples parce que $b-a \neq b+(n-1)a$ (en effet $b-a = b+(n-1)a$ si et seulement si $na = 0$, si et seulement si $a = 0$, mais on a supposé le contraire), donc par le critère polynomial de diagonalisation $M(a,b)$ est diagonalisable.

D'où le résultat : $M(a,b)$ est diagonalisable.

Q 23. D'après le théorème de division euclidienne, il existe $(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que :

$$X^k = Q_{a,b}Q + R \tag{$*$}$$

et $\deg(R) < \deg(Q_{a,b}) = 2$. Comme $\deg(R) \leqslant 1$, on peut écrire le reste ainsi : $R = \alpha X + \beta$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant $(*)$ en les racines de $Q_{a,b}$, c'est-à-dire $b-a$ et $b+(n-1)a$, on obtient le système linéaire suivant vérifié par α et β :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (b-a)^k & = & \alpha(b-a)+\beta, \\ (b+(n-1)a)^k & = & \alpha(b+(n-1)a)+\beta. \end{array}\right.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ou $L_2 \leftarrow (b-a)L_2 - (b+(n-1)a)L_1$ nous permettent d'obtenir directement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \dfrac{(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k}{na}, \\[2ex] \beta & = & \dfrac{(b+(n-1)a)(b-a)^k-(b-a)(b+(n-1)a)^k}{na}. \end{array}\right.$$

Alors, en évaluant $(*)$ en $M(a,b)$, comme $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ d'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} M(a,b)^k &= \alpha M(a,b) + \beta \mathrm{I}_n \\ &= \frac{(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k}{na} M(a,b) + \frac{(b+(n-1)a)(b-a)^k-(b-a)(b+(n-1)a)^k}{na} \mathrm{I}_n. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Q 24. Puisque $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} (b-a)^k = \lim_{k\to+\infty} (b+(n-1)a)^k = 0.$$

L'expression de $M(a,b)^k$ de la question précédente nous permet d'en déduire, par continuité de $\lambda \mapsto \lambda M(a,b)$ et $\lambda \mapsto \lambda \mathrm{I}_n$ (ce sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}$ qui est de dimension finie) :

$$\lim_{k\to+\infty} M(a,b)^k = 0 \times M(a,b) + 0 \times \mathrm{I}_n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}.$$

Ainsi $\left(M(a,b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Partie II – Limite des puissances d'une matrice

Q 25. Les coordonnées de $u(e_1)$ dans la base canonique sont données par la première colonne de $A = T$. On a donc : $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ (autrement dit : $e_1 \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ est un vecteur propre de u associé à λ_1). On a donc classiquement, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$, puis, par homogénéité de la norme : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|u^k(e_1)\| = |\lambda_1|^k \|e_1\|$. Or $\lambda_1 \in \mathrm{Sp}(u)$, donc par hypothèse de l'énoncé : $|\lambda_1| < 1$. On en déduit : $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda_1|^k = 0$, puis : $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|u^k(e_1)\right\| = 0$. Cette égalité peut se réécrire autrement : $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|u^k(e_1) - 0_{\mathbb{C}^n}\right\| = 0$. Donc, d'après les équivalences rappelées dans l'énoncé, on en déduit que la suite de vecteurs $\left(u^k(e_1)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul.

Q 26. Notons $T = ((t_{i,j}))$. La $(i+1)^{\text{e}}$ colonne de T donne les coordonnées de $u(e_{i+1})$ dans la base canonique. On a donc, avec ces notations : $u(e_{i+1}) = \sum_{k=1}^{n} t_{k,i+1} e_k$. Or T est triangulaire supérieure, donc $t_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$ (donc ici pour $k > i+1$), et de plus $t_{i+1,i+1} = \lambda_{i+1}$ d'après les notations de l'énoncé. Ainsi :

$$u(e_{i+1}) = \sum_{k=1}^{i} t_{k,i+1} e_k + t_{i+1,i+1} e_{i+1} + \underbrace{\sum_{k=i+2}^{n} t_{k,i+1} e_k}_{\text{ici } k>i+1} = \sum_{k=1}^{i} t_{k,i+1} e_k + \lambda_{i+1} e_{i+1}.$$

Posons donc : $x = \sum_{k=1}^{i} t_{k,i+1} e_k \in \operatorname{Vect}\Big((e_j)_{j\in[\![1,i]\!]}\Big)$. On a bien :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x,$$

comme désiré par l'énoncé. On en déduit, en prenant l'image par u^m dans cette égalité, et en utilisant la linéarité de u :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1} u^m(e_{i+1}) = u^m(x).$$

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $\lambda_{i+1} = 0$, la relation ci-dessus donne : $\forall m \in \mathbb{N}$, $u^{m+1}(e_{i+1}) = u^m(x)$, donc en posant $m = k-1$ (qui est bien dans $\mathbb{N}$ si k est dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$) on a immédiatement le résultat voulu (attention, l'énoncé ne précise pas ce qu'est λ_{i+1}^{k-m-1} si $m = k-1$ et $\lambda_{i+1} = 0$; on prend la convention $0^0 = 1$ ici). Si $\lambda_{i+1} \neq 0$, alors on peut diviser l'égalité précédente par λ_{i+1}^{m+1}, et on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^{m+1}(e_{i+1}) - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m}} u^m(e_{i+1}) = \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^m(x).$$

Sommons cette égalité de $m = 0$ à $m = k-1$. On a alors une somme télescopique, que l'on sait simplifier :

$$\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^m(x) = \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^{m+1}(e_{i+1}) - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{m}} u^m(e_{i+1}) \right) = \frac{1}{\lambda_{i+1}^{k}} u^k(e_{i+1}) - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{0}} u^0(e_{i+1}).$$

On ne perd pas de vue que $u^0(e_{i+1}) = \operatorname{Id}(e_{i+1}) = e_{i+1}$. Alors, en isolant $u^k(e_{i+1})$ dans cette égalité, on a :

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda^k}{\lambda_{i+1}^{m+1}} u^m(x) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x),$$

d'où le résultat.

Une autre approche est possible. Hormis cette méthode de télescopage, une récurrence donne le résultat de manière élémentaire (et nous dispense de la distinction de cas selon que λ_{i+1} soit nul ou non). Mais, comme cela fut dit tantôt : votre serviteur privilégie les approches ne nécessitant pas de connaître le résultat *a priori*.

Q 27. On rappelle que x appartient $\operatorname{Vect}\Big((e_j)_{j\in[\![1,i]\!]}\Big)$. On peut donc l'écrire : $x = \sum_{j=1}^{i} x_j e_j$, avec $(x_1, \ldots, x_i) \in \mathbb{C}^i$. Donc, en prenant l'image par u^k et en utilisant sa linéarité : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \sum_{j=1}^{i} x_j u^k(e_j)$. Or par hypothèse on a : $\forall j \in [\![1,i]\!]$, $\lim_{k\to+\infty} u^k(e_j) = 0_{\mathbb{C}^n}$. On en déduit :

$$\lim_{k\to+\infty} u^k(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Déduisons-en la limite demandée. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k \geqslant k_0$, $\|u^k(x)\| \leqslant \varepsilon$. Un tel entier k_0 existe par définition de la limite. Soit $k \geqslant k_0 + 1$. Alors :

$$\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = \sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x). \tag{2}$$

Majorons la norme de ces deux sommes : pour la première, on va utiliser le fait que $(\lambda_{i+1}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour la seconde, le fait que $u^m(x)$ soit « petit » pour $m \geqslant k_0$. Plus précisément :

$$\sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = \lambda_{i+1}^k \sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{-m-1} u^m(x)$$

et comme, par hypothèse, on a : $|\lambda_{i+1}| < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_{i+1}^k = 0$. Le terme en facteur ne dépend pas de k donc il n'affecte pas cette limite nulle. Ainsi : $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
On en déduit qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant k_1$, on ait :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Passons à la seconde somme. Pour tout entier $m \geqslant k_0$, on a : $\|u^m(x)\| \leqslant \varepsilon$, donc d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de la norme on a :

$$\left\| \sum_{m=k_0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \sum_{m=k_0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \leqslant \varepsilon \sum_{m=k_0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \leqslant \varepsilon \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1},$$

la dernière majoration étant vraie parce qu'on somme des termes positifs. Faisons le changement d'indice $\ell = k - m - 1$, cela va nous simplifier le calcul de cette dernière somme. On remarque que l'on a : $0 \leqslant m \leqslant k-1 \iff 0 \leqslant \ell \leqslant k-1$. Alors, du fait que $|\lambda_{i+1}| \neq 1$ par hypothèse, on peut simplifier la somme qui apparaît : c'est une somme géométrique de raison différente de 1. Ainsi :

$$\left\| \sum_{m=k_0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \varepsilon \sum_{\ell=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{\ell} = \varepsilon \frac{1 - |\lambda_{i+1}|^k}{1 - |\lambda_{i+1}|} \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - |\lambda_{i+1}|}. \tag{4}$$

En combinant (2), (3) et (4), on a pour tout $k \geqslant \max(k_0 + 1, k_1)$:

$$\left\| \sum_{m=0}^{k_0-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|} = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|} \right).$$

Par définition de la limite (s'il nous gêne d'avoir une majoration par $\varepsilon \left(1 + \frac{1}{1-|\lambda_{i+1}|}\right)$ au lieu de ε, il suffit de reprendre tout le raisonnement effectué ci-dessus en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{1+\frac{1}{1-|\lambda_{i+1}|}}$), on a donc bien :

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.
En utilisant le même raisonnement que dans la question **Q 25**, on a aussi : $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\lambda_{i+1}^k e_{i+1}\| = 0$. Or, d'après l'inégalité triangulaire :

$$0 \leqslant \|u^k(e_{i+1})\| \leqslant \|\lambda_{i+1}^k e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\|,$$

et d'après ce qui précède les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{k\to+\infty} \|u^k(e_{i+1})\| = 0$, donc : $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$. D'où le résultat.

Q 28. Les questions précédentes montrent que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lim_{k \to +\infty} u^k(e_i) = 0_{\mathbb{C}^n}$. C'est en effet un raisonnement par récurrence, dont la question **Q 25** constitue l'initialisation et les deux questions suivantes l'hérédité. D'après les rappels de l'énoncé, dire que $\left(u^k(e_i)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul signifie qu'il y a convergence coordonnée par coordonnée. Or, si l'on pose $T^k = \left(\left(t_{i,j}^{(k)}\right)\right)$ et rappelle son lien avec $u^k(e_i)$ (expliqué dans la question **Q 26**) : les coordonnées de $u^k(e_i)$ dans $\mathcal{B}$ sont $(t_{1,i}^{(k)}, \ldots, t_{n,i}^{(k)})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$. La convergence coordonnée par coordonnée vers le vecteur nul implique donc : $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{k\to+\infty} t_{\ell,i}^{(k)} = 0$. Ainsi, pour tout $(\ell, i) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient (ℓ, i) de T^k tend vers 0 quand $k \to +\infty$, ce qui signifie exactement que la suite $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle. D'où le résultat.

Q 29. Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Soient, donc, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$. On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^kP^{-1}$. De plus T et A ont les mêmes valeurs propres, donc par hypothèse de l'énoncé on a aussi : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(T)$, $|\lambda| < 1$. Donc, d'après la question précédente : $\lim_{k\to+\infty} T^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Par continuité du produit matriciel, on en déduit :

$$\lim_{k\to+\infty} PT^kP^{-1} = P \times 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \times P^{-1} = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}.$$

D'où le résultat : $\lim_{k\to+\infty} A^k = \lim_{k\to+\infty} PT^kP^{-1} = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.

Partie III – Application à la méthode de Gauß-Seidel

Q 30. Puisque M est une matrice triangulaire, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux. C'est-à-dire, par définition de M : $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Or A est à diagonale strictement dominante (voir la définition donnée dans l'énoncé), donc en particulier ses coefficients diagonaux sont non nuls puisque :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \geqslant 0.$$

Ainsi : $\det(M)$ est un produit de complexes non nuls, donc : $\det(M) \neq 0$, et M est inversible (on pouvait aussi noter que M est aussi à diagonale strictement dominante, en utilisant le fait que M soit obtenue à partir de A en lui enlevant des coefficients hors de la diagonale).

Q 31. On a : $AX = Y$, donc : $(M - F)X = Y$. On en déduit : $MX = FX + Y$. En multipliant chaque membre de cette égalité à gauche par M^{-1}, il en découle : $X = M^{-1}FX + M^{-1}Y = BX + M^{-1}Y$. D'où le résultat.

Q 32. On a, par définition d'un vecteur propre : $BV = \lambda V$, c'est-à-dire : $M^{-1}FV = \lambda V$. En multipliant chaque membre de cette égalité à gauche par M, on a donc bien : $FV = \lambda MV$.

Notons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ (on remarque que l'énoncé introduit des v_i sans les définir). Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Regardons ce que donne la i^{e} ligne dans cette égalité. Le i^{e} coefficient de FV est $\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}v_j$, tandis que celui de λMV est $\sum_{j=1}^{n} \lambda m_{i,j}v_j$. L'égalité $FV = \lambda MV$ implique donc :

$$\sum_{j=1}^{n} f_{i,j}v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda m_{i,j}v_j.$$

Or, par définition de F, on a : $\forall j \in [\![1,i]\!]$, $f_{i,j}=0$, et : $\forall j \in [\![i+1,n]\!]$, $m_{i,j}=0$ (on convient que $[\![n+1,n]\!]$ est l'ensemble vide). Donc l'égalité ci-dessus peut se réécrire :

$$\sum_{j=i+1}^{n} f_{i,j}v_j = \sum_{j=1}^{i} \lambda m_{i,j}v_j.$$

Remplaçons les $f_{i,j}$ et les $m_{i,j}$ par leurs définitions, pour $j \geqslant i+1$ et $j \leqslant i$ respectivement. Cela donne :

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j = \sum_{j=1}^{i} \lambda a_{i,j}v_j.$$

En isolant le terme correspondant à $j=i$ dans le membre de droite, on a alors :

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda a_{i,j}v_j + \lambda a_{i,i}v_i.$$

Il ne plus qu'à regrouper les deux sommes, et on a l'égalité voulue :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda a_{i,i}v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j + \lambda\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j\right).$$

Q 33. L'existence de i_0 ne pose pas de problème, puisqu'un ensemble fini de réels admet toujours un maximum. La vraie question est de démontrer que pour un tel indice i_0, on a : $v_{i_0} \neq 0$. Si ce n'était pas le cas, on aurait : $|v_{i_0}| = 0 = \max\limits_{j\in[\![1,n]\!]} |v_j|$, donc : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant |v_j| \leqslant 0$, puis : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $v_j = 0$. Ainsi V serait le vecteur nul, ce qui est absurde puisqu'il s'agit d'un vecteur propre (ce qui, par définition, n'est jamais nul).

Prenons l'égalité de la question précédente pour $i=i_0$, et divisons par $v_{i_0} \neq 0$. On a :

$$\lambda a_{i_0,i_0} = -\left(\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j}\frac{v_j}{v_{i_0}} + \lambda\sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j}\frac{v_j}{v_{i_0}}\right).$$

Donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} \left|a_{i_0,j}\frac{v_j}{v_{i_0}}\right| + \left|\lambda\sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j}\frac{v_j}{v_{i_0}}\right|.$$

Par multiplicativité de la valeur absolue, et encore par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|\left|\frac{v_j}{v_{i_0}}\right| + |\lambda|\sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\left|\frac{v_j}{v_{i_0}}\right|.$$

Or on a : $|v_{i_0}| = \max\limits_{j\in[\![1,n]\!]} |v_j|$, donc : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\left|\frac{v_j}{v_{i_0}}\right| = \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leqslant 1$. Ainsi l'inégalité ci-dessus devient :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda|\sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|.$$

D'où le résultat.

Q 34. Raisonnons par l'absurde, et supposons : $1 \leqslant |\lambda|$. L'inégalité ci-dessus implique donc :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| = |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

Si $|\lambda| \geqslant 1$, en particulier $\lambda \neq 0$, donc on peut diviser par $|\lambda| > 0$ ci-dessus, et on obtient :

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|.$$

Or A est à diagonale strictement dominante. Donc l'inégalité devrait être en sens contraire (et stricte) : contradiction. Par l'absurde, on a montré : $|\lambda| < 1$.
Ceci vaut pour toute valeur propre de B. Donc, par le résultat principal de la partie II de ce problème, on a : $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. D'où le résultat.

Q 35. On a, par définition de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et par la question **Q 31** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} - X = (BX_k + M^{-1}Y) - (BX + M^{-1}Y) = B(X_k - X).$$

Une récurrence tout à fait classique permet alors d'en déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X).$$

Or : $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, donc par continuité du produit matriciel : $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k(X_0 - X) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \times (X_0 - X) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Ainsi : $\lim\limits_{k\to+\infty} (X_k - X) = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, d'où : $\lim\limits_{k\to+\infty} X_k = X$. D'où le résultat : on a construit une suite qui converge vers X.
Remarque. L'intérêt de cette construction est qu'elle permet de trouver une solution de $AX = Y$ sans inverser A : certes, on doit inverser la matrice M, mais sous de bonnes hypothèses ce peut être beaucoup moins coûteux ; de plus elle est déjà triangulaire, donc la méthode du pivot de Gauß serait plus efficace que pour inverser A.